ریاضی عمومی (۱) ادامه‌ی اعداد مختلط

رابطه‌ی اویلر :

$$e^{i\theta} = cis(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$$

۱ـ رابطه $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$ موسوم به رابطه‌ی دموآور است، آن را اثبات کنید.

طرفین را به توان n می‌رسانیم ←

$$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$$

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (e^{i\theta})^n$$

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = e^{in\theta}$$

$$e^{in\theta} = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

so ← $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

۲- نشان دهید:

$$\left(\frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}\right)^n = \frac{1+i\tan n\theta}{1-i\tan n\theta}$$

$$\text{سمت چپ} = \left(\frac{1+i\,tg\,\theta}{1-i\,tg\,\theta}\right)^n = \left(\frac{1+i\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1-i\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}\right)^n$$

$$= \left(\frac{\frac{\cos\theta+i\sin\theta}{\cos\theta}}{\frac{\cos\theta-i\sin\theta}{\cos\theta}}\right)^n = \left(\frac{\cos\theta+i\sin\theta}{\cos\theta-i\sin\theta}\right)^n$$

$$= \left(\frac{\cos\theta+i\sin\theta}{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)}\right)^n = \frac{(\cos\theta+i\sin\theta)^n}{(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))^n}$$

$$= \frac{\cos n\theta+i\sin n\theta}{\cos(-n\theta)+i\sin(-n\theta)} = \frac{\cos n\theta+i\sin n\theta}{\cos n\theta-i\sin n\theta}$$

$$\xrightarrow[\times\frac{1}{\cos n\theta}]{\times\frac{1}{\cos n\theta}} \frac{1+i\frac{\sin n\theta}{\cos n\theta}}{1-i\frac{\sin n\theta}{\cos n\theta}} = \frac{1+i\,tg\,n\theta}{1-i\,tg\,n\theta} = \text{سمت راست}$$

mahyar esmaeilpour

۳- ثابت کنید :

$$(1+\cos\alpha+i\sin\alpha)^n = 2^n\cos^n\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{n\alpha}{2}\right)+i\sin\left(\frac{n\alpha}{2}\right)\right)$$

با توجه به
$$\begin{cases} 1+\cos\alpha = 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ \sin\alpha = 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{cases}$$

سمت چپ $\left(2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)+2i\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^n =$

$$=\left(2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)\right)^n =$$

$$= 2^n\cos^n\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^n =$$

$= 2^n\cos^n\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{n\alpha}{2}\right)+i\sin\left(\frac{n\alpha}{2}\right)\right) =$ سمت راست

@mathyar

۴- درستی تساوی زیر را اثبات کنید:

$$(1+\cos\alpha+i\sin\alpha)^n+(1+\cos\alpha-i\sin\alpha)^n=$$

$$2^{n+1}\cos^n\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{n\alpha}{2}\right)$$

سمت چپ $\left(\cancel{1}+2\cos^2\frac{\alpha}{2}\cancel{-1}+i\,2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right)^n+\left(\cancel{1}+2\cos^2\frac{\alpha}{2}\cancel{-1}-i\,2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\right)^n$

$$=\left(2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+i\sin\frac{\alpha}{2}\right)\right)^n+\left(2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}-i\sin\frac{\alpha}{2}\right)\right)^n$$

$$=2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{n\alpha}{2}+i\sin\frac{n\alpha}{2}\right)+2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}-i\sin\frac{\alpha}{2}\right)^n$$

$$=2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{n\alpha}{2}+i\sin\frac{n\alpha}{2}\right)+2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}\left(\cos\left(\frac{-\alpha}{2}\right)+i\sin\left(\frac{-\alpha}{2}\right)\right)^n$$

$$2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{n\alpha}{2}\cancel{+i\sin\frac{n\alpha}{2}}+\cos\frac{n\alpha}{2}\cancel{-i\sin\frac{n\alpha}{2}}\right)$$

$$2^n\cos^n\left(\frac{\alpha}{2}\right)\times2\cos\left(\frac{n\alpha}{2}\right)=2^{n+1}\cos^n\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{n\alpha}{2}\right)$$

