

جزوه تحقیق در عملیات

مدرس: اعظم باقری

گردآورنده: محمد منصور معصوم زاده

دانشگاه آزاد اسلامی واحد نجف آباد

- منابع درس : ۳
- فصل اول : مدل سازی ریاضی :** ۴
- مثال (شرکت تولیدی) : ۴
- مثال (شرکت حمل و نقل) : ۵
- مثال (کشاورز) : ۶
- مثال (مؤسسه دامداری) : ۷
- مثال (شرکت مصالح ساختمانی) : ۸
- مثال (شرکت بازرگانی) : ۹
- فصل دوم : حل مسائل برنامه ریزی خطی :** ۱۰
- روش ترسیمی حل مسائل برنامه ریزی خطی : ۱۰
- مثال : ۱۰
- بررسی موارد خاص در برنامه ریزی خطی : ۱۱
- حالت اول : نامیه جواب بی کران : ۱۱
- مثال : ۱۲
- مثال : ۱۳
- حالت دوم : فاقد نامیه موچه (فاقد جواب) : ۱۴
- مثال : ۱۴
- حالت سوم : جواب بهینه چندگانه : ۱۵
- مثال : ۱۵
- حالت چهارم : جواب تبهن : ۱۶
- مثال : ۱۶
- تمرین : ۱۷
- روش سیمپلکس (Simplex) : ۱۸
- روش M بزرگ : ۲۳
- نکته بسیار مهم و کاربردی : ۲۴
- روش دو مرحله ای یا دو فاز : ۲۶
- بررسی موارد خاص در برنامه ریزی خطی : ۲۸
- حالت اول : جواب بهینه چندگانه : ۲۸
- حالت دوم : فاقد نامیه موچه (فاقد جواب) : ۲۹
- حالت سوم : نامیه جواب بی کران : ۳۰
- حالت چهارم : جواب تبهن : ۳۱

- مسئله ثانویه : ۳۲
- قضیه اول : ۳۲
- قضیه دوم : ۳۳
- قضیه کمی (لنگی) مکمل : « فیلی مهم و پرکاربرد » ۳۴
- تعیین جواب بهینه یک مسئله با استفاده از تابلوی بهینه مسئله دیگر : ۳۵
- قیمت سایه‌ای : (یک مفهوم فیلی مهم) ۳۷
- قیمت سایه‌ای برای مدل‌های غیر استاندارد (مدل‌هایی که دارای محدودیت‌های بزرگتر مساوی و یا مساوی هستند) : ۳۷
- روش سیمپلکس ثانویه : ۳۸
- یکسری نمونه سؤال : ۳۹
- فصل سوم : مسائل حمل و نقل : ۴۱
- رویه مل کلیه مسائل حمل و نقل : ۴۱
- توضیح گام اول : برابر کردن میزان عرضه کل با تقاضای کل : ۴۱
- توضیح گام دوم : بدست آوردن یک جواب پایه قابل قبول (موجه) ابتدائی : ۴۲
- روش گوشه شمال غربی : ۴۲
- روش حداقل هزینه روی سطر : ۴۳
- روش حداقل هزینه روی ستون : ۴۳
- روش حداقل هزینه روی ماتریس : ۴۴
- روش وُگل یا فُگل : ۴۴
- روش راسل : ۴۵
- بهینگی جداول حمل و نقل : ۴۸
- روش مستقیم یا پله سنگ : ۴۸
- روش مضارب یا توزیع تعدیل شده : ۴۸

منابع درس :

۱. پژوهش عملیاتی دکتر محمدرضا مهرگان
۲. تحقیق در عملیات ۱ دکتر عادل آذر



در مورد درس :

- هدف در این درس ، بدست آوردن یک فرمول ریاضی است
- بر اساس گزینه‌ها و اطلاعاتی که از مسئله داریم ، محدودیت‌ها را بدست آورده و سپس یک تابع ریاضی بدست می‌آوریم
- بخشی که به آماده شدن این تابع ریاضی می‌انجامد را بخش مدل سازی می‌گویند که کمی سنگین است
- برنامه ریزی‌ها در این درس ، همگی برنامه ریزی خطی هستند زیرا بین متغیرها یک رابطه خطی وجود دارد. متغیرهایی با توان صفر یا یک به همراه یکسری ضرایب عددی

یک نمونه سؤال واقعی (خارج از درس) :

مسئله زمانبندی تولید تک ماشین (Single Machine Scheduling) به صورت زیر است:

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^n w_i T_i \quad (1)$$

Subject to:

$$C_i \geq r_i + p_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

$$X_{ij} + X_{ji} = 1 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n; i \neq j \quad (3)$$

$$C_i - C_j + M X_{ij} \geq p_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n; i \neq j \quad (4)$$

$$T_i \geq C_i - d_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \quad (5)$$

$$T_i \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \quad (6)$$

$$X_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n; i \neq j \quad (7)$$

$$C_i \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \quad (8)$$

در این مسئله :

- n کار با زمان پردازش p_i (زمان تولید)
 - زمان دسترسی r_i (زمانی که کاری به کارگاه سفارش داده می‌شود)
 - موعد تحویل d_i
 - جریمه تاخیر w_i
- باید روی یک ماشین پردازش و تحویل شوند. هدف مساله تعیین توالی بهینه‌ای برای انجام کارها روی تک ماشین به گونه‌ای است که مجموع وزنی زمان تاخیر تمام کارها کمینه شود. سایر اطلاعات مسئله به صورت زیر است:
- M عددی به اندازه کافی بزرگ
 - C_i زمان تکمیل کار i ام
 - X_{ij} برابر یک است اگر کار j ام بعد از کار i ام انجام شود و ۰ در غیر اینصورت.
 - T_i زمان تأخیر کار i ام از موعد تحویل آن.

سئوالات پایان ترم :

- ترسیمی
- سیمپلکس که خود دارای نوع‌های مختلفی بود : روش M بزرگ - دو مرحله‌ای - ثانویه ؛ که دو روش اول ، شامل هر سه نوع محدودیت است. در روش سوم نیز ، تنها از محدودیت مساوی استفاده نخواهد شد.
- نکات ثانویه که شامل موارد زیر بود :
 - نوشتن ثانویه یک مسئله - رابطه کمکی مکمل - قیمت سایه‌ای
- مسائل حمل و نقل
- چهار الی پنج سؤال : ۱۴ نمره

« فصل اول : مدل سازی ریاضی »

مدل ریاضی از یک سری اعدادی که در اختیار داریم بدست خواهد آمد.

در مدل سازی ، هر مدل شامل سه مجموعه اساسی از عناصر است :

۱. متغیرهای تصمیم و پارامترها : این متغیرها ، متغیرهای مجهولی هستند که باید مقدارشان را بعد از حل مسئله بدست آورد. معمولاً آنها را با $X_1, X_2, \dots, X_n$ نشان می‌دهیم و تابع هدف نیز بر حسب آنها نوشته می‌شود. می‌توانند مثبت ، منفی ، صفر و یا آزاد در علامت باشند. برای مثال دما ، هر سه نوع را دارد ، پس آزاد در علامت است. مقدار تولید یا صفر است و یا مثبت ولی منفی نمی‌تواند باشد. پارامترها نیز معرف متغیرهای کنترل شده هستند ؛ یعنی مقدار ثابت برای آنها در نظر گرفته شده. مثلاً میزان مصرفی از مواد خام یا نیروی انسانی برای تولید یک واحد محصول
۲. تابع هدف : تابع هدف یک تابع ریاضی از متغیرهای تصمیم است که بیانگر هدف مدل می‌باشد و می‌تواند بصورت Min ، Max و یا ترکیبی از آن دو بیان شود (البته ترکیب آن دو در این درس مطرح نخواهد شد). این تابع را معمولاً با Z نشان می‌دهند.
۳. محدودیت‌ها : محدودیت‌های یک مسئله بصورت معادلات یا نامعادلاتی از متغیرهای تصمیم هستند که بیانگر قیدهای ذکر شده در مسئله می‌باشند. برای مثال ، یک مقدار حداکثری را بصورت $460 \leq O$ نمایش می‌دهند.

نکته :

سر به سر $\rightarrow 0 =$ هزینه - درآمد ضرر یا هزینه $\rightarrow 0 <$ هزینه - درآمد سود یا درآمد $\rightarrow 0 >$ هزینه - درآمد

مثال :

شرکتی سه محصول تولید می‌کند. اگر مقدار نیروی انسانی و مواد اولیه محدود باشد ، با توجه به اطلاعات جدول زیر ، مسئله را بگونه‌ای مدل سازی نمائید که سود این شرکت ، حداکثر شود.

