



آموزش کامل مطالب درسی



درس اول: یادآوری عددهای صحیح

۱

۱

در سال‌های گذشته با عددهای صحیح آشنا شدیم. برای درک بهتر روابط عددهای صحیح، می‌توانیم از نمودار زیر استفاده کنیم.



مجموعه‌ی عددهای صحیح را با حرف $\mathbb{Z}$ که حرف اول کلمه‌ی آلمانی Zahlen است، نمایش می‌دهیم:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \dots\}$$

یادمون باشه



- عدد صفر نه مثبت نه منفی.
- عددهای مثبت رو می‌تونیم بدون علامت بنویسیم؛ مثل: $3 = +3$
- عددهای کسری و اعشاری فقط در صورتی جزء عددهای صحیح حساب می‌شن که بعد از ساده شدن از حالت کسری خارج بشن؛ مثل $3 = 3/1$ و $2 = 4/2$
- اما $3/2$ و $5/7$ با وجود داشتن علامت، عدد صحیح نیستن!

قرینه اعداد صحیح:

اگر محور اعداد را از نقطه‌ی صفر تا بزنیم، هر عدد صحیح روی قرینه‌ی خود منطبق می‌شود؛ مثلاً 3 و -3 بر هم منطبق می‌شوند.

می‌دانیم که 3 و -3 قرینه‌ی یکدیگرند؛ پس: $-(+3) = -3 \leftarrow$ قرینه

یادمون باشه



- قرینه‌ی عدد صفر می‌شه خود صفر.
- قرینه‌ی قرینه‌ی هر عدد، می‌شه خود اون عدد؛ مثلاً:

$$-5 \xrightarrow{\text{قرینه}} +5 \xrightarrow{\text{قرینه}} -5 \qquad -(-(-5)) = -5$$



- اگر چندین علامت پشت سر هم بیان و بین اون‌ها فقط پرانتز باشه، برای تعیین علامت حاصل، فقط کافیست تعداد منفی‌ها رو بشمریم و با علامت‌های مثبت کاری نداریم؛
اگر تعداد منفی‌ها فرد بود، جواب منفی می‌شه؛ مثل:

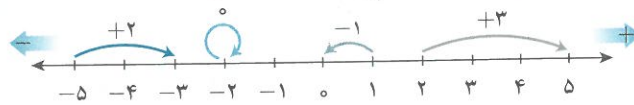
$$-(-(-(-(-8)))) = -8$$

- اگر تعداد منفی‌ها زوج بود، جواب مثبت می‌شه؛ مثل:

$$-(-(-(-8))) = +8$$

$$-(-(+(-(+(-(-4)))))) = -4 \quad (\text{۵ تا منفی داره})$$

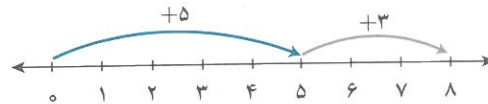
هر حرکت روی محور اعداد صحیح را می‌توان با یک عدد صحیح نشان داد. مثال:



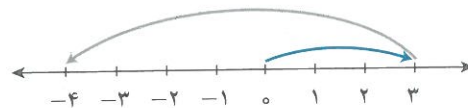
جمع دو عدد صحیح:

برای به دست آوردن حاصل جمع دو عدد صحیح، می‌توانیم با شروع از مبدأ، هر عدد را با یک حرکت روی محور نشان دهیم.

$$(+5) + (+3) = +8$$



$$(+3) + (-7) = -4$$



مثال ۱

توجه

هنگام جمع کردن دو عدد صحیح، به یکی از حالت‌های زیر بر می‌خوریم:

الف. اگر هر دو عدد مثبت باشند، حاصل جمع آن‌ها مانند جمع دو عدد طبیعی است.

$$(+7) + (+15) = (+22)$$

مثال.

ب. اگر هر دو عدد منفی باشند، حاصل جمع آن‌ها عددی منفی است که مقدار آن برابر است با مجموع مقدارهای دو عدد (بدون در نظر گرفتن علامت آن‌ها)

$$(-10) + (-28) = (-38)$$

مثال.

ج. اگر یکی از دو عدد منفی و دیگری مثبت باشد، مقدار جواب برابر است با اختلاف مقدار دو عدد و علامت جواب، علامت عددی است که مقدار آن بیش‌تر است. (بدون در نظر گرفتن علامت‌ها)

مثال.

$$\begin{cases} (+11) + (-25) = -14 \\ 25 > 11 \end{cases} \quad \begin{cases} (+12) + (-3) = +9 \\ 12 > 3 \end{cases}$$



یادمون باشه

● اگر دو عدد صحیح قرینه‌ی هم باشند، حاصل جمع اون‌ها صفر می‌شه؛ مثل:

$$(-15) + (+15) = 0 \quad 14 + (-14) = 0$$

● اگر یه عدد صحیح رو با صفر جمع کنیم، حاصل جمع می‌شه خود اون عدد؛ مثل:

$$0 + (-18) = (-18) \quad (+6) + 0 = (+6)$$

پس، صفر در جمع دو عدد صحیح، عددی خنثی است.

تفریق دو عدد صحیح:

برای به‌دست آوردن حاصل تفریق دو عدد صحیح، عدد اول را می‌نویسیم و با قرینه‌ی عدد دوم جمع می‌کنیم.

مثال ۲

$$(+12) - (+4) = (+12) + (-4) = (+8)$$

$$(-8) - (-2) = (-8) + (+2) = (-6)$$

در سال‌های گذشته آموختیم که جمع و تفریق عددهای صحیح دو رقمی و سه رقمی را می‌توانیم به کمک

یک جدول، به جمع و تفریق عددهای ساده‌تری تبدیل کنیم. به مثال‌های زیر توجه کنید:

الف. $(-43) + (-56) = ?$

	یکان	دهگان	
-	۳	۴	→ $-40 - 3$
-	۶	۵	→ $-50 - 6$
			$-90 - 9 = -99$

ب. $25 + (-17) = ?$

	یکان	دهگان	صدگان	
	۵	۲	۳	→ $300 + 20 + 5$
-	۷	۱	۷	→ $-700 - 10 - 7$
				$-400 + 10 - 2 = -392$



$$ج. \quad -37 + 62 - 98 = ?$$

	یکان	دهگان	
-	۷	۳	$\rightarrow -30 - 7$
-	۲	۶	$\rightarrow +60 + 2$
-	۸	۹	$\rightarrow -90 - 8$
			$-60 - 13 = -73$

در هنگام جمع و تفریق عددهای صحیح، می‌توانیم عددها را با هر ترتیبی که بخواهیم جمع کنیم؛ به عنوان مثال عبارت مقابل را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} & -15 + 12 - 29 \\ & \underbrace{-15 + 12}_{-3} - 29 = -3 - 29 = -32 \\ & -15 - 29 + 12 = \underbrace{-15 - 29}_{-44} + 12 = -32 \\ & -15 + 12 - 29 = -15 - 17 = -32 \end{aligned}$$

ضرب و تقسیم دو عدد صحیح:

حاصل ضرب و تقسیم دو عدد صحیح، مانند ضرب و تقسیم عددهای طبیعی است و علامت حاصل، با استفاده از جدول زیر تعیین می‌شود:

$\div$ یا $\times$	+	-
+	+	-
-	-	+

$$(مثبت) \times (مثبت) = (مثبت)$$

$$(مثبت) \times (منفی) = (منفی)$$

$$(منفی) \times (مثبت) = (منفی)$$

$$(منفی) \times (منفی) = (مثبت)$$

ترتیب انجام عمل‌های ریاضی:

۱. عبارت‌های داخل کروشه و پرانتز (اگر چند پرانتز داخل هم بودند، از داخلی‌ترین پرانتز)

۲. عددهای توان‌دار و جذر

۳. ضرب و تقسیم

۴. جمع و تفریق

* در همه‌ی مراحل، از چپ به راست عمل می‌کنیم.