= سمت راست

mahyar esmaeilpour

۵- تساوی زیر را اثبات کنید.

$$(1+\cos\alpha+i\sin\alpha)^{100}=2^{100}\cos^{100}\left(\frac{\alpha}{2}\right).\left(\cos(50\alpha)+i\sin(50\alpha)\right)$$

سمت چپ $=\left(1+2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1+i\sin\alpha\right)^{100}=\left(2\cos^2\frac{\alpha}{2}+i\,2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right)^{100}$

$$\left(2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+i\sin\frac{\alpha}{2}\right)\right)^{100}=2^{100}\cos^{100}\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+i\sin\frac{\alpha}{2}\right)^{100}$$

$=2^{100}\cos^{100}\left(\frac{\alpha}{2}\right).\left(\cos 50\alpha+i\sin 50\alpha\right)=$ سمت راست.

۶- حاصل $(1+\cos 2+i\sin 2)^n$ را بدست آورید.

$$\left(\cancel{1}+2\cos^2(1)\cancel{-1}+i\,2\sin(1)\cos(1)\right)^n=$$

$$\left(2\cos(1)\left(\cos(1)+i\sin(1)\right)\right)^n=$$

$$2^n\cos^n(1)\left(\cos(n)+i\sin(n)\right).$$

@mathyar

فرم قطبی اعداد مختلط

$$z = re^{i\theta}$$

۷- حاصل $\dfrac{(-1-\sqrt{3}i)^{15}}{(1+i)^{20}} + \dfrac{(-1+\sqrt{3}i)^{15}}{(1-i)^{20}}$ را بصورت $\alpha+\beta i$ بنویسید.

$$z_1=(-1-\sqrt{3}i) \begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1+3}=2 \\ \begin{cases} x=-1 \\ y=-\sqrt{3} \end{cases} \rightarrow \operatorname{tg}\theta=\frac{y}{x}=\frac{-\sqrt{3}}{-1}=\sqrt{3} \xrightarrow[\text{سوم}]{\text{ناحیه ی}} \theta=-\frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

$$z_1=2e^{-\frac{2\pi}{3}i}$$

$$z_2=(-1+\sqrt{3}i) \begin{cases} r=\sqrt{1+3}=2 \\ \operatorname{tg}\theta=\frac{\sqrt{3}}{-1}=-\sqrt{3} \xrightarrow[\text{دوم}]{\text{ناحیه ی}} \theta=\frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

$$z_2=2e^{\frac{2\pi}{3}i}$$

$$z_3=(1+i) \begin{cases} r=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2} \\ \operatorname{tg}\theta=\frac{1}{1}=1 \xrightarrow[\text{اول}]{\text{ناحیه ی}} \theta=\frac{\pi}{4} \end{cases} \rightarrow z_3=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$$

$$z_4=(1-i) \begin{cases} r=\sqrt{2} \\ \operatorname{tg}\theta=\frac{-1}{1}=-1 \xrightarrow[\text{چهارم}]{\text{ناحیه ی}} \theta=-\frac{\pi}{4} \end{cases} \rightarrow z_4=\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$$

$$\rightarrow \frac{z_2^{15}}{z_4^{20}}+\frac{z_1^{15}}{z_3^{20}}=\frac{(2e^{\frac{2\pi}{3}i})^{15}}{(\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i})^{20}}+\frac{(2e^{-\frac{2\pi}{3}i})^{15}}{(\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i})^{20}}=$$

ادامه‌ی سوال قبل

$$\frac{2^{15} e^{10\pi i}}{2^{10} e^{-5\pi i}} + \frac{2^{15} e^{-10\pi i}}{2^{10} e^{5\pi i}}$$

$$= 2^{5} e^{15\pi i} + 2^{5} e^{-15\pi i}$$

$$= 2^{5}(\underbrace{\cos 15\pi}_{-1} + i \underbrace{\sin 15\pi}_{0}) + 2^{5}(\underbrace{\cos 15\pi}_{-1} - i \underbrace{\sin 15\pi}_{0})$$

$$= -2^{5} - 2^{5} = -2 \times 2^{5} = -2^{6} = \boxed{-64 + 0i}$$

* حاصل عبارات زیر را بصورت استاندارد $\alpha + \beta i$ بنویسید.