منابع	میز : ①	صندلی : ②	کمد : ③	مقدار در دسترس
نیروی کار	۵	۲	۴	① : ۲۴۰ نفر/ساعت
مواد اولیه	۴	۶	۳	② : ۴۰۰ کیلوگرم
سهم سود هر واحد	۳	۵	۲	

نکات :

- همیشه اعداد برای یک واحد ، تولید است ؛ پنج نفر نیرو برای تولید یک میز
- مقدار در دسترس یعنی حداکثر : حداکثر چهارصد کیلوگرم مواد اولیه موجود است
- برای میز داریم : برای یک میز ، چهار کیلوگرم مواد اولیه و پنج نفر نیرو لازم است کار کنند تا یک میز بدست آورده و با فروش آن سه واحد پولی بدست آورد.
- با توجه به مقدار در دسترس ، در این مسئله دو محدودیت داریم

مرحله اول : بدست آوردن متغیرهای تصمیم : بایستی تابع هدف بر اساس این متغیرها ساخته شود ، پس بایستی به هدف نگاه کرد.

X_1 : تعداد تولید میز X_2 : تعداد تولید صندلی X_3 : تعداد تولید کمد

یک میز ، سه واحد پولی خواهد داشت ؛ پس چند تا میز بایستی ساخته شود ؟ $\leftarrow$ با همین جملات ، متغیرها بوجود خواهد آمد. X_1 تا ، کل تولید میز است و $3X_1$ سود کل حاصل از تولید میز خواهد شد.

مرحله دوم : تابع هدف : یعنی Z . که بایستی Max شود ؛ یعنی در واقع سود بایستی Max شود.

برای این منظور یک نسبت ساده می‌گیریم : برای یک میز ، سه واحد پولی داریم. پس خواهیم داشت :

$$Max \quad Z = 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 \quad \text{برای میز} \quad 5x_2 \quad \text{برای صندلی} \quad 2x_3 \quad \text{برای کمد}$$

مرحله سوم : محدودیت‌ها : برای محدودیت‌ها نیز یک نسبت ساده می‌گیریم : برای یک میز ، پنج نفر ؛ برای X_1 تا ، ؟

$$\textcircled{1} : 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 240 \quad \textcircled{2} : 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 \leq 400$$

بعد از تابع هدف ، محدودیت را می‌توان پس از علامت " $S. t.$ " نیز نوشت. یعنی این تابع هدف است بطوریکه محدودیت‌های زیر برقرار باشد

به ظاهر مدل سازی تمام شده ولی یک مرحله دیگر نیز وجود دارد و آنهم تعیین علامت متغیرهای مسئله است. داریم :

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad \rightarrow \quad \text{یا می‌توان به این صورت نوشت} \quad \rightarrow \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

مثال :

وظیفه یک شرکت حمل و نقل ، انتقال تلویزیون از سه کارخانه به سه شهر می باشد. با توجه به اطلاعات جدول زیر ، مسأله را بگونه ای مدل سازی ریاضی نمائید که هزینه کل این شرکت ، حداقل شود.

هزینه حمل هر دستگاه تلویزیون از هر کارخانه به هر شهر			
از کارخانه	به شیراز	به بوشهر	به اهواز
①	۱۶	۱۸	۱۱
②	۱۴	۱۲	۱۳
③	۱۳	۱۵	۱۷

②	
شهر	تعداد تقاضا
شیراز [A]	۱۵۰
بوشهر [B]	۲۵۰
اهواز [C]	۲۰۰

①	
کارخانه	تعداد عرضه تلویزیون
تهران ①	۳۰۰
اراک ②	۲۰۰
اصفهان ③	۲۰۰

نکات :

- اعدادی که در جدول هزینه ، سود و یا به طور کلی هدف می آید ، مربوط به یک واحد است.
- چون دو عامل داریم (مبدأ که کارخانه است و مقصد که شهر است) ، بنابراین برای متغیر ، دو اندیس در نظر گرفته می شود. تعداد اندیس ها را از جدول هدف نیز می توانید تشخیص دهید.
- در مواقعی که دو اندیس داریم ، بهتر است یکی را عدد و دیگری را حرف در نظر بگیریم.
- اعدادی که در جدول هدف واقع شده اند ، معمولاً در تابع هدف و بقیه ، معمولاً در محدودیت ها مورد استفاده قرار می گیرند

مرحله اول : بدست آوردن متغیرهای تصمیم :

x_{ij} را ، تعداد تلویزیون ارسالی از کارخانه i ام به شهر j ام تعریف می کنیم. پس داریم : $j = A, B, C$ ، $i = 1, 2, 3$

مرحله دوم : تابع هدف : یعنی Z . که بایستی Min شود ؛ یعنی در واقع هزینه بایستی Min شود.

برای این منظور یک نسبت ساده میگیریم :

برای یک دستگاه تلویزیون ، ۱۶ واحد پولی برای x_{1A} ، چه مقدار هزینه ؟
 $Min Z = 16x_{1A} + 18x_{1B} + 11x_{1C} + 14x_{2A} + 12x_{2B} + 13x_{2C} + 13x_{3A} + 15x_{3B} + 17x_{3C}$

مرحله سوم : محدودیت ها :

s. t

$$\textcircled{1} : \quad x_{1A} + x_{1B} + x_{1C} \leq 300 \quad x_{2A} + x_{2B} + x_{2C} \leq 200 \quad x_{3A} + x_{3B} + x_{3C} \leq 200$$

کل تلویزیون ارسالی از تهران به سایر شهرها

$$\textcircled{2} : \quad \sum_{i=1}^3 x_{iA} = 150 \quad \sum_{i=1}^3 x_{iB} = 250 \quad \sum_{i=1}^3 x_{iC} = 200$$

$$\textcircled{3} : \quad x_{ij} \geq 0 \quad , \quad i = 1, 2, 3 \quad , \quad j = A, B, C$$

نکته :

- می توانیم آینده نگری کنیم و مدل را طوری پیاده سازی کنیم که حتی در صورت افزایش تعداد تقاضا ، نیازی به تغییر مدل نداشته باشیم. در این صورت تنها محدودیت دوم تغییر خواهد کرد و خواهیم داشت :

$$\textcircled{2} : \quad \sum_{i=1}^3 x_{iA} \geq 150 \quad \sum_{i=1}^3 x_{iB} \geq 250 \quad \sum_{i=1}^3 x_{iC} \geq 200$$

مثال :

یک کشاورز دارای زمینی به مساحت ۲ هزار هکتار هست و آنرا طبق جدول زیر به سه قسمت تقسیم نموده است. اگر این زمین برای کاشت سه محصول ذرت ، لوبیا و پیاز با توجه به اطلاعات زیر مناسب باشد ، با در نظر گرفتن شروط زیر ، مسأله را بگونه‌ای مدل سازی ریاضی نمائید که سود کل این کشاورز ، حداکثر شود.

هر محصول را می‌توان در هر قطعه از زمین کشت نمود ، اما با دو شرط زیر :
حداقل ۶۰٪ هر قطعه زمین زیر کشت رود ③
در هر قطعه زمین ، نسبت مساحت زیر کشت به کل آن زمین ، با هم مساوی باشد ④

②		
محصول	حداکثر سطح قابل کشت	سود هر هکتار
ذرت [A]	۹۰۰	۶۰،۰۰۰
لوبیا [B]	۷۰۰	۴۵،۰۰۰
پیاز [C]	۱۰۰۰	۳۰،۰۰۰

①	
قطعه	متراژ (هکتار)
اول ①	۵۰۰
دوم ②	۸۰۰
سوم ③	۷۰۰

نکات :

- در این مثال نیز ، دو عامل داریم پس متغیرهای ما دو اندیشه خواهند بود
- محدودیت‌های اول ، سوم و چهارم مربوط به قطعه زمین و محدودیت دوم مربوط به محصول است
- جدول سود که در آن محدودیت دوم نیز وجود دارد مربوط به تابع هدف است

مرحله اول : بدست آوردن متغیرهای تصمیم :

x_{ij} را ، مقدار سطح کشت شده از محصول i ام در قطعه زمین j ام تعریف می‌کنیم. پس داریم : $j = 1, 2, 3$ ، $i = A, B, C$

مرحله دوم : تابع هدف :

برای این منظور یک نسبت ساده میگیریم :

کشت یک هکتار ذرت ، ۶۰،۰۰۰ واحد پولی سود دارد برای $x_{A1} + x_{A2} + x_{A3}$ ، چه مقدار سود ؟ $60000(x_{A1} + x_{A2} + x_{A3})$

$$Max \ Z = 60000(\sum_{j=1}^3 x_{Aj}) + 45000(\sum_{j=1}^3 x_{Bj}) + 30000(\sum_{j=1}^3 x_{Cj})$$

مرحله سوم : محدودیت‌ها :

s. t

$$\textcircled{1}, \textcircled{3} : \quad 60\% * 500 = 300 \leq \sum_{i=A}^C x_{i1} \leq 500 \quad 60\% * 800 = 480 \leq \sum_{i=A}^C x_{i2} \leq 800 \quad 60\% * 700 = 420 \leq \sum_{i=A}^C x_{i3} \leq 700$$

$$\textcircled{2} : \quad \sum_{j=1}^3 x_{Aj} \leq 900 \quad \sum_{j=1}^3 x_{Bj} \leq 700 \quad \sum_{j=1}^3 x_{Cj} \leq 1000$$

$$\textcircled{4} : \quad \frac{\text{مساحت زیر کشت}}{\text{مساحت کل آن زمین}} \rightarrow \frac{\sum_{i=A}^C x_{i1}}{500} = \frac{\sum_{i=A}^C x_{i2}}{800} = \frac{\sum_{i=A}^C x_{i3}}{700}$$

$$\textcircled{5} : \quad x_{ij} \geq 0 \quad , \quad i = A, B, C \quad , \quad j = 1, 2, 3$$

نکته :

- سمت چپ نامساوی‌ها در محدودیت اول و سوم ، مربوط به محدودیت سوم و سمت راست مربوط به محدودیت اول است.
- در محدودیت چهارم ، کسرها طرفین وسطین شده و در نهایت بصورت یک معادله و بدون کسر نوشته خواهد شد.