مثال ۳

الف.

$$1 - 2(1 - \underbrace{(8-9)}_{-1}) = 1 - 2 \times \underbrace{(1 - (-1))}_2 = 1 - 4 = -3$$

ب.

$$\underbrace{(-12) \div 3}_{-4} \times (-4) = +16$$

ج.

$$\underbrace{[(-21) - (-7)]}_{-14} \times \underbrace{(-5 - 2)}_{-7} = (-14) \times (-7) = +98$$

د.

$$(-4) \div \underbrace{[(-19) + 7]}_{-12} = (-4) \div (-12) = +\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

(حواسمون باشه که $\frac{1}{3}$ با ۳ برابر نیست!)

$$4 \times 3^2 - 5 = 4 \times 9 - 5 = 36 - 5 = 31$$

ه.

و.

$$\begin{aligned} -5 - 2 \times 3 \underbrace{(-(-3) - 2)}_{+3-2=1} - 1 \times 3 &= -5 - 2 \times 3 \underbrace{(1)}_1 - 1 \times 3 \\ &= -5 - \underbrace{2 \times 3 \times 1}_6 - \underbrace{1 \times 3}_3 \\ &= -5 - 6 - 3 = -14 \end{aligned}$$

گاهی برای پیدا کردن مجموع چند عدد صحیح، می‌توانیم از راه‌های ابتکاری و جالبی استفاده کنیم. مثلاً برای جمع کردن اعداد از ۱ تا ۱۰۰، می‌توانیم به روش زیر عمل کنیم:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100$$

همان‌طور که می‌بینید، مجموع هر جفت از اعداد برابر ۱۰۱ خواهد شد و چون ۵۰ جفت عدد داریم، پس حاصل جمع برابر است با:

$$50 \times 101 = 5050$$

این روش توسط کودکی به نام «گوس» کشف شد که بعدها به عنوان یکی از دانشمندان بزرگ ریاضیات شناخته شد.



مثال ۴

$$1 + 2 + 3 + \dots + 999 + 1000 = 500 \times 1001 = 500500$$

$\xrightarrow{1001}$
 $\xrightarrow{1001}$

بیشتر بدونیم



برای راحتی کار در محاسبه‌ی چنین عبارت‌هایی، می‌تونیم اول تعداد عددها رو حساب کنیم و بعد از رابطه‌های زیر استفاده کنیم: (در همه‌ی این رابطه‌ها، حرف n نشون دهنده‌ی تعداد عددهاس.)

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1)$$

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$$

مثال ۵

$$1 + 2 + 3 + \dots + 145 = \frac{145 \times 146}{2} = 10585$$

الف.

ب.

$$2 + 4 + 6 + \dots + 260 = 130 \times 131 = 17030 \rightarrow (n = 260 \div 2 = 130)$$

ج.

$$1 + 3 + 5 + \dots + 73 = 37^2 = 37 \times 37 = 1369 \rightarrow (n = \frac{73+1}{2} = 37)$$

گاهی اوقات بعضی از عددهای عبارت داده شده، مثبت و بعضی از آن‌ها منفی هستند. در چنین مواقعی باز هم می‌توانیم جفت‌هایی را پیدا کنیم که حاصل جمع یا تفریق آن‌ها یکسان شود؛ سپس حاصل هر جفت را در تعداد این جفت‌ها ضرب می‌کنیم.

مثال ۶

$$\underbrace{1-2}_{-1} + \underbrace{3-4}_{-1} + \dots + \underbrace{97-98}_{-1} + \underbrace{99-100}_{-1} = 50 \times (-1) = -50$$

$$\underbrace{-4+8}_{+4} + \underbrace{-12+16}_{+4} - \dots - \underbrace{108+112}_{+4} = 14 \times (+4) = 56$$



اگر در یک عبارت طولانی، عددها با یک نظم خاصی نوشته شده باشند، می‌توانیم این عددها را با هم یک دنباله یا الگوی عددی تشکیل می‌دهیم. حالا اگر این الگوی عددی طوری باشد که هر عدد با عدد ثابتی جمع بشود و عدد بعدی الگو به دست بیاید، می‌توانیم این دنباله، یک دنباله حسابیه؛ مثال:

$$4, 8, 12, 16, \dots$$

$$\begin{array}{cccc} & +4 & +4 & +4 \\ \hline 4 & 8 & 12 & 16 \end{array}$$

در دنباله‌های حسابی، به عدد ثابتی که اضافه می‌شود (در اینجا: ۴) می‌گویند «قدرنسبت»
در عبارت‌هایی که شامل عددهای یک دنباله حسابی باشند، تعداد عددها را می‌توانیم از رابطه‌ی زیر به دست بیاوریم.

$$\left(\frac{\text{اولی} - \text{آخری}}{\text{قدرنسبت}} + 1 \right)$$

در مثال قبل از این قسمت داریم:

$$\text{تعداد عددها} = \frac{112 - 4}{4} + 1 = \frac{108}{4} + 1 = 27 + 1 = 28$$

چون هر دو عدد با هم جفت شدند؛ پس $28 \div 2 = 14$ جفت ۴ تشکیل شد.

یادمون باشه

اگر تعدادی عدد در هم ضرب بشوند و یکی از اون عددها صفر باشه، حاصل کل عبارت هم صفر می‌شه؛ مثلاً در عبارت $(-6 - 3)(-5 - 3) \dots (18 - 3)(19 - 3)(20 - 3)$ پایانه نگاه کوچولو می‌فهمیم که یکی از پرانتزهایی که نوشته نشده، عبارت $(3 - 3)$ هست که حاصلش صفره و چون علامت بین پرانتزها ضرب به حساب میاد، پس حاصل کل عبارت صفر می‌شه.



در هر عبارتی، هر چه تعداد عددهای مثبت بیشتر و مقدارشان بزرگ‌تر باشد، حاصل عبارت، بزرگ‌تر خواهد شد و هر چه تعداد عددهای منفی بیشتر و مقدارشان بزرگ‌تر باشد، حاصل عبارت عددی کوچک‌تر خواهد شد.