۸) $$\frac{(1+i)^{15}}{(1-i)^{10}} = \begin{cases} z_1 = 1+i \rightarrow z_1 = \sqrt{2} e^{\frac{\pi}{4} i} \\ z_2 = 1-i \rightarrow z_2 = \sqrt{2} e^{-\frac{\pi}{4} i} \end{cases}$$

$$\rightarrow \frac{z_1^{15}}{z_2^{10}} = \frac{(\sqrt{2} e^{\frac{\pi}{4} i})^{15}}{(\sqrt{2} e^{-\frac{\pi}{4} i})^{10}} = \frac{\sqrt{2}^{15} e^{15\frac{\pi}{4} i}}{\sqrt{2}^{10} e^{-10\frac{\pi}{4} i}} = \sqrt{2}^{5} e^{\frac{25\pi}{4} i}$$

$$= \sqrt{2}^{5} \left(\cos \frac{25\pi}{4} + i \sin \frac{25\pi}{4}\right) = \sqrt{2}^{5}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= 4 + 4i$$

۹) $\left(\frac{۱+\sqrt{۳}i}{۱-i}\right)^{۸} = \frac{Z_۱^{۸}}{Z_۲^{۸}} = \left(\frac{Z_۱}{Z_۲}\right)^{۸}$

$$\begin{cases} Z_۱ = ۱+\sqrt{۳}i & \begin{cases} r = ۲ \\ tg\,\theta = \frac{\sqrt{۳}}{۱} = \sqrt{۳} \xrightarrow{\text{ناحیه اول}} \theta = \frac{\pi}{۳} \end{cases} \longrightarrow Z_۱ = ۲e^{\frac{\pi}{۳}i} \\ Z_۲ = ۱ - i \longrightarrow Z_۲ = \sqrt{۲}\,e^{-\frac{\pi}{۴}i} \end{cases}$$

$$\left(\frac{۲e^{\frac{\pi}{۳}i}}{\sqrt{۲}e^{-\frac{\pi}{۴}i}}\right)^{۸} = \left(\sqrt{۲}\,e^{\frac{۷\pi}{۱۲}i}\right)^{۸} = ۱۶\,e^{\frac{۱۴\pi}{۳}i}$$

$$= ۱۶\left(\cos\frac{۱۴\pi}{۳} + i\sin\frac{۱۴\pi}{۳}\right) = ۱۶\left(-\frac{۱}{۲} + i\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)$$

$$= -۸ + ۸\sqrt{۳}\,i$$

۱۰) $\frac{(۱+\sqrt{۳}i)^{۴}}{(۱-\sqrt{۳}i)^{۵}} = \frac{(۲e^{\frac{\pi}{۳}i})^{۴}}{(۲e^{-\frac{\pi}{۳}i})^{۵}}$

$$۱-\sqrt{۳}i \begin{cases} r = ۲ \\ tg\,\theta = \frac{-\sqrt{۳}}{۱} = -\sqrt{۳} \end{cases}$$

ناحیه چهارم

$\theta = -\frac{\pi}{۳}$

$$= \frac{۲^{۴}e^{\frac{۴\pi}{۳}i}}{۲^{۵}e^{-\frac{۵\pi}{۳}i}} = ۲\,e^{\frac{۱۱\pi}{۳}i}$$

$$۲\left(\cos\frac{۱۱\pi}{۳} + i\sin\frac{۱۱\pi}{۳}\right) = ۲\left(\frac{۱}{۲} - \frac{\sqrt{۳}}{۲}i\right)$$

$$= ۱ - \sqrt{۳}\,i$$

$$۱۱)\quad \frac{(1+i)^{۳}}{(1-\sqrt{۳}i)^{۴}} = \frac{Z_۱^{۳}}{Z_۲^{۴}} = \begin{cases} Z_۱ = \sqrt{۲}\, e^{\frac{\pi}{۴}i} \\ Z_۲ = ۲\, e^{-\frac{\pi}{۳}i} \end{cases}$$