مثال :

یک مؤسسه دامداری ، خوراک مورد نظر برای دام خود که حاوی عناصر مورد نیاز برای دام است ، طبق جدول زیر تأمین می کند. اگر حداقل احتیاجات این مؤسسه هم طبق جدول زیر باشد ، مسأله را بگونه ای مدل سازی ریاضی نمائید که هزینه کل این مؤسسه ، حداقل شود.

عناصر سود بخش	خوراک دام			حداقل احتیاجات روزانه ①
	ذرت ①	ماده آلی ②	یونجه ③	
قند [A]	۹۰	۲۰	۴۰	۲۰۰
پروتئین [B]	۳۰	۸۰	۶۰	۱۸۰
ویتامین [C]	۱۰	۲۰	۴۰	۱۵۰
قیمت	۲۱	۱۸	۱۵	---

نکات :

- باز هم در اینجا دو عامل در اختیار داریم
- چون قیمت در مقابل خوراک دام قرار گرفته ، جمع مقادیر از عناصر مربوط به یک خوراک در قیمت آن ضرب خواهد شد (مربوط به تابع هدف)
- عنصر سود بخش در یک خوراک ، نمی تواند صفر باشد (محدودیت دوم)

مرحله اول : بدست آوردن متغیرهای تصمیم :

x_{ij} را ، مقدار عنصر سود بخش i ام در خوراک دام j ام تعریف می کنیم. پس داریم : $j = 1, 2, 3$ ، $i = A, B, C$

مرحله دوم : تابع هدف :

$$\text{Min } Z = 21(x_{A1} + x_{B1} + x_{C1}) + 18(x_{A2} + x_{B2} + x_{C2}) + 15(x_{A3} + x_{B3} + x_{C3})$$

مرحله سوم : محدودیت ها :

s. t

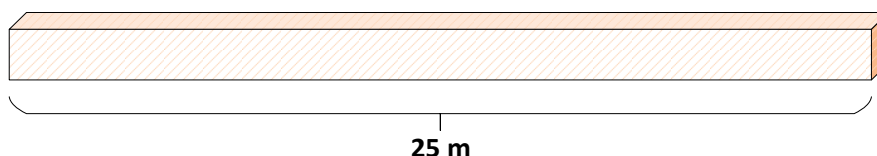
$$\text{① : } \begin{array}{lll} \text{برای خوراک یونجه} & \text{برای خوراک مواد آلی} & \text{برای خوراک ذرت} \\ 10x_{C1} + 20x_{C2} + 40x_{C3} \geq 150 & 30x_{B1} + 80x_{B2} + 60x_{B3} \geq 180 & 90x_{A1} + 20x_{A2} + 40x_{A3} \geq 200 \end{array}$$

$$\text{② : } x_{ij} > 0 , \quad i = A, B, C , \quad j = 1, 2, 3$$

مثال :

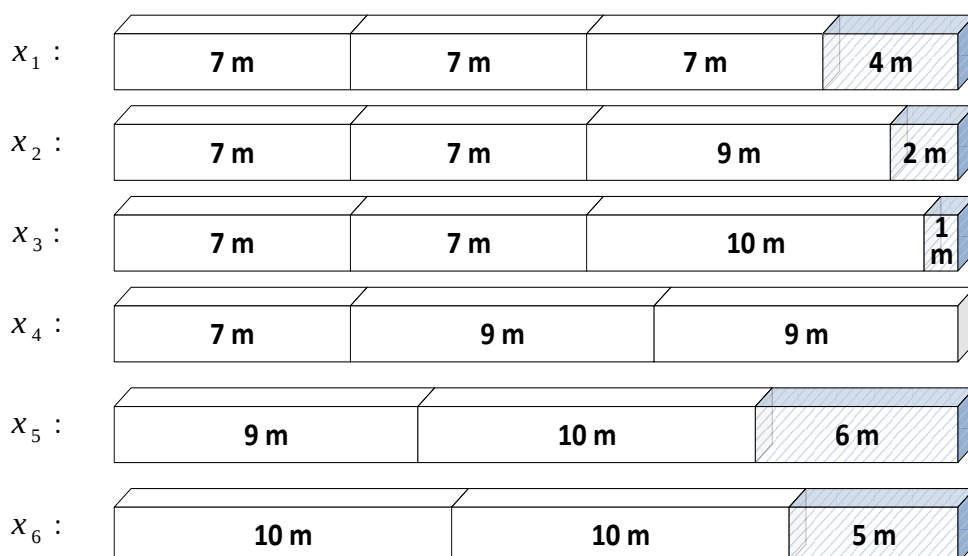
یک شرکت تولید کننده مصالح ساختمانی ، برای الوار در سه اندازه مختلف طبق جدول زیر سفارش دریافت می کند. طول الوارهای شرکت ، همگی ۲۵ متری بوده و شرکت باید الوارها را به اندازه های سفارش شده ، برش دهد. مسأله را بگونه ای مدل سازی ریاضی نمائید که برش الوارها بگونه ای باشد که کل تخته های برش داده شده ، حداقل شود.

①	
تعداد سفارش	اندازه
۷۰۰	۷ متر
۱۲۰۰	۹ متر
۳۰۰	۱۰ متر



نکات :

- بایستی تمامی حالات برش روی یک الوار با اندازه های داده شده بررسی شود. برای این منظور از کوچکترین سایز و با بیشترین تعدادی که روی یک الوار بدست می آید ، شروع می کنیم. خواهیم داشت :



ترکیب حالت های الوار ۷ متری

ترکیب حالت های الوار ۹ متری

ترکیب حالت های الوار ۱۰ متری

- در حالت های فوق ، تمامی قطعات بریده شده از سمت راست که با هر یک از اندازه های مورد نظر ما همخوانی ندارد (هاشور خورده) ، ضایعات می باشد.
- در ترکیب حالت های فوق ، بعضی حالات امکان پذیر نخواهد بود (برای مثال سه قطعه هفت متری داریم ولی سه قطعه نه متری نداریم)
- در ترکیب حالت های فوق ، بعضی حالات ممکن است تکرار شود که ما آنها را حذف می کنیم (در ترکیب حالت الوار نه متری می توان دو قطعه نه متری در اول برش داد. در اینصورت یک قطعه هفت متری می ماند که در نتیجه با یکی از حالت الوار هفت متری دقیقاً مانند هم خواهد شد)

مرحله اول : بدست آوردن متغیرهای تصمیم :

X_i را ، تعداد چوب های بریده شده به روش i ام یا تعداد برش های انجام شده روی الوارها به روش i ام تعریف می کنیم. پس داریم : $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

مرحله دوم : تابع هدف :

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^6 X_i$$

مرحله سوم : محدودیت ها :

برای مثال در محدودیت روی الوار ۷ متری داریم : برای هر بار استفاده از روش اول روی یک الوار ، سه قطعه هفت متری داریم. چند بار این روش استفاده شود ؟

s. t

الوار ده متری	الوار نه متری	الوار هفت متری
① :	② :	③ :
$x_3 + x_5 + 2x_6 \geq 300$	$x_2 + 2x_4 + x_5 \geq 1200$	$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \geq 700$
④ :		
$x_i \geq 0 \quad , \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$		

مثال :

یک شرکت بازرگانی ، قیمت خرید و فروش یک کالای معین را طی ۴ ماه آینده می‌داند. قیمت خرید و فروش در هر ماه طبق جدول زیر است. ظرفیت انبار این شرکت ، حداکثر ۱۰ هزار واحد می‌باشد اما هزینه‌ای ندارد. فرض کنید تعداد فروش در آغاز هر ماه توسط تعداد خریداری شده تعیین می‌شود. در آغاز ماه اول ، ۲ هزار واحد کالا در انبار موجود است. مسأله را بگونه‌ای مدل سازی ریاضی نمائید تا این شرکت حداکثر سود را بدست آورد.

ماه i ام				
۴	۳	۲	۱	
۸	۷	۶	۵	C_i قیمت خرید
۷	۶	۸	۴	P_i قیمت فروش

نکته :

- توجه داشته باشید که در این مثال تنها یک عامل داریم ولی این عامل ، نوع متغیرهای تصمیم آن متفاوت است (خرید ، فروش و ...)