در هر جای خالی علامت + یا - را طوری قرار دهید تا:

مثال ۷

الف. حاصل بزرگ‌ترین عدد ممکن شود؛

ب. حاصل کوچک‌ترین عدد ممکن شود؛

$$-3 \square (-2) \square + 5 \square (-6) \square (-(-9))$$

برای پاسخ دادن به قسمت الف، باید علامت‌ها را طوری قرار دهیم تا هر عددی را که می‌توانیم، به عددی

مثبت تبدیل کنیم:

$$\square(-2) = +2; \square(+5) = +5; \square(-6) = +6; \square(-(-9)) = +9$$



در قسمت ب، علامت‌هایی قرار می‌دهیم تا هر عدد را به عددی منفی تبدیل کنیم:

$$\boxed{+}(-2) = -2; \boxed{-}(+5) = -5; \boxed{+}(-6) = -6; \boxed{-}(-(-9)) = -9$$

به این ترتیب داریم:

الف.

$$-3 \boxed{-}(-2) \boxed{+}(+5) \boxed{-}(-6) \boxed{+}(-(-9)) = -3 + 2 + 5 + 6 + 9 = 19$$

ب.

$$-3 \boxed{+}(-2) \boxed{-}(+5) \boxed{+}(-6) \boxed{-}(-(-9)) = -3 - 2 - 5 - 6 - 9 = -25$$

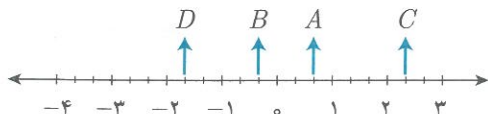


درس دوم: معرفی عددهای گویا

۲

۱

به محور زیر نگاه کنید. هریک از واحدهای روی محور به ۳ قسمت تقسیم شده‌اند. پس طول هر واحد کوچک $\frac{1}{3}$ واحد می‌باشد.



نقطه‌ی A، ۲ تا $\frac{1}{3}$ واحد در سمت راست مبدأ (سمت مثبت محور) قرار دارد؛ پس عدد $2 + \frac{1}{3}$ را نشان می‌دهد.

نقطه‌ی B، یکی $\frac{1}{3}$ واحد در سمت چپ مبدأ (سمت منفی محور) قرار دارد؛ پس عدد $-\frac{1}{3}$ را نشان می‌دهد.

نقطه‌ی C، ۷ تا $\frac{1}{3}$ واحد در سمت راست مبدأ قرار دارد؛ پس عدد $7 + \frac{1}{3}$ را نشان می‌دهد. باتوجه به این که نقطه‌ی

C، $\frac{1}{3}$ واحد در سمت راست عدد ۲ قرار دارد، می‌توانیم آنرا به شکل $2 + \frac{1}{3}$ نیز نشان دهیم.

نقطه‌ی D نیز عدد $-\frac{5}{3}$ یا $-1\frac{2}{3}$ را نشان می‌دهد.

به چنین اعدادی، اعداد گویا (مُنطق) می‌گوییم. بطور کلی هر عددی که بتوانیم آن را به شکل کسر نمایش دهیم، عددی گویاست. صورت و مخرج اعداد گویا، می‌توانند هر عدد صحیح باشند. البته می‌دانیم که مخرج هیچ کسری نمی‌تواند صفر باشد، چون تقسیم بر صفر بی‌معنی است. عددهای گویا را با حرف $\mathbb{Q}$ که حرف اول کلمه‌ی انگلیسی Quotient set است، نشان می‌دهند.

یادمون باشه

عددهای طبیعی، صحیح و اعشاری هم جزء اعداد گویا به حساب میان. همه‌ی عددهای زیر، عدد گویا هستند:

$$-\frac{3}{5}, +\frac{10}{7}, 2\frac{1}{3}, 3, 25, -9, 0, \sqrt{100}$$

می‌دونیم که:

$$3, 25 = \frac{325}{100}, -9 = \frac{-9}{1}, \sqrt{100} = 10 = \frac{10}{1}$$



مثال ۸

عددهای $2\frac{3}{5}$ و $+\frac{7}{5}$ را روی محور نمایش دهید.

ابتدا محور عددهای صحیح را رسم می‌کنیم و هر واحد آن را به ۵ قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم. عدد

$+\frac{7}{5}$ ، به اندازه‌ی ۷ واحد کوچک یک پنجمی در سمت راست صفر قرار دارد.

عدد $2\frac{3}{5}$ ، به اندازه‌ی ۳ واحد کوچک در سمت چپ عدد (۲-) قرار دارد.



$$-2\frac{3}{5} = -2 + (-\frac{3}{5})$$

یعنی هم ۲ واحد کامل به سمت منفی و هم ۳ تا واحد یک پنجمی به سمت منفی! در واقع، عدد $-2\frac{3}{5}$ همون عدد $-\frac{13}{5}$ هست؛ یعنی ۱۳ تا واحد یک پنجمی از مبدأ به سمت منفی. به همین ترتیب:

$$-5\frac{7}{9} = (-5) + (-\frac{7}{9}) = -\frac{52}{9}$$

قرینه‌ی یک عدد گویا:

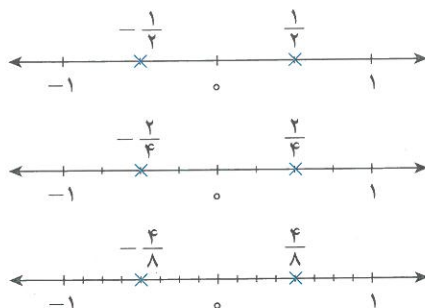
همانند قرینه‌ی یک عدد صحیح تعیین می‌شود؛ به عنوان مثال:

$$-\frac{3}{5} \xrightarrow{\text{قرینه}} +\frac{3}{5} \Rightarrow -(-\frac{3}{5}) = +\frac{3}{5}$$

$$+3\frac{2}{7} \xrightarrow{\text{قرینه}} -3\frac{2}{7} \Rightarrow -(+3\frac{2}{7}) = -3\frac{2}{7}$$

تساوی اعداد گویا

به محورهای زیر توجه کنید



در محور اول، عددهای گویای $+\frac{1}{2}$ و $-\frac{1}{2}$ نمایش داده شده‌اند.

در محور دوم، هریک از واحدهای کوچک رابه دو بخش مساوی تقسیم کردیم، در محور سوم همین کار را با واحدهای کوچک جدید انجام دادیم. عددهای گویای به‌دست آمده، همه یک نقطه را نشان می‌دهند، پس با هم برابرند. یعنی:

$$+\frac{1}{2} = +\frac{2}{4} = +\frac{4}{8} \qquad -\frac{1}{2} = -\frac{2}{4} = -\frac{4}{8}$$

یادمون باشه

برای به‌دست آوردن عددهای گویای مساوی پایه عدد گویای مشخص، کافیه هم صورت و هم مخرج اون عدد گویا رو در عددهای طبیعی بزرگ‌تر از یک ضرب کنیم؛ مثلاً:

$$-\frac{3}{7} = -\frac{6}{14} = -\frac{9}{21} = \dots$$



هم‌چنین می‌توانیم برای ساده کردن یه عدد گویا، هم صورت و هم مخرج اون رو بر یک عدد طبیعی بزرگ‌تر از یک تقسیم کنیم؛ مثلاً

$$\frac{15}{35} = \frac{3}{7} \quad \text{و} \quad \frac{66}{44} = \frac{3}{2}$$

Diagram showing the simplification of fractions by dividing numerator and denominator by a common factor. For 15/35, both are divided by 5 to get 3/7. For 66/44, both are divided by 22 to get 3/2.

یادمون نره که موقع ساده کردن، صورت و مخرج باید به شمارنده‌ی مشترک‌شون تقسیم بشن و اگه به بزرگ‌ترین شمارنده‌ی مشترک‌شون (ب.م.م) تقسیم بشن، خیلی سریع‌تر و در یک مرحله عدد گویا ساده می‌شه.

مقدار x را در هر تساوی به‌دست آورید.

مثال ۹

الف.

$$-\frac{8}{9} = -\frac{x}{36} \Rightarrow -\frac{8}{9} = -\frac{32}{36}$$

Diagram showing the simplification of the fraction 8/9 to 32/36 by multiplying both numerator and denominator by 4.

$$-\frac{4}{6} = -\frac{6}{x} \Rightarrow -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3} = -\frac{6}{9} \quad \text{یا} \quad \frac{6 \times 6}{4} = \frac{36}{4} = 9$$

ب.