$$\frac{\left(\sqrt{۲}\, e^{\frac{\pi}{۴}i}\right)^{۳}}{\left(۲ e^{-\frac{\pi}{۳}i}\right)^{۴}} = \frac{۲\sqrt{۲}\, e^{\frac{۳\pi}{۴}i}}{۲^{۴} e^{-\frac{۴\pi}{۳}i}} = ۲^{-\frac{۵}{۲}} e^{\frac{۲۵\pi}{۱۲}i} = \frac{\sqrt{۲}}{۸} e^{\frac{۲۵\pi}{۱۲}i}$$

$$\frac{\sqrt{۲}}{۸}\left(\cos\left(۲\pi+\frac{\pi}{۱۲}\right) + i\sin\left(۲\pi+\frac{\pi}{۱۲}\right)\right)$$

$$\frac{\sqrt{۲}}{۸}\cos\frac{\pi}{۱۲} + i\,\frac{\sqrt{۲}}{۸}\sin\frac{\pi}{۱۲} .$$

$$۱۲)\quad \frac{(1-i)^{۲۰۱۷}}{(1+i)^{۱۳۹۵}} = \frac{Z_۱^{۲۰۱۷}}{Z_۲^{۱۳۹۵}} = \begin{cases} Z_۱ = \sqrt{۲}\, e^{-\frac{\pi}{۴}i} \\ Z_۲ = \sqrt{۲}\, e^{\frac{\pi}{۴}i} \end{cases}$$

$$\frac{\left(\sqrt{۲}\, e^{-\frac{\pi}{۴}i}\right)^{۲۰۱۷}}{\left(\sqrt{۲}\, e^{\frac{\pi}{۴}i}\right)^{۱۳۹۵}} = \sqrt{۲}^{\,۶۲۲}\left(\frac{e^{-\frac{۲۰۱۷\pi}{۴}i}}{e^{\frac{۱۳۹۵\pi}{۴}i}}\right) = ۲^{۳۱۱} e^{-\frac{۳۴۰۲\pi}{۴}i}$$

$$۲^{۳۱۱}\left(\cos\frac{۳۴۰۲\pi}{۴} - i\sin\left(\frac{۳۴۰۲\pi}{۴}\right)\right) =$$

$$۲^{۳۱۱}\left(\underbrace{\cos\frac{۱۷۰۱\pi}{۲}}_{۰} - i\sin\frac{۱۷۰۱\pi}{۲}\right) = -۲^{۳۱۱} + ۰\, i$$

۱۳) $(-1-i\sqrt{3})^{1398} = \left(2e^{-\frac{2\pi}{3}i}\right)^{1398} = 2^{1398}\, e^{-932\pi i}$

$$2^{1398}\left(\underbrace{\cos 932\pi}_{1} - i\,\underbrace{\sin 932\pi}_{0}\right) = 2^{1398} + 0i$$

۱۴- عدد مختلط $\sin\frac{\pi}{8} - i\cos\frac{\pi}{8}$ را بصورت قطبی نمایش دهید.

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)$$

$$\cos\frac{3\pi}{8} - i\sin\frac{3\pi}{8} = \cos\left(-\frac{3\pi}{8}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{8}\right)$$

$$r=1\ ,\ \theta = -\frac{3\pi}{8} \xrightarrow{\text{پس}} z = re^{i\theta} = e^{-\frac{3\pi}{8}i}.$$

۱۵- اگر $A = \left(1+\frac{i}{\sqrt{3}}\right)^n - \left(1-\frac{i}{\sqrt{3}}\right)^n$ که در آن n عدد صحیح مثبت باشد آنگاه $Re(A)$ و $Im(A)$ را محاسبه کنید.

$$z_1 = 1 + i\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \begin{cases} r = \sqrt{1+\frac{1}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ tg\theta = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} \end{cases} \rightarrow \boxed{z_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3} e^{\frac{\pi}{6}i}}$$

$$z_2 = 1 - i\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \begin{cases} r = \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ tg\theta = -\frac{\sqrt{3}}{3} \xrightarrow[\text{چهارم}]{\text{ناحیه}} \theta = -\frac{\pi}{6} \end{cases} \rightarrow \boxed{z_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3} e^{-\frac{\pi}{6}i}}$$