مرحله اول : بدست آوردن متغیرهای تصمیم :

x_i ، مقدار کالای خریداری شده در ماه i ام. پس داریم : $i = 1, 2, 3, 4$

y_i ، مقدار کالای آماده برای فروش در ماه i ام. پس داریم : $i = 1, 2, 3, 4$

z_i ، مقدار کالای موجود در انبار در آغاز ماه i ام. پس داریم : $i = 1, 2, 3, 4$

مرحله دوم : تابع هدف :

$$\text{Max } Z = \sum_{i=1}^4 P_i y_i - \sum_{i=1}^4 C_i x_i$$

مرحله سوم : محدودیت‌ها :

s. t

① : محدودیت در کالاهای موجود در انبار ($z_1 = 2000$)

$$z_1 + x_1 \leq 10000$$

$$z_2 + x_2 \leq 10000$$

$$z_3 + x_3 \leq 10000$$

$$z_4 + x_4 \leq 10000$$

② : محدودیت در تعداد کالا برای فروش

$$y_1 \leq z_1 + x_1$$

$$y_2 \leq z_2 + x_2$$

$$y_3 \leq z_3 + x_3$$

$$y_4 \leq z_4 + x_4$$

③ : محدودیت متغیرها

$$x_i \geq 0$$

$$y_i \geq 0$$

$$z_i \geq 0$$

$$i = 1, 2, 3, 4$$

« فصل دوم : حل مسائل برنامه ریزی خطی »

روش ترسیمی حل مسائل برنامه ریزی خطی :

این روش به مدل‌هایی محدود می‌شود که حداکثر دارای سه متغیر تصمیم یک اندیشه باشند که در این درس ما به بررسی دو متغیره‌ها می‌پردازیم. روش به اینگونه است که محور X ها را به متغیر X_1 و محور Y ها را به متغیر X_2 نسبت می‌دهیم. سپس به ترسیم محدودیت‌های مدل می‌پردازیم؛ به اینصورت که ابتدا معادله حدی محدودیت‌ها را رسم می‌کنیم (منظور از معادله حدی، محدودیت مدل است با فرض تساوی) و بعد از آن در صورتی که محدودیت بصورت نامعادله باشد، منطقه مربوط به آنرا مشخص می‌کنیم. پس از اینکه همه محدودیت‌ها رسم شد، ناحیه اشتراک آنها را پیدا می‌کنیم. به این ناحیه، ناحیه موجه گفته می‌شود و نقاط تلاقی محدودیت‌ها روی این ناحیه را، نقاط گوشه موجه می‌گویند که البته متناهی هستند. اثبات می‌شود که نقطه بهینه، یکی از همین نقاط است.

مثال : (تقریباً مانند مثال صفحه دوم ولی با دو محصول)

مدل زیر را به روش ترسیمی حل کنید.

$$\text{Max } Z = 40x_1 + 50x_2$$

s. t

$$\textcircled{1} : x_1 + 2x_2 \leq 40$$

$$\textcircled{2} : 4x_1 + 3x_2 \leq 120$$

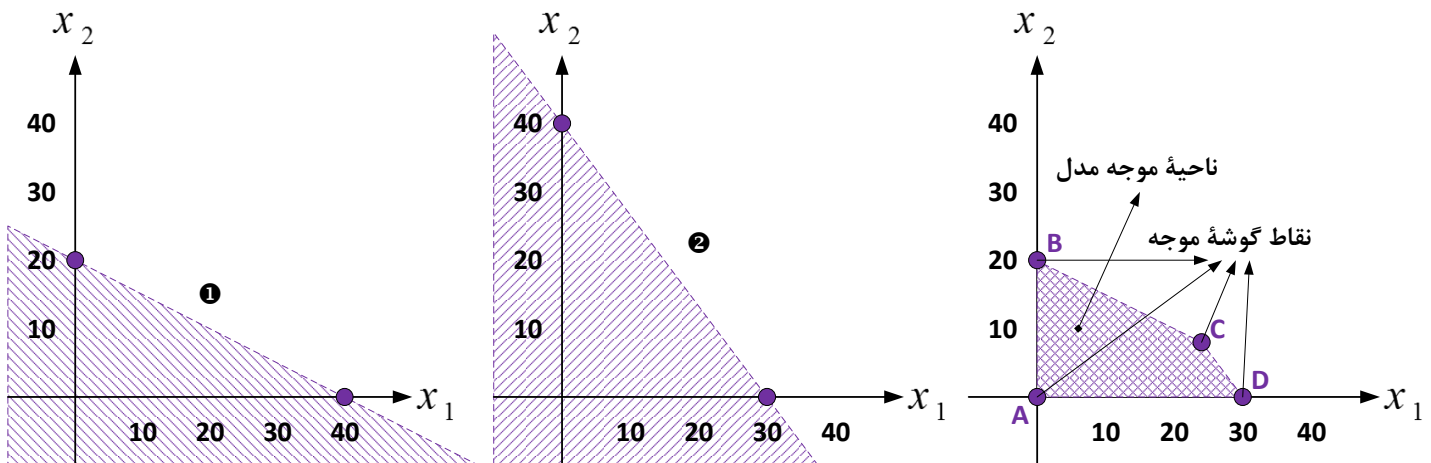
$$\textcircled{3} : x_1, x_2 \geq 0$$

$$\textcircled{1} : x_1 + 2x_2 = 40 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 & , & x_2 = 20 \\ x_1 = 40 & , & x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} : 4x_1 + 3x_2 = 120 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 & , & x_2 = 40 \\ x_1 = 30 & , & x_2 = 0 \end{cases}$$

نکته :

• بهترین راه برای بدست آوردن نقاط فوق، این است که یک متغیر را صفر داده و متغیر دیگر را بدست آوریم و در مرحله بعد بصورت عکس عمل کنیم.



برای پیدا کردن نقطه بهینه دو راه وجود دارد :

- روش محاسباتی : در این روش ابتدا مختصات همه نقاط گوشه موجه را مشخص می‌کنیم. سپس آنها را در تابع هدف قرار می‌دهیم. هر کدام که تابع هدف را به بهترین شکل خود رساند، نقطه بهینه است.
برای مثال فوق خواهیم داشت :

$$A(0,0) \Rightarrow Z_A = 40(0) + 50(0) = 0$$

$$B(0,20) \Rightarrow Z_B = 40(0) + 50(20) = 1000$$

توجه داشته باشید که برای نقطه C نمی‌توانید به محورها عمود کنید؛ بلکه بایستی مشخصات دقیق نقطه را بدست آورید. پس یک دستگاه بصورت زیر خواهیم داشت :

$$C \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 40 \\ 4x_1 + 3x_2 = 120 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \times(-4) \\ \Rightarrow \end{matrix} \begin{cases} -4x_1 - 8x_2 = -160 \\ 4x_1 + 3x_2 = 120 \end{cases} \Rightarrow -5x_2 = -40 \Rightarrow x_2 = 8, \quad x_1 = 24$$

$$C(24,8) \Rightarrow Z_C = 40(24) + 50(8) = 1360$$

$$D(30,0) \Rightarrow 40(30) + 50(0) = 1200$$

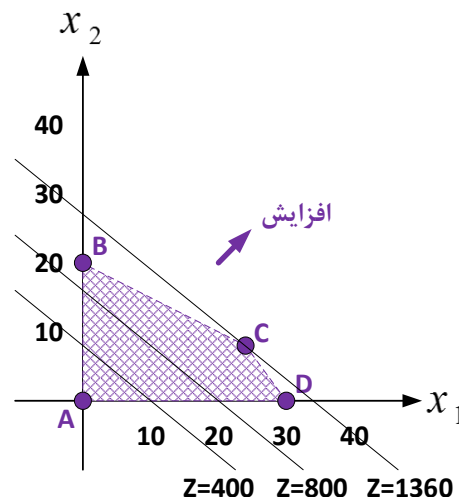
$$\Rightarrow x_1^* = 24, \quad x_2^* = 8, \quad Z^* = Z_C = 1360$$

و این نشان می‌دهد که محصول بایستی با این نسبت تولید شود تا کارخانه به حداکثر سود خود برسد.

۲. روش آزمون و خطا : در این روش تابع هدف را به ازای یک مقدار دلخواه رسم می‌کنیم بگونه‌ای که در ناحیه موجه مدل قرار گیرد. سپس با توجه به Max و یا Min بودن تابع هدف ، خط تابع هدف را در جهت افزایش یا کاهش حرکت می‌دهیم تا جایی که به آخرین نقطه از ناحیه موجه ، مماس شود. این نقطه ، نقطه بهینه است.