بیشتر بدونیم



اگه صورت و مخرج کسری رو در عددی غیر صفر ضرب کنیم، مجموع و تفاضل (اختلاف) صورت و مخرج کسر هم در همون عدد ضرب می‌شه. مثلاً:

$$\frac{2}{5} = \frac{16}{40}$$

Diagram showing the simplification of the fraction 2/5 to 16/40 by multiplying both numerator and denominator by 8.

مجموع صورت و مخرج = $2 + 5 = 7$ $16 + 40 = 56$

تفاضل صورت و مخرج = $5 - 2 = 3$ $40 - 16 = 24$

کسری مساوی $\frac{3}{8}$ بنویسید که تفاضل (اختلاف) صورت و مخرج آن برابر ۴۵ باشد.

مثال ۱۰

کسر موردنظر: $\frac{3}{8} = \frac{27}{72}$

صورت	۳	(۲۷)
مخرج	۸	(۷۲)
اختلاف	۵	۴۵

Diagram showing the simplification of the fraction 3/8 to 27/72 by multiplying both numerator and denominator by 9.

$8 - 3 = 5$



علامت یک عدد گویا:

علامت یک عدد گویا را می‌توان قبل از خط کسری، در صورت کسر یا در مخرج آن قرار داد. زیرا:

$$-\frac{2}{3} = -(2 \div 3) = -2 \div 3 = \frac{-2}{3} \quad \text{و} \quad \frac{2}{-3} = 2 \div (-3)$$

البته بهتر است علامت را در مخرج قرار ندهیم و عددهایی را که دارای چند علامت هستند، به شکل ساده‌تر و با یک علامت بنویسیم. مثال:

$$-\left(\frac{-5}{-7}\right) = -\frac{5}{7}, \quad -\frac{-6}{5} = +\frac{6}{5}$$

ساده کردن عبارت‌های گویا:

برای ساده کردن عبارت‌های گویا، ابتدا علامت عبارت را تعیین می‌کنیم، سپس هریک از عددهای صورت را با یکی از عددهای مخرج در نظر گرفته و در صورت امکان هر دو را بر یک شمارنده‌ی مشترکشان (ترجیحاً ب.م.م) تقسیم کرده و جواب تقسیم را به جای عددهای قبلی می‌نویسیم. این کار را تا جایی ادامه می‌دهیم که عبارت، دیگر ساده‌تر نشود. در آخر، عددهای مانده در صورت را در هم ضرب می‌کنیم و عددهای مانده در مخرج را نیز در هم ضرب کرده و حاصل را به صورت یک کسر می‌نویسیم. مانند:

$$\frac{\cancel{(-10)}^1 \times \cancel{(+9)}^3 \times 11}{\cancel{15}^3 \times \cancel{(-8)}^4 \times (-7)} = -\frac{33}{28}$$

موقع ساده کردن، نمی‌تونیم عددهای صورت رو با هم یا عددهای مخرج رو با هم ساده کنیم. ضمناً فقط وقتی اجازه‌ی ساده کردن داریم که در صورت و مخرج فقط یه عدد باشه یا اگه تعداد عددها بیش‌تره، بین اون‌ها علامت ضرب باشه. بنابراین ساده کردن عبارت زیر اشتباهه:

$$\frac{3 + \cancel{5}^1}{4 \times \cancel{5}^1} = \frac{3}{4} \xrightarrow{\text{روش درست}} \frac{3 + 5}{4 \times 5} = \frac{\cancel{8}^2}{4 \times 5} = \frac{2}{5}$$



اشتباه
نکنیم

یه مطلب جالب

می‌گن «زبل فان» که ساده کردن کسرها رو فوب یاد نگرفته بود، چند تا کسر رو این‌موری ساده کرد:

$$\frac{26}{65} = \frac{2}{5}; \quad \frac{19}{95} = \frac{1}{5}; \quad \frac{16}{64} = \frac{1}{4}; \quad \frac{48}{98} = 48$$

به نظر شما جواب‌های زبل فان درستن یا غلط! می‌تونید امتحان کنید!!



معرفی یک نماد جدید:

پیش از این با نمادهای $<$ و $>$ آشنا شده‌ایم.

$x < 1$ یعنی همه‌ی عددهای کوچک‌تر از یک

$x > 1$ یعنی همه‌ی عددهای بزرگ‌تر از یک

$x \leq 1$ یعنی همه‌ی عددهای کوچک‌تر از یک یا مساوی با آن؛ پس:

$$1 \leq 1, 0 \leq 1$$

$x \geq 1$ یعنی همه‌ی عددهای بزرگ‌تر از یک یا مساوی با آن؛ پس:

$$2 \geq 2, 2 \leq 1$$

$-3 < x < 2$ یعنی همه‌ی عددهای بین -3 و 2 . (خود -3 و 2 جزء این اعداد نیستند.)

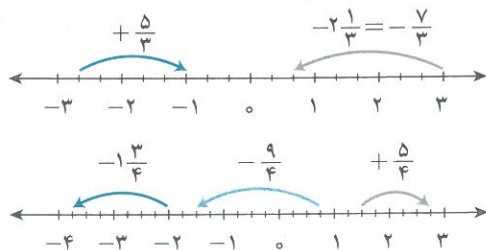
$-3 \leq x < 2$ یعنی همه‌ی عددهای بین -3 و 2 به همراه خود عدد (-3) .

$-3 < x \leq 2$ یعنی همه‌ی عددهای بین -3 و 2 به همراه خود عدد (2) .

$-3 \leq x \leq 2$ یعنی همه‌ی عددهای بین -3 و 2 ، به همراه خود عددهای 2 و -3 .

درس سوم: جمع و تفریق اعداد گویا

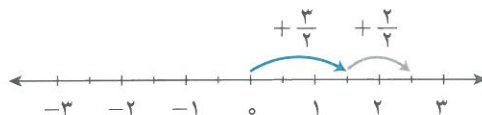
ممکن است بعضی از حرکت‌هایی که روی محور انجام می‌شوند، عدد صحیحی را نشان ندهند، مانند:



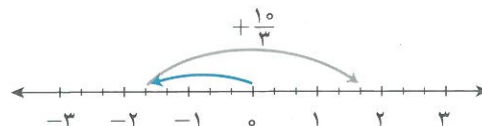
در چنین مواردی، عددی که مخرج قرار می‌گیرد، نشان دهنده‌ی این است که هر واحد از محور، به چند قسمت مساوی تقسیم شده است و عدد صورت، نشان دهنده‌ی تعداد واحدهای کوچکی است که به اندازه‌ی آن‌ها حرکت کرده‌ایم. علامت پشت عدد نیز نشان دهنده‌ی جهت حرکت است. همان‌طور که در محورهای بالا می‌بینید، بعضی از حرکت‌ها را می‌توانیم به صورت عدد مخلوط نشان دهیم. مانند: $-1 \frac{3}{4} = -\frac{7}{4}$

به این ترتیب، می‌توانیم برای هر دو حرکت انجام شده روی محور که پشت سر هم باشند، یک جمع با عددهای گویا بنویسیم. به نمونه‌های زیر توجه کنید: (به تقسیم‌بندی واحدها دقت کنید)