ادامه‌ی سوال ۱۵

$$A = Z_1^n - Z_2^n$$

$$A = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^n - \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} e^{-\frac{\pi}{4}i}\right)^n = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^n \left(e^{\frac{n\pi}{4}i} - e^{-\frac{n\pi}{4}i}\right)$$

$$\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^n \left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4} - \cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$$

$$\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^n \left(2i\sin\frac{n\pi}{4}\right) = 2\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^n \left(\sin\frac{n\pi}{4}\right) i + 0$$

$$\begin{cases} Im(A) = 2\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^n \left(\sin\frac{n\pi}{4}\right) \\ Re(A) = 0 \end{cases}$$

۱۴_ مقدار $I = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^n$ را حساب کنید.

$$I = (Z_1)^n + (Z_2)^n$$

$$Z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \begin{cases} r = 1 \\ tg\theta = 1 \to \theta = \frac{\pi}{4} \end{cases} \to Z_1 = e^{\frac{\pi}{4}i}$$

$$Z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \begin{cases} r = 1 \\ tg\theta = -1 \to \theta = -\frac{\pi}{4} \end{cases} \to Z_2 = e^{-\frac{\pi}{4}i}$$

ادامه‌ی سؤال ۱۶ $\longrightarrow$ $I = \left(e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^n + \left(e^{-\frac{\pi}{4}i}\right)^n$

$$= e^{\frac{n\pi}{4}i} + e^{-\frac{n\pi}{4}i}$$

$$= \cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4} + \cos\frac{n\pi}{4} - i\sin\frac{n\pi}{4}$$

$$I = 2\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right). \quad \blacksquare$$

۱۷ـ درستی تساوی زیر را اثبات کنید.

$$(1+\sqrt{3}i)^n + (1-\sqrt{3}i)^n = 2^{n+1}\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$$

طرف چپ $= \left(2e^{\frac{\pi}{3}i}\right)^n + \left(2e^{-\frac{\pi}{3}i}\right)^n = \left(2^n e^{\frac{n\pi}{3}i}\right) + \left(2^n e^{-\frac{n\pi}{3}i}\right)$

$$2^n\left(e^{\frac{n\pi}{3}i} + e^{-\frac{n\pi}{3}i}\right) = 2^n\left(\cos\frac{n\pi}{3} + i\sin\frac{n\pi}{3} + \cos\frac{n\pi}{3} - i\sin\frac{n\pi}{3}\right)$$

$2^n\left(2\cos\frac{n\pi}{3}\right) = 2^{n+1}\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) =$ طرف راست

$\blacksquare$

mahyar esmaeilpour

۱۸ـ مقادیر a و b را چنان بیابید که $1+i$ ریشه‌ی معادله‌ی زیر باشند.

$$z^5+az^3+b=0$$

چون $1+i$ ریشه‌ی معادله است پس باید در معادله صدق کند:

$$1+i \begin{cases} r=\sqrt{2} \\ \theta=\frac{\pi}{4} \end{cases} \rightarrow \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$$

در معادله

$$\rightarrow (\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i})^5+a(\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i})^3+b=0$$

$$4\sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{4}i}+2\sqrt{2}ae^{\frac{3\pi}{4}i}+b=0$$

$$4\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)+2\sqrt{2}a\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)+b=0$$

$$4\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+2\sqrt{2}a\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+b=0$$

$$4(-1-i)+2a(-1+i)+b=0$$

$$-4-4i-2a+2ai+b=0$$

$$(-4-2a+b)+i(-4+2a)=0 \begin{cases} -4+2a=0 \rightarrow \boxed{a=2} \\ -4-2a+b=0 \end{cases}$$

$$\rightarrow -4-4+b=0 \rightarrow \boxed{b=8}$$

۱۹ - مقادیر a و b را چنان بیابید که $1+i$ ریشه‌ی معادله‌ی زیر باشد.