نکته :

این مقدار دلخواه را طوری انتخاب می‌کنیم که بر ضرایب متغیرها تقسیم پذیر بوده (مقدار اعشاری بدست نیاید) و از بزرگی قابل قبولی نیز برخوردار باشد اگر نقطه بهینه در مثال فوق را بخواهیم به روش دوم بدست آوریم ، خواهیم داشت :



$$\textcircled{1} : 40x_1 + 50x_2 = 400 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 & , & x_2 = 8 \\ x_1 = 10 & , & x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} : 40x_1 + 50x_2 = 800 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 & , & x_2 = 16 \\ x_1 = 20 & , & x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1^* = 24 \quad , \quad x_2^* = 8 \quad , \quad Z^* = Z_C = 1360$$

یادآوری :

• در شکل فوق ، خطی که از نقاط B و D می‌گذرد ، نقطه فوق ، خط را به دو نیم خط تقسیم می‌کند ، پس بر این دو نقطه ، مماس نخواهد بود. همچنین خطی که از نقاط A و C می‌گذرد ، بر این دو نقطه مماس است ولی در نقطه C ، تابع هدف بالاترین مقدار خود را دارد ؛ پس نقطه C ، نقطه بهینه در مدل ما خواهد بود.

بررسی موارد خاص در برنامه ریزی خطی :

چهار حالت خاص در برنامه ریزی خطی وجود دارد که آنها را بررسی خواهیم کرد :

حالت اول : ناحیه جواب بی‌کران :

هرگاه ناحیه جواب مدل از یک سمت به محدودیت یا محدودیت‌هایی ختم نشود ، مسئله ، ناحیه جواب بی‌کران دارد. در اینصورت دو حالت ممکن است بوجود آید :

- مسئله جواب داشته باشد
- مسئله جواب نداشته باشد

که این بستگی به تابع هدف دارد. در این حالت ، به دست آوردن نقطه بهینه مسئله از روش محاسباتی ممکن است جواب ندهد و لذا بایستی آنرا به روش آزمون و خطا بدست آورد.

مثال : مدل زیر را به روش ترسیمی حل کنید.

$$\text{Min } Z = 6x_1 + 2x_2$$

s. t

❶ : $2x_1 + 4x_2 \geq 16$

❷ : $4x_1 + 3x_2 \geq 24$

❸ : $x_1, x_2 \geq 0$

$$\text{❶ : } 2x_1 + 4x_2 = 16 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0, & x_2 = 4 \\ x_1 = 8, & x_2 = 0 \end{cases}$$

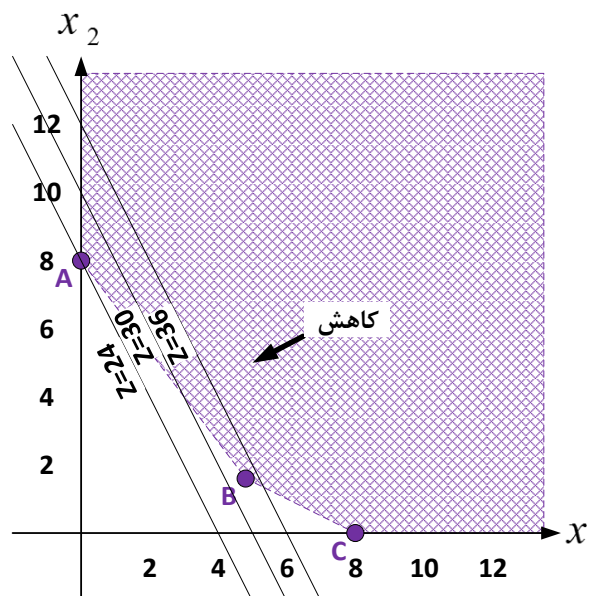
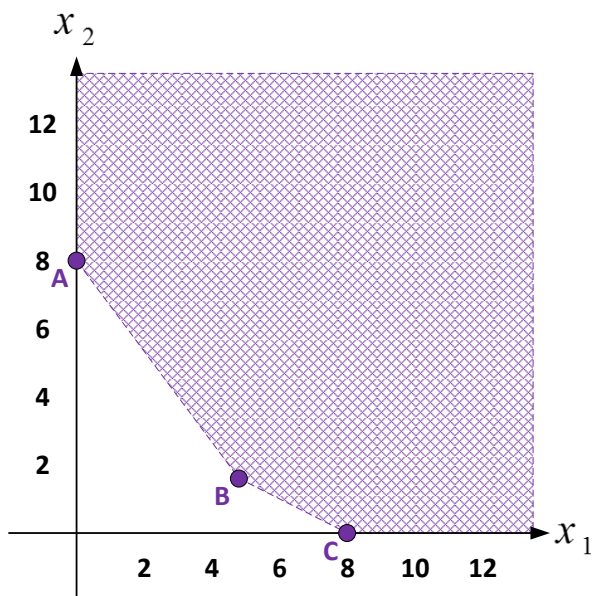
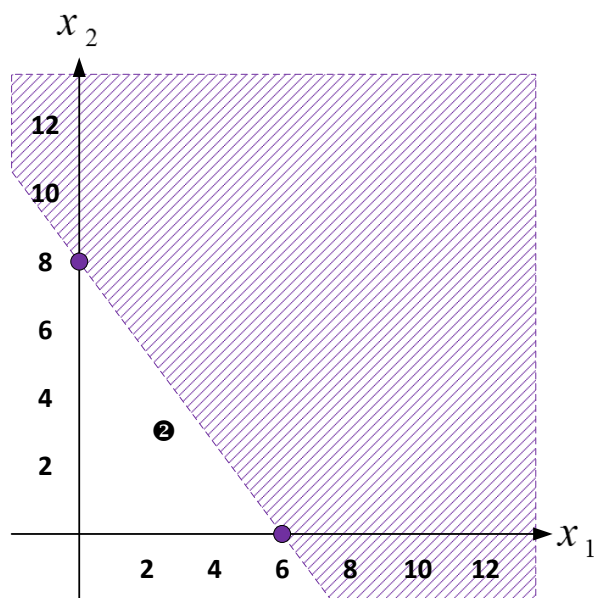
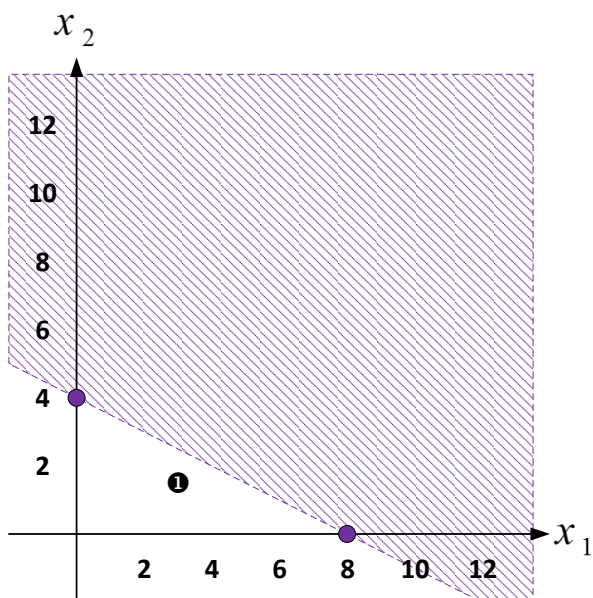
$$\text{❷ : } 4x_1 + 3x_2 = 24 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0, & x_2 = 8 \\ x_1 = 6, & x_2 = 0 \end{cases}$$

برای نقطه بهینه هم خواهیم داشت :

$$\text{❶ : } 6x_1 + 3x_2 = 36 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0, & x_2 = 12 \\ x_1 = 6, & x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{❷ : } 6x_1 + 3x_2 = 30 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0, & x_2 = 10 \\ x_1 = 5, & x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1^* = 0, \quad x_2^* = 8, \quad Z^* = Z_A = 24$$



حالت خاص : ناحیه جواب بی کران

مثال: مدل زیر را به روش ترسیمی حل کنید.

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 4x_2$$

s. t

❶: $2x_1 + x_2 \leq 8$

❷: $-x_1 + 2x_2 \leq 6$

❸: $x_1 \leq 3$

❹: $x_1 + x_2 \leq 10$

❺: $x_1, x_2 \geq 0$

❶:

$$2x_1 + x_2 = 8 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0, x_2 = 8 \\ x_1 = 4, x_2 = 0 \end{cases}$$

❷:

$$-x_1 + 2x_2 = 6 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0, x_2 = 3 \\ x_1 = 1, x_2 = 3.5 \end{cases}$$

❹:

$$x_1 + x_2 = 10 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0, x_2 = 10 \\ x_1 = 10, x_2 = 0 \end{cases}$$

برای نقطه بهینه هم خواهیم داشت:

❶: $3x_1 + 4x_2 = 12 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0, x_2 = 3 \\ x_1 = 4, x_2 = 0 \end{cases}$