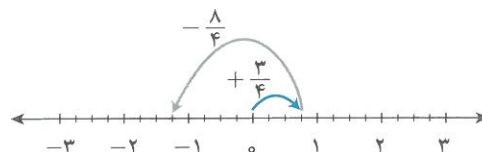
$$\left(+\frac{3}{2}\right) + \left(+\frac{2}{2}\right) = \left(+\frac{5}{2}\right)$$



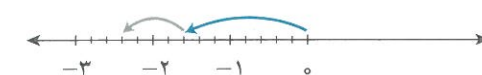
$$\left(-\frac{5}{3}\right) + \left(+\frac{1}{3}\right) = \left(+\frac{4}{3}\right)$$



$$\left(+\frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{8}{4}\right) = \left(-\frac{5}{4}\right)$$



$$\left(-\frac{8}{5}\right) + \left(-\frac{4}{5}\right) = \left(-\frac{12}{5}\right)$$



جمع متناظر با آخرین محور را می‌توانیم به صورت مقابل نیز بنویسیم:

$$\left(-1 \frac{3}{5}\right) + \left(-\frac{4}{5}\right) = \left(-2 \frac{2}{5}\right)$$

در اعداد گویا نیز همانند عددهای صحیح، تفریق باید به جمع تبدیل شود، مانند:

$$-\frac{5}{6} - \frac{1}{6} = \left(-\frac{5}{6}\right) + \left(-\frac{1}{6}\right)$$

$$-0,3 - (-0,75) = -0,3 + 0,75$$

همان‌طور که مشاهده کردید، ابتدا عدد گویای اول را می‌نویسیم، سپس عدد گویای دوم را قرینه می‌کنیم. برای محاسبه‌ی حاصل جمع و تفریق دو عدد گویا، گاهی از تقریب زدن استفاده می‌کنیم. معمولاً در چنین مواقعی



برای افزایش سرعت محاسبه، از روش گرد کردن با تقریب کم تر از یک استفاده می‌کنیم. مثال:

$$-\frac{2}{9} + \frac{1}{15} - \frac{2}{19} \approx -\frac{2}{10} + \frac{1}{15} - \frac{2}{20} = -\frac{4}{10} = -\frac{2}{5}$$

$$18,8 - (-12,05) - 16,79 \approx \underbrace{19 + 12 - 17}_{31} = 14$$

در جمع و تفریق دو یا چند عدد گویا با مخرج‌های مساوی، فقط یکی از مخرج‌ها را می‌نویسیم و صورت‌ها را با هم جمع یا تفریق می‌کنیم:

$$\frac{3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{3+2}{7} = \frac{5}{7}$$

$$\frac{15}{11} - \frac{5}{11} + \frac{2}{11} = \frac{15-5+2}{11} = \frac{12}{11}$$

$$\left(-\frac{4}{13}\right) + \left(-\frac{5}{13}\right) - \left(-\frac{7}{13}\right) = \frac{-4-5+7}{13} = \frac{-2}{13}$$

(به علامت‌های قرار گرفته بین عددهای گویا در عبارت سمت چپ و در عبارت وسط توجه کنید.)
به‌طور کلی، در جمع و تفریق اعداد گویا مانند جمع و تفریق کسرها عمل می‌کنیم؛ یعنی در ابتدا و در صورت نیاز، مخرج مشترک می‌گیریم، سپس با توجه به ویژگی‌های کسرهای مساوی، کسرهایی مساوی با کسرهای اولیه می‌نویسیم که مخرجشان با هم برابر باشد. سپس صورت‌ها را جمع یا تفریق کرده و اگر لازم بود جواب را ساده می‌کنیم.

یادمون باشه



بهترین روش برای پیدا کردن مخرج مشترک بین عددهای گویا، استفاده از ک.م.م مخرج‌هاست. همان‌طور که سال‌های قبل خواندیم:

- اگر مخرج‌ها عدد اول باشند، یا دو عدد متوالی (پشت‌سرهم)؛ ک.م.م اون‌ها برابر با حاصل‌ضربشان می‌شه. (کلاً هر وقت مخرج‌ها هیچ شمارنده‌ی اول مشترکی نداشته باشند، همین کار رو انجام می‌دیم.)
- اگر یکی از مخرج‌ها بر دیگری بخش پذیر باشه؛ ک.م.م اون‌ها می‌شه عدد بزرگ‌تر.
- اگر هیچ‌کدوم از حالت‌های بالا پیش نیومد، می‌تونیم مضرب‌های طبیعی یکی از مخرج‌ها (ترجیحاً عدد بزرگ‌تر) رو یکی یکی حساب کنیم تا به اولین مضرب پرسیم که بر مخرج دیگه بخش پذیر باشه. مثلاً بین ۱۵ و ۲۰، می‌تونیم ۲۰ رو انتخاب کنیم و مضرب‌هایش رو حساب کنیم:

بر ۱۵ بخش پذیر نیست → خود ۲۰ → اولین مضرب طبیعی ۲۰

بر ۱۵ بخش پذیر نیست → ۴۰ → دومین مضرب طبیعی ۲۰

بر ۱۵ بخش پذیره → ۶۰ → سومین مضرب طبیعی ۲۰

پس ک.م.م ۲۰ و ۱۵ می‌شه ۶۰: $[20, 15] = 60$



به نمونه‌های زیر توجه کنید:

الف.

$$\frac{3}{5} + (-\frac{2}{7}) = \frac{21}{35} + (-\frac{10}{35}) = \frac{21-10}{35} = \frac{11}{35}$$

$$(\frac{3 \times 7}{5 \times 7} = \frac{21}{35}, \quad \frac{2 \times 5}{7 \times 5} = \frac{10}{35})$$

ب.

$$(-\frac{4}{9}) - (-\frac{2}{3}) = (-\frac{4}{9}) + (+\frac{6}{9}) = \frac{-4+6}{9} = \frac{+2}{9}$$

$$\frac{2 \times 3}{3 \times 3} = \frac{6}{9}$$

ج.

$$(\frac{3}{12}) - (+\frac{2}{18}) = \frac{3 \times 3}{12 \times 3} + (-\frac{2 \times 2}{18 \times 2}) = \frac{9-4}{36} = \frac{5}{36}, \quad [12, 18] = 36$$

د.

$$(+\frac{3}{4}) + (-\frac{5}{8}) - (+\frac{7}{12}) = \frac{3 \times 3}{4 \times 6} - \frac{5 \times 3}{8 \times 3} - \frac{7 \times 2}{12 \times 2}$$

$$= \frac{18-15-14}{24} = -\frac{11}{24}$$

$$24 = [4, 8, 12] \text{ ک.م.م مخرج‌ها}$$

ه.

$$5 + (-\frac{2}{3}) = \frac{5 \times 3}{1 \times 3} - \frac{2}{3} = \frac{15-2}{3} = \frac{13}{3}$$

روش دوم:

$$5 + (-\frac{2}{3}) = 4\frac{3}{3} - \frac{2}{3} = 4\frac{1}{3} \rightarrow \frac{13}{3} = 4\frac{1}{3}$$

و.

$$-5 - (+\frac{2}{3}) = \frac{-5 \times 3}{1 \times 3} - \frac{2}{3} = \frac{-15-2}{3} = \frac{-17}{3}$$

روش دوم:

$$-5 - (+\frac{2}{3}) = -5 - \frac{2}{3} = -5\frac{2}{3} \rightarrow -\frac{17}{3} = -5\frac{2}{3}$$

ز.

$$-4\frac{2}{3} - (-3\frac{1}{5}) = -\frac{14 \times 5}{3 \times 5} + \frac{16 \times 3}{5 \times 3} = \frac{-70+48}{15} = \frac{-22}{15}$$

$$-4\frac{2}{3} = -\frac{14}{3}, \quad -(-3\frac{1}{5}) = +\frac{16}{5}$$

جمع و تفریق عددهای اعشاری و روش تعیین علامت جواب، مانند جمع و تفریق عددهای صحیح است.