$$z^{7}+az^{5}+b=0 \qquad 1+i=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$$

$$\to \left(\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^{7}+a\left(\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^{5}+b=0$$

$$8\sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{4}i}+4\sqrt{2}ae^{\frac{5\pi}{4}i}+b=0$$

$$8\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)+4\sqrt{2}a\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)+b=0$$

$$8\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+4\sqrt{2}a\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+b=0$$

$$8-8i-4a-4ai+b=0$$

$$(8-4a+b)+i(-8-4a)=0 \quad \begin{cases}8-4a+b=0\\ -8-4a=0\end{cases}$$

$$\to \boxed{a=-2}$$

$$\to 8+8+b=0$$

$$\boxed{b=-16}$$

۲۰ـ فرض کنید Z عددی مختلط باشد طوری که $\frac{\pi}{2} < Arg z < \frac{2\pi}{3}$.

اگر $Z^3 + \frac{1}{Z^3} = \sqrt{3}$ مقدار $Z^2 + \frac{1}{Z^2}$ را محاسبه کنید.

$$Z^3 + \frac{1}{Z^3} = \sqrt{3} \xrightarrow[\text{فرض}]{Z = Re^{i\theta}} (Re^{i\theta})^3 + \frac{1}{(Re^{i\theta})^3} = \sqrt{3}$$

$$R^3 e^{3i\theta} + \frac{1}{R^3} e^{-3i\theta} = \sqrt{3}$$

$$R^3 (\cos 3\theta + i \sin 3\theta) + \frac{1}{R^3} (\cos 3\theta - i \sin 3\theta) = \sqrt{3}$$

$$R^3 \cos 3\theta + i R^3 \sin 3\theta + \frac{1}{R^3} \cos 3\theta - i \frac{1}{R^3} \sin 3\theta = \sqrt{3}$$

$$(R^3 + \frac{1}{R^3}) \cos 3\theta + i (R^3 - \frac{1}{R^3}) \sin 3\theta = \sqrt{3} + i0$$

$$(R^3 - \frac{1}{R^3}) \sin 3\theta = 0 \begin{cases} R^3 - \frac{1}{R^3} = 0 \Rightarrow R^6 = 1 \Rightarrow R = 1 \\ \sin 3\theta = 0 \Rightarrow 3\theta = k\pi \end{cases}$$

$$\theta = \frac{k\pi}{3} \xrightarrow{\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{2\pi}{3}} \text{غ ق ق}$$

$$(R^3 + \frac{1}{R^3}) \cos 3\theta = \sqrt{3} \xrightarrow{R=1} \cos 3\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

و چون $\frac{2\pi}{3} > \theta > \frac{\pi}{2}$ پس $\frac{3\pi}{2} < 3\theta < 2\pi$ یعنی ناحیه چهارم پس

$$3\theta = \frac{11\pi}{6} \xrightarrow{\div 3} \theta = \frac{11\pi}{18}$$

ادامه‌ی سؤال ۲۰ $\longrightarrow$ $\theta = \frac{11\pi}{18}$ و $R=1 \longrightarrow Z = e^{\frac{11\pi}{18}i}$

$$Z^2 + \frac{1}{Z^2} = \left(e^{\frac{11\pi}{18}i}\right)^2 + \frac{1}{\left(e^{\frac{11\pi}{18}i}\right)^2} = e^{\frac{11\pi}{9}i} + e^{-\frac{11\pi}{9}i}$$

$$\cos\left(\frac{11\pi}{9}\right) + i\sin\left(\frac{11\pi}{9}\right) + \cos\left(\frac{11\pi}{9}\right) - i\sin\left(\frac{11\pi}{9}\right)$$

$$\xrightarrow{so} Z^2 + \frac{1}{Z^2} = 2\cos\left(\frac{11\pi}{9}\right)$$

حل معادله در دستگاه اعداد مختلط

هر معادله‌ی درجه‌ی nام در دستگاه اعداد مختلط دارای n ریشه است.