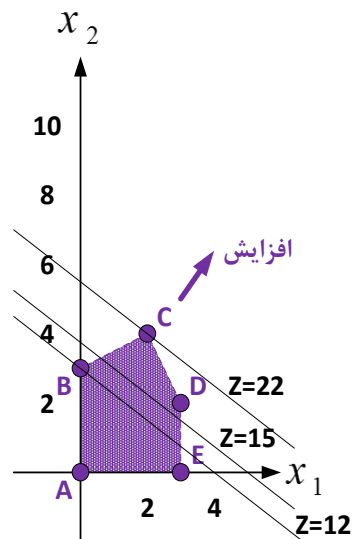
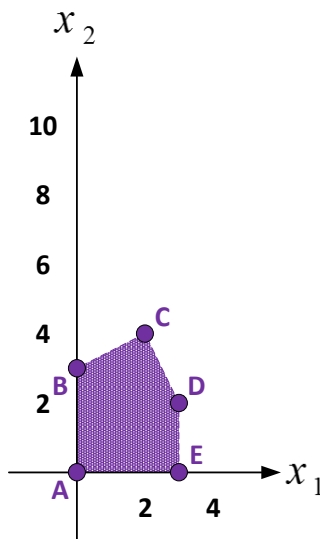
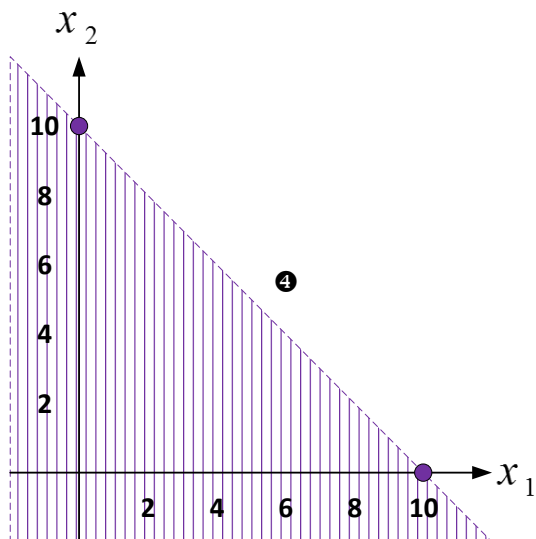
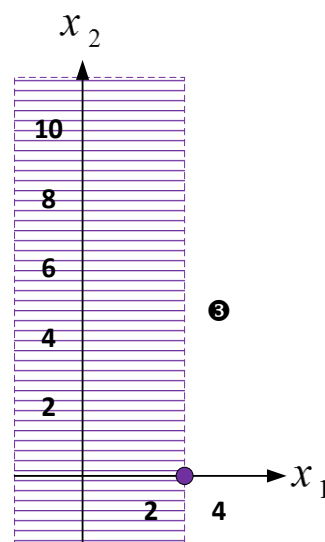
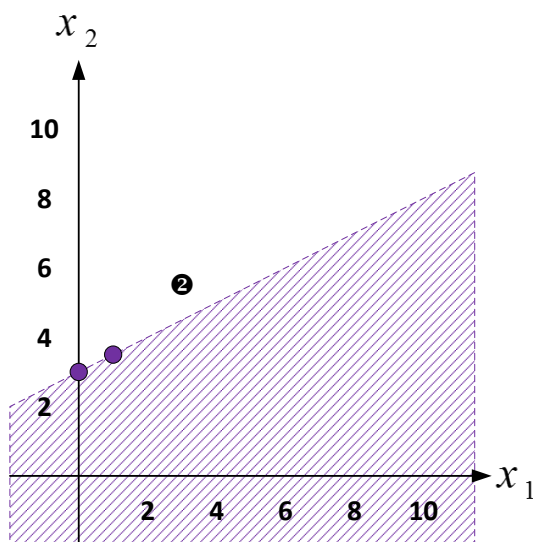
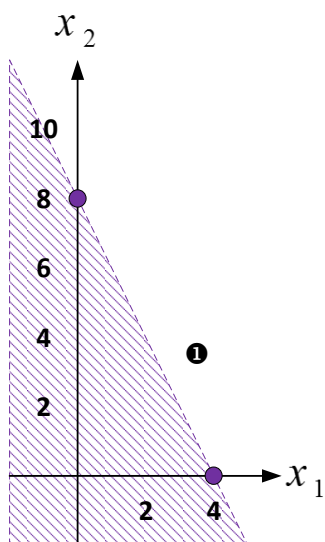
❷: $3x_1 + 4x_2 = 15 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0, x_2 = 3.75 \\ x_1 = 5, x_2 = 0 \end{cases}$

مختصات نقطه C که از برخورد محدودیت‌های اول و دوم بدست می‌آید، بصورت زیر بدست خواهد آمد

$$C \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 8 \\ -x_1 + 2x_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 8 \\ -2x_1 + 4x_2 = 12 \end{cases} \Rightarrow 5x_2 = 20 \Rightarrow x_2 = 4, x_1 = 2$$

$$C(2, 4) \Rightarrow Z_C = 3(2) + 4(4) = 22$$

$$\Rightarrow x_1^* = 2, x_2^* = 4, Z^* = Z_C = 22$$



حالت دوم : فاقد ناحیهٔ موجه (فاقد جواب) :

این حالت در دنیای واقعی ، معمولاً به علت اشتباه بودن مدل ، اتفاق خواهد افتاد. هرگاه در یک مسئله نتوان ناحیهٔ مشترکی پیدا کرد که همهٔ محدودیت‌های مدل در آن صادق باشد ، آنگاه مسئله فاقد ناحیهٔ موجه و لذا فاقد جواب است.

مثال : مدل زیر را به روش ترسیمی حل کنید.

$$\text{Max } Z = 5x_1 + 3x_2$$

s. t

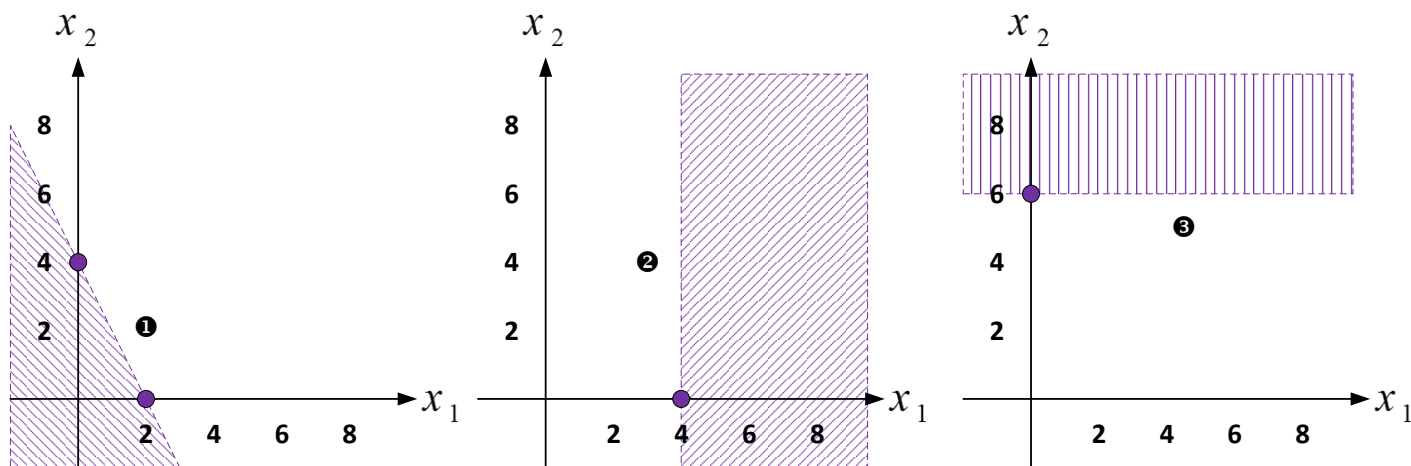
$$\textcircled{1} : 4x_1 + 2x_2 \leq 8$$

$$\textcircled{2} : x_1 \geq 4$$

$$\textcircled{3} : x_2 \geq 6$$

$$\textcircled{4} : x_1, x_2 \geq 0$$

$$\textcircled{1} : 4x_1 + 2x_2 = 8 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 & , & x_2 = 4 \\ x_1 = 2 & , & x_2 = 0 \end{cases}$$



این مدل فاقد ناحیهٔ موجه است و لذا جواب ندارد.

حالت سوم : جواب بهینه چندگانه :

هرگاه در یک مدل برنامه ریزی خطی ، معادله حدی یکی از محدودیت‌ها ، با خط تابع هدف موازی باشد ، مسئله می‌تواند دارای جواب بهینه چندگانه باشد. اگر در یک مدل ، شیب تابع هدف با شیب یکی از محدودیت‌ها برابر باشد ، ممکن است جزء این حالت باشد ولی بایستی آنرا بررسی کنیم.