البته باید دقت کنیم که در عددهای اعشاری باید هر رقم با رقم هم‌ارزش خود جمع و تفریق شود؛ بنابراین باید

ممیزها زیر هم قرار بگیرند. مثال:

$$\begin{array}{r} 6 \quad 13 \\ \times \quad 3 \\ \hline -2,5 + 7,3 \Rightarrow -2,5 \Rightarrow -2,5 + 7,3 = +4,8 \\ \hline 4,8 \end{array}$$

الف.



$$\begin{array}{r} 13,60 \\ -13,6 - 4,23 \Rightarrow \frac{+4,23}{17,83} \Rightarrow -13,6 - 4,23 = -17,83 \end{array}$$

ب.

همچنین می‌توانیم عددهای اعشاری را به کسرهای علامت‌دار تبدیل کنیم، سپس حاصل را به دست آوریم.

$$-2,5 + 7,3 = -\frac{25}{10} + \frac{73}{10} = +\frac{48}{10} = +4,8$$

الف.

مثال ۱۱

ب.

$$\begin{aligned} -13,6 - 4,23 &= \frac{-136}{10} - \frac{423}{100} = \frac{-1360 - 423}{100} \\ &= \frac{-1783}{100} = -17,83 \end{aligned}$$



درس چهارم: ضرب و تقسیم عددهای گویا

در ضرب و تقسیم عددهای گویا، ابتدا علامت حاصل ضرب یا تقسیم را (مانند اعداد صحیح) تعیین می‌کنیم، سپس حاصل را مانند کسرهای بدون علامت به دست می‌آوریم.

جدول تعیین علامت:

$\div$ یا $\times$	+	-
+	+	-
-	-	+

یادمون باشه



خلاصه جدول بالا این جوریه می‌شه:

حاصل ضرب یا تقسیم دو عدد هم علامت، می‌شه مثبت.

حاصل ضرب یا تقسیم دو عدد غیر هم علامت (مختلف‌العلامت)، می‌شه منفی.

* اگر تعداد علامت‌ها پیش‌تر از دو تا بود، می‌تونیم دوتای اولی رو با هم حساب کنیم و جوابش رو با سومی و همین‌طور پیش ببریم؛ به راه دیگه‌ش هم این‌که تعداد منفی‌ها (دقت کنید فقط منفی‌ها) رو بشمریم؛ اگر تعدادشون فرد بود، جواب می‌شه منفی و اگر تعدادشون زوج بود، جواب می‌شه مثبت.

روش اول:

$$\underbrace{\left(-\frac{1}{3}\right)}_{\text{منفی}} \times \underbrace{\left(+\frac{2}{5}\right)}_{\text{منفی}} \times \underbrace{\left(-\frac{4}{7}\right)}_{\text{منفی}} = \text{مثبت} = \text{منفی} \times \text{منفی}$$

روش دوم: علامت جواب مثبت می‌شه $\Rightarrow 2$ زوج $\rightarrow 2 = \text{تعداد منفی‌ها}$

ضرب عددهای گویا

هنگام ضرب عددهای گویا، بعد از تعیین علامت حاصل، باید کسرها را تا حد امکان ساده کنیم و بعد صورت‌ها را در هم و مخرج‌ها را در هم ضرب کنیم.

صورت هر کسر رو می‌شه با مخرج همون کسر یا مخرج بقیه‌ی کسرها ساده کرد؛ اما نباید صورت یک کسر رو با صورت کسر دیگه یا مخرج یک کسر رو با مخرج کسر دیگه ساده کنیم. ضمناً مواسمون باشه که عدد صورت به هرچی تقسیم شد، عدد مخرج هم باید به همون تقسیم بشه!

استباه
نکنیم

الف.

مثال ۱۲

$$\left(-\frac{1}{\cancel{3}}\right) \times \left(+\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\right) = -\frac{2}{3}$$



$$(-\frac{8}{9}) \times (+\frac{12}{20}) \times (-\frac{15}{16}) = +\frac{\cancel{8} \times \cancel{12} \times \cancel{15}}{\cancel{9} \times \cancel{20} \times \cancel{16}} = +\frac{1}{2} \quad \text{ب.}$$

(همان‌طور که در قسمت «ب» می‌بینید، می‌شه مراحل ساده کردن رو روی یک کسر انجام بدیم.)

$$(-\frac{4}{15}) \times (-\frac{5}{6}) \times (-\frac{9}{7}) = -\frac{\cancel{4} \times \cancel{5} \times \cancel{9}}{\cancel{15} \times \cancel{6} \times 7} = -\frac{2}{7} \quad \text{ج.}$$

$$\frac{(-\frac{5}{20}) \times (+\frac{14}{15})}{(-\frac{20}{15}) \times (-\frac{35}{20})} = -\frac{1}{2} \quad \text{د.}$$

تعداد منفی‌ها، فرد بود

یادمون باشه

قبل از انجام ضرب، اگه عدد مخلوط داشتیم، باید به کسر تبدیل کنیم، مثلاً:

$$(-2\frac{1}{3}) \times (+\frac{6}{5}) = -\frac{7}{3} \times \frac{6}{5} = -\frac{14}{5} = -2\frac{4}{5}$$



مواسمون باشه که موقعی اجازه‌ی ساده کردن داریم که علامت بین عددها، «ضرب» باشه. اگه حتی یکی از علامت‌ها چیزی غیر از «ضرب» باشه، باید هر کدوم از صورت و مخرج رو که بین عددها علامت دیگه‌ای قرار داده جدا مساب کنیم و بعد حاصل عبارت اصلی رو به دست بیاریم. مثلاً:

$$\frac{(-18) + (-15)}{(-6) - (-5)} = \frac{-18 - 15}{-6 + 5} = \frac{-33}{-1} = +33$$

$$\frac{12 \times (-9)}{6 - 15} = \frac{12 \times (-9)}{-9} = +\frac{12}{1} = 12$$

در ضرب عددهای گویای اعشاری، بعد از تعیین علامت، می‌توانیم دو عدد را بدون در نظر گرفتن ممیزها ضرب کنیم، سپس به تعداد کل رقم‌های اعشاری دو عدد، از سمت راست جواب شمرده و ممیز می‌زنیم.

مثال ۱۳

$$(-2,5) \times (+0,03) \rightarrow 25 \times 3 = 75$$

$$\Rightarrow (-2,5) \times (+0,03) = -0,075$$

۳ رقم اعشار ۲ رقم اعشار ۱ رقم اعشار

$$(-0,75) \times (-0,24) \rightarrow 75 \times 24 = 1800$$



$$\Rightarrow (-0,75) \times (-0,24) = (+0,1800) = 0,18$$

۲ رقم اعشار ۲ رقم اعشار ۴ رقم اعشار

* ضرب عددهای اعشاری را می‌توانیم با تبدیل به کسر نیز انجام دهیم.