۲۱ـ معادله‌ی $Z^2 + (i-2)Z + (3-i) = 0$ را در دستگاه اعداد مختلط حل کنید.

$$\Delta = (i-2)^2 - 4(3-i) = -1 + 4 - \cancel{4i} - 12 + \cancel{4i} = -9$$

$$\begin{cases} Z_1 = \frac{-(i-2)+3i}{2} = \frac{-i+2+3i}{2} = \frac{2+2i}{2} = \boxed{i+1} \\ Z_2 = \frac{-(i-2)-3i}{2} = \frac{-i+2-3i}{2} = \frac{-4i+2}{2} = \boxed{-2i+1} \end{cases}$$

۲۲ـ نشان دهید معادله‌ی زیر جواب ندارد.

$$|z| - z = i$$

فرض می‌کنیم $z = x + iy$ داریم:

$$\sqrt{x^2+y^2} - (x+iy) = i$$

$$(x+iy) = \sqrt{x^2+y^2} - i$$

$$\begin{cases} x = \sqrt{x^2+y^2} \xrightarrow{\text{بتوان ۲}} x^2 = x^2 + y^2 \Longrightarrow y = 0 \\ y = -1 \end{cases}$$

به تناقض رسیدیم

در نتیجه معادله‌ی بالا جواب ندارد.

محاسبه‌ی ریشه‌ی n ام عدد مختلط

$$\text{if } z^n = w \quad \begin{cases} z = re^{i\theta} \\ w = Re^{i\varphi} \end{cases}$$

$$r^n e^{in\theta} = Re^{i\varphi} \quad \begin{cases} r^n = R \longrightarrow r = \sqrt[n]{R} \\ n\theta = \varphi + 2k\pi \longrightarrow \theta = \dfrac{2k\pi + \varphi}{n} \end{cases}$$

ریشه‌ی n ام z: $\boxed{z_k = r \operatorname{cis} \theta}$ ، $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n-1$

۲۳ـ معادلهٔ $Z^4=-8+8\sqrt{3}\,i$ را حل کنید.

$$W=-8+8\sqrt{3}\,i \quad \begin{cases} R=\sqrt{8^2+8^2\times 3}=\sqrt{4\times 8^2}=16 \\ tg\varphi=\dfrac{8\sqrt{3}}{-8}=-\sqrt{3} \xrightarrow[\text{ربع دوم}]{\text{ناحیه}} \varphi=\dfrac{2\pi}{3} \end{cases}$$

$$W=Re^{i\varphi} \longrightarrow W=16e^{\frac{2\pi}{3}i}$$

$$(re^{i\theta})^4=16e^{\frac{2\pi}{3}i} \longrightarrow r^4e^{4i\theta}=2^4e^{\frac{2\pi}{3}i}$$

$$\boxed{r=2}\ ,\quad 4\theta=2k\pi+\frac{2\pi}{3} \longrightarrow \boxed{\theta=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6}}$$

$$Z_k=2\operatorname{cis}\theta \longrightarrow Z_k=2\operatorname{cis}\left(\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\ ,\ k=0,1,2,3$$

$$Z_{k=0}=2\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}+i$$

$$Z_{k=1}=2\operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right)=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)=-1+\sqrt{3}\,i$$

$$Z_{k=2}=2\operatorname{cis}\left(\frac{7\pi}{6}\right)=2\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)=-\sqrt{3}-i$$

$$Z_{k=3}=2\operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{3}\right)=2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)=1-\sqrt{3}\,i$$

* ریشه‌های معادله‌ی زیر را در دستگاه اعداد مختلط بیابید.

۲۴) $z^{4} = i \rightarrow w = i \begin{cases} R = 1 \\ tg\varphi = \frac{1}{0} \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} \end{cases} \rightarrow w = e^{\frac{\pi}{2}i}$

$(re^{i\theta})^{4} = e^{\frac{\pi}{2}i} \rightarrow \boxed{r=1} \ , \ \theta = \frac{2k\pi + \frac{\pi}{2}}{4}$

$\boxed{\theta = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}}$

$Z_k = cis\left(\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\right) \ , \ k = 0, 1, 2, 3$

$Z_{k=0} = cis\left(\frac{\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$

$Z_{k=1} = cis\left(\frac{5\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{8}\right)$

$Z_{k=2} = cis\left(\frac{9\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{9\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{9\pi}{8}\right)$

$Z_{k=3} = cis\left(\frac{13\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{13\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{13\pi}{8}\right)$