مثال : مدل زیر را به روش ترسیمی حل کنید.

$$\text{Max } Z = 40x_1 + 30x_2$$

s. t

$$\textcircled{1} : x_1 + 2x_2 \leq 40$$

$$\textcircled{2} : 4x_1 + 3x_2 \leq 120$$

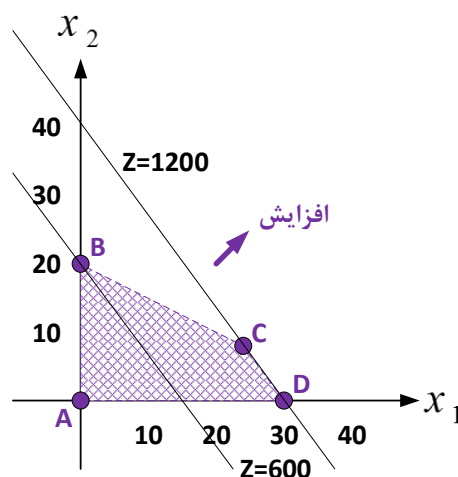
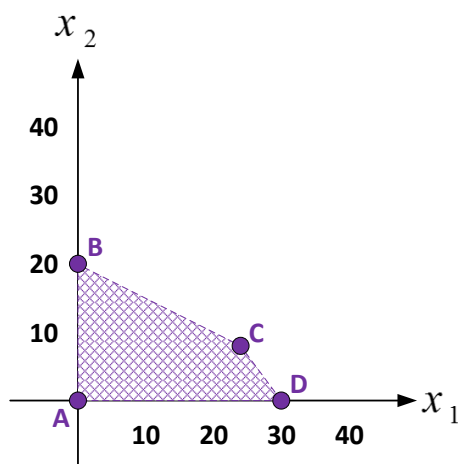
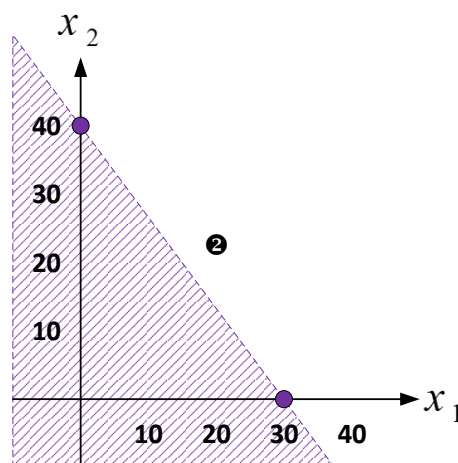
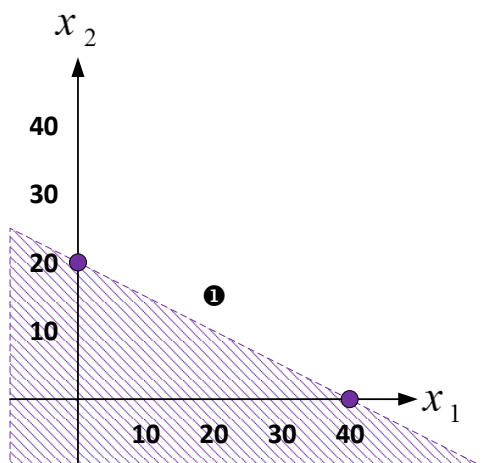
$$\textcircled{3} : x_1, x_2 \geq 0$$

$$\textcircled{1} : x_1 + 2x_2 = 40 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 & , & x_2 = 20 \\ x_1 = 40 & , & x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} : 4x_1 + 3x_2 = 120 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 & , & x_2 = 40 \\ x_1 = 30 & , & x_2 = 0 \end{cases}$$

برای نقطه بهینه هم خواهیم داشت :

$$\textcircled{1} : 40x_1 + 30x_2 = 600 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 & , & x_2 = 20 \\ x_1 = 15 & , & x_2 = 0 \end{cases}$$



جواب بهینه ، هر نقطه روی پاره خط CD است که همه این نقاط دارای Z یکسانی هستند که همان Z^* می‌باشد. برای مثال داریم :

$$D(30,0) \Rightarrow Z_D = Z^* = 1200$$

$$C(24,8) \Rightarrow Z_C = Z^* = 1200$$

که البته مختصات نقطه C را از مثال‌های قبلی می‌دانستیم.

نکته :

اگر بخواهیم این نوع مثال‌ها را از روش محاسباتی حل کنیم ، بایستی مختصات هر یک از نقاط A, B, C, D را در تابع هدف قرار دهیم. در اینصورت خواهید فهمید که نقاط C, D مقدار Z یکسانی دارند. پس جزء حالت خاص جواب بهینه چندگانه قرار خواهند گرفت.

حالت چهارم : جواب تبهگن :

هرگاه گوشه‌ای ، از بیش از دو معادله حدی (یعنی سه و یا بیشتر) تشکیل شده باشد ، آن گوشه را گوشه تبهگن می‌نامند که اگر این گوشه ، گوشه بهینه مدل نیز باشد ، مسئله دارای جواب بهینه تبهگن خواهد بود.

مثال : مدل زیر را به روش ترسیمی حل کنید.

$$\text{Max } Z = 4x_1 + 6x_2$$

s. t

$$\textcircled{1} : 6x_1 + 4x_2 \leq 24$$

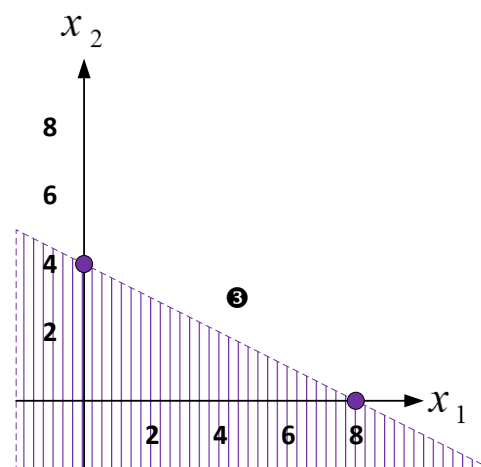
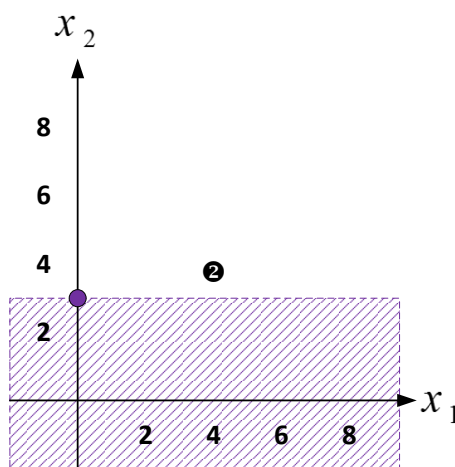
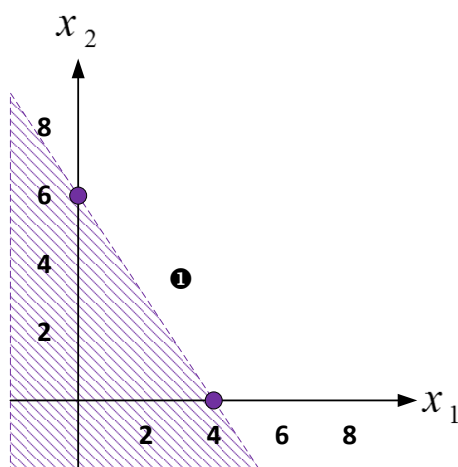
$$\textcircled{2} : x_2 \leq 3$$

$$\textcircled{3} : 5x_1 + 10x_2 \leq 40$$

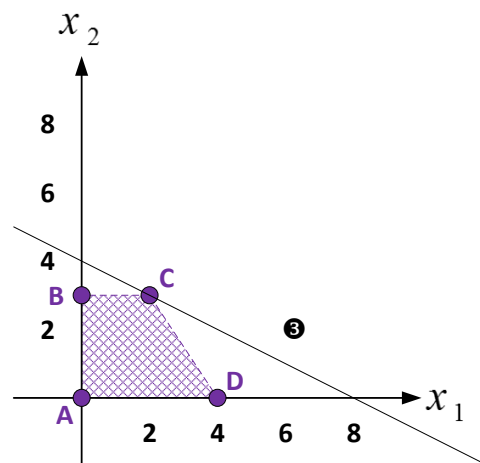
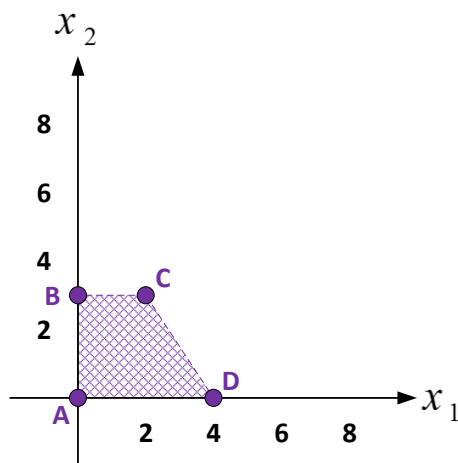
$$\textcircled{4} : x_1, x_2 \geq 0$$

$$\textcircled{1} : 6x_1 + 4x_2 = 24 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 & , & x_2 = 6 \\ x_1 = 4 & , & x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\textcircled{3} : 5x_1 + 10x_2 = 40 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 & , & x_2 = 4 \\ x_1 = 8 & , & x_2 = 0 \end{cases}$$



اگر ناحیه بدست آمده از محدودیت‌های اول و دوم را رسم کرده و سپس محدودیت سوم را اعمال کنیم ، خواهیم داشت :



همانطور که از اشکال فوق مشخص است ، نقطه C از برخورد دو محدودیت اول و دوم بدست آمده و محدودیت سوم هیچ نقشی در محدوده بدست آمده ندارد. لذا محدودیت سوم را اصطلاحاً محدودیت زائد یا تباه شده می‌نامند. لذا این نقطه ، گوشه تبهگن است. حال به بررسی نقطه بهینه از روش محاسباتی می‌پردازیم :

$$A(0,0) \Rightarrow Z_A = 4(0) + 6(0) = 0$$

$$B(0,3) \Rightarrow Z_B = 4(0) + 6(3) = 18$$

$$C(?,?) \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 3 \\ 3x_1 + 4x_2 = 24 \end{cases} \Rightarrow x_2 = 3, \quad x_1 = 2 \Rightarrow Z_C = Z^* = 4(2) + 6(3) = 26$$

$$D(4,0) \Rightarrow Z_D = 4(4) + 6(0) = 16$$

و چون گوشه بهینه همان نقطه بهینه در مدل شد ، این مدل دارای جواب بهینه تبهگن است.