مثال ۱۴

$$\begin{aligned} (-2,5) \times (+0,3) &= \left(-\frac{25}{10}\right) \times \left(+\frac{3}{100}\right) = \frac{-75}{1000} = -0,075 \\ (-0,75) \times (-0,24) &= \left(-\frac{75}{100}\right) \times \left(-\frac{24}{100}\right) = +\frac{1800}{10000} \\ &= +\frac{18}{100} = 0,18 \end{aligned}$$

همان‌طور که ملاحظه کردید، برای این که حاصل را راحت‌تر به عدد اعشاری تبدیل کنیم، کسرها را ساده نکردیم.

معکوس یک عدد گویا:

معکوس، یعنی «برعکس شده». معکوس یک عدد گویا، عددی گویا است که جای صورت و مخرج آن عوض شده است. مانند:

$$-\frac{3}{5} \xrightarrow{\text{معکوس}} -\frac{5}{3} \quad +9 = +\frac{9}{1} \xrightarrow{\text{معکوس}} +\frac{1}{9}$$

وقتی یک کسر معکوس می‌شود، فقط جای صورت و مخرجش عوض می‌شود و علامتش تغییر نمی‌کند!

اشتباه نکنیم

یادمون باشه

• عددهای مخلوط باید اول به کسر تبدیل بشن، بعد معکوس شن؛ مثلاً:

$$-2\frac{5}{7} = -\frac{19}{7} \xrightarrow{\text{معکوس}} -\frac{7}{19}$$

• معکوس عدد «یک» می‌شه: خود یک.

معکوس (-1) هم می‌شه: خود (-1) .



عدد «صفر» معکوس ندارد، چون تقسیم بر صفر بی‌معنی:

$$0 = \frac{0}{1} \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{1}{0} \quad (\text{تعریف نشده}) \text{ بی‌معنی}$$

اشتباه نکنیم



یادمون باشه

حاصل ضرب هر عدد غیر صفر در معکوسش می‌شه: «یک». مثلاً:

$$\left(-\frac{8}{9}\right) \times \left(-\frac{9}{8}\right) = +1$$



مثال ۱۵

قرینه‌ی معکوس عدد $\left(-\frac{6}{11}\right)$ را به دست آورید.

$$-\frac{6}{11} \xrightarrow{\text{معکوس}} -\frac{11}{6} \xrightarrow{\text{قرینه}} +\frac{11}{6}$$

یادمون باشه

معکوس معکوس هر عدد گویای غیر صفر، می‌شه: «خود اون عدد»

$$-\frac{3}{7} \xrightarrow{\text{معکوس}} -\frac{7}{3} \xrightarrow{\text{معکوس}} -\frac{3}{7}$$



مثال ۱۶

به جدول زیر توجه کنید. این جدول برای عدد $+\frac{2}{5}$ رسم شده است:

قرینه	معکوس	قرینه‌ی معکوس	معکوس قرینه	قرینه‌ی قرینه	معکوس معکوس
$-\frac{2}{5}$	$+\frac{5}{2}$	$-\frac{5}{2}$	$+\frac{2}{5}$	$+\frac{2}{5}$	$+\frac{2}{5}$

تقسیم عددهای گویا:

در تقسیم عددهای گویا، ابتدا علامت حاصل را تعیین می‌کنیم؛ سپس کسر اول را نوشته، به جای علامت تقسیم، علامت ضرب قرار می‌دهیم و کسر دوم را معکوس می‌کنیم و حاصل ضرب را مانند قبل به دست می‌آوریم.

یادمون باشه

به طور خلاصه: در تقسیم عددهای گویا، کسر اولی رو در معکوس کسر دومی ضرب می‌کنیم. (تعیین علامت فراموش نشه‌ها!)



مثال ۱۷

$$\left(+\frac{9}{8}\right) \div \left(-\frac{3}{12}\right) = -\left(\frac{9}{8} \times \frac{12}{3}\right) = -\frac{9}{2}$$



$$\left(-\frac{15}{7}\right) \div \left(-\frac{25}{14}\right) = +\left(\frac{\cancel{15}^3}{7} \times \frac{\cancel{14}_7}{\cancel{25}_5}\right) = +\frac{6}{5}$$

یادمون باشه



● اگر به عدد گویای غیر صفر بر خودش تقسیم بشه، جواب می‌شه: «یک»

$$\left(-\frac{2}{8}\right) \div \left(-\frac{2}{8}\right) = 1 \quad \text{مثلاً:}$$

● اگر یک عدد گویا بر عدد یک تقسیم بشه، جواب می‌شه: «خود اون عدد»

$$\left(-\frac{3}{4}\right) \div 1 = -\frac{3}{4} \quad \text{مثلاً:}$$

● اگر عدد «یک» بر به عدد گویای غیر صفر تقسیم بشه، جواب می‌شه: «معکوس اون عدد»

$$1 \div \left(+\frac{9}{13}\right) = \frac{13}{9} \quad \text{مثلاً:}$$

● مثل ضرب، در تقسیم هم اگر عدد مخلوط داشتیم، قبل از انجام تقسیم باید به کسر تبدیلش کنیم.

مثال ۱۸

$$\left(-3\frac{1}{5}\right) \div \left(+\frac{2}{3}\right) = -\left(\frac{\cancel{16}^4}{5} \times \frac{3}{\cancel{2}_1}\right) = -\frac{24}{5} = -4\frac{4}{5}$$

$$\frac{17}{15} \div \left(-3\frac{1}{2}\right) = \frac{17}{15} \div \left(-\frac{7}{2}\right) = -\left(\frac{\cancel{17}_1}{15} \times \frac{2}{\cancel{7}_7}\right) = -\frac{2}{15}$$

یادمون باشه



موقع حساب کردن جواب عبارت‌های گویا، باید اولویت و ترتیب انجام عمل ریاضی رو رعایت کنیم.

مثال ۱۹

الف.

$$\left[\frac{1}{14} - \frac{4}{21}\right] \times \left(-\frac{42}{25}\right) =$$

ب.

$$\left(+1\frac{2}{3}\right) \div \left[-\frac{6}{8} - \left(-\frac{4}{6}\right)\right] =$$

پاسخ:

الف.

$$\left[\frac{1}{14} - \frac{4}{21}\right] \times \left(-\frac{42}{25}\right) =$$

$$\frac{1}{14} - \frac{4}{21} = \frac{3}{42} - \frac{8}{42} = \frac{-5}{42}$$

حاصل عبارت داخل کروشه:



$$\left(-\frac{5}{42}\right) \times \left(-\frac{42}{50}\right) = +\frac{1}{5}$$

حاصل عبارت اصلی:

ب.

$$\left(+1\frac{2}{3}\right) \div \left[-\frac{6}{8} - \left(-\frac{4}{6}\right)\right] =$$

تبدیل عدد مخلوط به کسر:

$$+1\frac{2}{3} = +\frac{5}{3}$$

حاصل عبارت داخل کروشه:

$$-\frac{6}{8} - \left(-\frac{4}{6}\right) = \frac{-18 + 16}{24} = \frac{-2}{24} = -\frac{1}{12}$$

حاصل عبارت اصلی:

$$\left(+\frac{5}{3}\right) \div \left(-\frac{1}{12}\right) = -\left(\frac{5}{3} \times \frac{12}{1}\right) = -20$$

در عبارت‌هایی مثل قسمت «ب»، وقتی می‌خواهیم حاصل عبارت اصلی رو پیدا کنیم، باید دقت کنیم که از چپ به راست عمل بشه! یعنی عدد گویای سمت چپ رو به حاصل گروه تقسیم کنیم، نه برعکس!!
یه مثال دیگه رو با هم می‌بینیم:

$$(-15) \div \left(\frac{17}{3} - \frac{5}{3}\right) = (-15) \div (+4) = -\frac{15}{4} = -3\frac{3}{4}$$

$\frac{17}{3} - \frac{5}{3} = 4$

همیشه می‌توانیم به جای علامت تقسیم، از خط کسری استفاده کنیم و یا برعکس، یک بار دیگر مراحل میانی مثال بالا را نگاه کنید و سپس به نمونه‌های زیر توجه کنید.

حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

مثال ۲۰

$$\frac{-\frac{2}{7}}{\frac{3}{14}} =$$

الف.

$$\frac{\frac{2}{4} - \frac{2}{3}}{\frac{1}{12} - \frac{1}{2}} =$$

ب.

پاسخ:

$$\frac{-\frac{2}{7}}{\frac{3}{14}} = \left(-\frac{2}{7}\right) \div \left(+\frac{3}{14}\right) = -\left(\frac{2}{7} \times \frac{14}{3}\right) = -\frac{4}{3}$$

الف.

ب.

$$\frac{\frac{2}{4} - \frac{2}{3}}{\frac{1}{12} - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{3-8}{12}}{\frac{1-6}{12}} = \frac{-\frac{5}{12}}{-\frac{5}{12}} = 1 \div \left(-\frac{5}{12}\right) = -\left(\frac{1}{1} \times \frac{12}{5}\right) = -\frac{12}{5}$$



در قسمت «ب» از مثال بالا، می‌توانیم از راهبرد «زیر مسئله» استفاده کنیم و ابتدا حاصل عبارت موجود در صورت را به دست آوریم، سپس حاصل عبارت مخرج را. پس از آن حاصل کسر اصلی را حساب می‌کنیم. حاصل قسمت «الف» را می‌توانیم با استفاده از رابطه‌ی زیر به دست آوریم:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \times d}{b \times c} \Rightarrow \frac{-\frac{2}{5}}{\frac{3}{14}} = -\frac{2 \times 14}{3 \times 5} = -\frac{4}{3}$$

به این ترتیب عددهایی که از هم دورتر هستند در هم ضرب شده و در صورت حاصل نوشته می‌شوند و حاصل ضرب عددهایی که به هم نزدیک‌ترند در مخرج نوشته می‌شود: (دور در دور ← صورت؛ نزدیک در نزدیک ← مخرج)
در چنین کسرهایی گاهی لازم است به عددهایی که مخرج ندارند، مخرج «یک» بدهیم.

مثال ۲۱

حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$\text{الف. } \frac{3}{2} = \quad \text{ب. } \frac{5}{2} = \quad \text{ج. } \frac{3}{\frac{2}{5}} =$$

پاسخ:

$$\frac{3}{2} = \frac{3}{2} = \frac{3 \times 1}{2 \times 1} = \frac{3}{2}$$

الف.

$$\frac{5}{2} = \frac{5}{2} = \frac{5 \times 5}{2 \times 5} = \frac{25}{10}$$

ب.

$$\frac{3}{\frac{2}{5}} = \frac{3}{\frac{2}{5}} = \frac{3}{\frac{2}{5}} = \frac{3 \times 5}{2 \times 1} = \frac{15}{2}$$

ج.

تقسیم عددهای اعشاری را نیز می‌توانیم با تبدیل به کسر انجام دهیم.

مثال ۲۲

$$(-2,4) \div 1,2 =$$

الف.

$$(-0,8) \div (-0,002) =$$

ب.

پاسخ:

$$(-2,4) \div 1,2 = (-\frac{24}{10}) \div \frac{12}{10} = -\frac{24}{10} \times \frac{10}{12} = -\frac{2}{1} = -2$$

الف.

$$(-0,8) \div (-0,002) = (-\frac{8}{10}) \div (-\frac{2}{1000}) = +(\frac{8}{10} \times \frac{1000}{2}) = +400$$

ب.



بیشتر بدونیم



گاهی در تقسیم دو کسر علامت دارد، صورت اولی بر صورت دومی بخش پذیر؛ مخرج اولی هم بر مخرج دومی بخش پذیر. این جور وقتا می‌تونیم برای بالا بردن سرعت محاسبه، صورت‌ها رو بر هم تقسیم کنیم و مخرج‌ها رو بر هم و بعد اگه لازم بود جواب رو ساده کنیم. مثلاً

$$\left(+\frac{49}{24}\right) \div \left(-\frac{7}{12}\right) = -\frac{49 \div 7}{24 \div 12} = -\frac{7}{2}$$

اگر فواستیم از روش بالا استفاده کنیم باید مواسمون باشه اشتباهاتی مثل این رو انجام ندیم:

$$\frac{2}{15} \div \frac{6}{5} = \frac{3}{3} = 1$$

اشتباه
نکنیم

اینجا چون ۲ بر ۶ بخش پذیر نیست، نمی‌شه از روش بالا استفاده کرد و روش درستش این جوریه:

$$\frac{2}{15} \div \frac{6}{5} = \frac{2}{15} \times \frac{5}{6} = \frac{1}{9}$$

یعنی همون اولی ضرب در معکوس دومی!

بیشتر بدونیم



عبارت‌ها و تساوی‌هایی که اینجا می‌بینین، خیلی وقتا به درد می‌خورن؛ سعی کنین اونا رو حفظ کنین:

$$\frac{1}{2} = 0,5$$

$$\frac{1}{3} \approx 0,33$$

$$\frac{1}{4} = 0,25$$

$$\frac{1}{5} = 0,2$$

$$\frac{1}{8} = 0,125$$

$$\frac{2}{3} \approx 0,66$$

$$\frac{3}{4} = 0,75$$

$$\frac{2}{5} = 0,4$$

$$\frac{3}{8} = 0,375$$

$$\frac{3}{5} = 0,6$$

$$\frac{5}{8} = 0,625$$

$$\frac{4}{5} = 0,8$$

$$\frac{7}{8} = 0,875$$

تساوی‌های زیر رو با دقت ببینین:

$$\frac{1}{7} \approx 0,142857$$

$$\frac{3}{7} \approx 0,428571$$

$$\frac{5}{7} \approx 0,714285$$

$$\frac{2}{7} \approx 0,285714$$

$$\frac{4}{7} \approx 0,571428$$

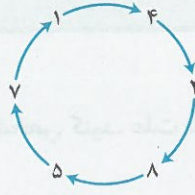
$$\frac{6}{7} \approx 0,857142$$

یه مطلب جالب



فصل ۱. عددهای صحیح و گویا

رقم‌های اعشاری مهمی این عددها دقیقاً مثل همه و متی ترتیب شون هم یه جوره!
ملقه‌ی زیر، این ترتیب رو بهتر نشون می‌ده:



$\frac{1}{7}$ از یک شروع شده، $\frac{2}{7}$ از $\frac{1}{7}$ ، $\frac{3}{7}$ از $\frac{2}{7}$ ، $\frac{4}{7}$ از $\frac{3}{7}$ ، $\frac{5}{7}$ از $\frac{4}{7}$ ، $\frac{6}{7}$ از $\frac{5}{7}$ ، $\frac{7}{7}$ از $\frac{6}{7}$.