تمرین : مدل زیر را به روش ترسیمی حل کنید.

$$\text{Max } Z = 6x_1 - 2x_2$$

s. t

$$\textcircled{1} : 2x_1 - x_2 \leq 2$$

$$\textcircled{2} : x_1 \leq 4$$

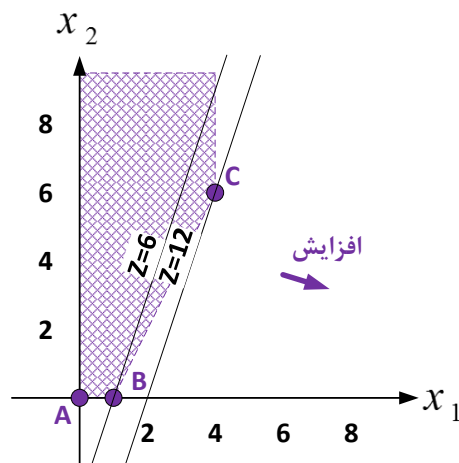
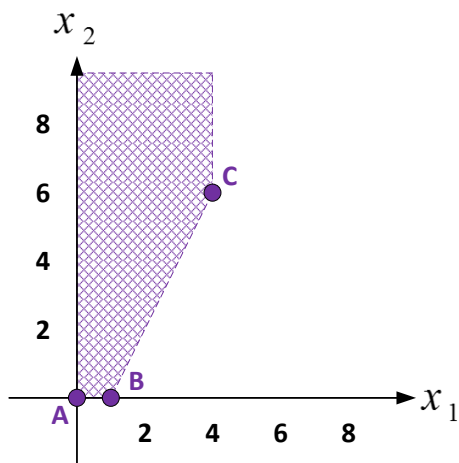
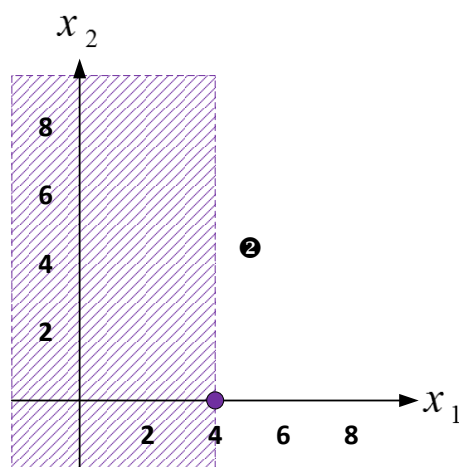
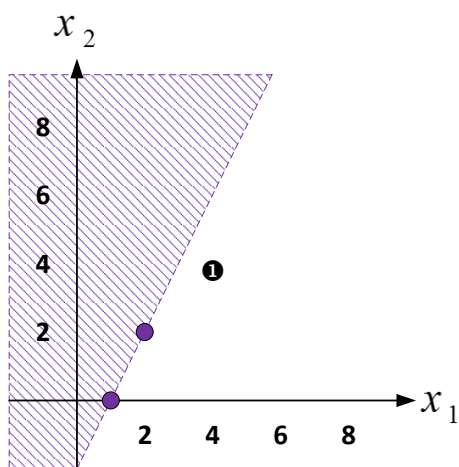
$$\textcircled{3} : x_1, x_2 \geq 0$$

$$\textcircled{1} : 2x_1 - x_2 = 2 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 & , & x_2 = 2 \\ x_1 = 1 & , & x_2 = 0 \end{cases}$$

برای نقطه بهینه هم خواهیم داشت :

$$\textcircled{1} : 6x_1 - 2x_2 = 12 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 & , & x_2 = 3 \\ x_1 = 2 & , & x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} : 6x_1 - 2x_2 = 6 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 & , & x_2 = 3 \\ x_1 = 1 & , & x_2 = 0 \end{cases}$$



این مدل ، جزء حالت اول ، یعنی حالت جواب بی کران است.

مختصات نقطه C که از برخورد محدودیت های اول و دوم بدست می آید ، بصورت زیر بدست خواهد آمد

$$C(?,?) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ 2x_1 - x_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 4 , \quad x_2 = 6 \Rightarrow Z_C = Z^* = 6(4) - 2(6) = 12$$

$$\Rightarrow x_1^* = 4 , \quad x_2^* = 6 , \quad Z^* = Z_C = 12$$

روش سیمپلکس (Simplex) :

در حل مسائل به روش سیمپلکس ، از مبدأ مختصات شروع کرده و از یک گوشه به گوشه‌ای بهتر حرکت می‌کنیم تا اینکه بهترین گوشه پیدا شود. این روش ، برای حل مسائل بهینه سازی خطی با متغیرهای یک اندیشه که از یک نوع بوده ، قابل استفاده است و برای حل مسئله به این روش ، گام‌های زیر را دنبال می‌کنیم :

۱. ابتدا مدل را به فرم استاندارد تبدیل می‌کنیم. یعنی :
 - a. تابع هدف مسئله باید Max باشد که اگر نبود ، با ضرب یک منفی در طرفین معادله تابع هدف ، آنرا از حالت Min به Max تبدیل می‌کنیم.
 - b. محدودیت‌های مدل را به فرم تساوی در می‌آوریم. به این شکل که اگر محدودیت‌ها به فرم کوچکتر مساوی باشد ، به سمت چپ آنها ، متغیر کمکی (کمبود) را اضافه می‌کنیم و اگر به فرم بزرگتر مساوی باشد ، متغیر کمکی (مازاد) را از سمت چپ کم می‌کنیم تا محدودیت‌ها به فرم تساوی تبدیل شوند. معمولاً این متغیر را با S نشان می‌دهند و داریم $S \geq 0$. گاهی به متغیر کمکی ، متغیر برابرساز نیز گفته می‌شود.
۲. مقادیر سمت راست تابع هدف را به سمت چپ منتقل می‌کنیم و جدول سیمپلکس را رسم می‌کنیم. این جدول در ابتدای مسئله باید دارای دو شرط اساسی زیر باشد :
 - a. ضریب متغیرهای اساسی در سطر تابع هدف باید صفر باشند.
 - b. متغیرهای اساسی در جدول باید تشکیل ماتریس یکه دهند.
۳. انتخاب متغیر ورودی : متغیر ورودی متغیری است که دارای منفی ترین ضریب در سطر تابع هدف باشد. ستون مربوط به این متغیر را ، ستون لولا می‌نامیم.
۴. انتخاب متغیر خروجی : متغیری است که دارای حداقل حاصل تقسیم مقادیر سمت راست بر عناصر مثبت ستون لولا باشد. سطر مربوط به این متغیر را ، سطر لولا می‌نامیم و عددی که در تقاطع سطر و ستون لولا قرار دارد را ، عدد لولا می‌نامند.
۵. پس از مشخص شدن متغیرهای ورودی و خروجی ، جدول بعدی سیمپلکس را با استفاده از دو فرمول زیر ایجاد می‌کنیم :

$$a. \quad \text{سطر لولای قدیم} = \frac{\text{سطر لولای جدید}}{\text{عدد لولا}}$$

$$b. \quad \text{مقدار سطر لولای جدید} \times \text{ضریب ستون لولا} - \text{مقدار سطر قدیم} = \text{مقدار سطر جدید}$$

ضریب ستون لولا : عددی است در ستون لولا و مقابل سطر لولا

۶. پس از ایجاد جدول جدید ، از گام سوم مجدداً الگوریتم را تکرار می‌کنیم. اما قبل از آن باید شرط بهینگی جدول را بررسی نمود که اگر جدول بهینه باشد به جواب نهایی مسئله رسیده‌ایم.
- شرط بهینگی : این است که هرگاه در سطر تابع هدف ، همه مقادیر در بازه متغیرها ، غیر منفی باشد ، آنگاه جدول بهینه است.

نکات :

- توجه داشته باشید که متغیرهای کمکی در تابع هدف نیز وجود دارند ولی ضرایب آنها صفر است.
- همیشه در هر تابلو از جدول سیمپلکس ، به تعداد محدودیت‌ها سطر وجود دارد (البته به غیر از سطر صفرم که مربوط به تابع هدف است)
- همیشه در هر تابلو از جدول سیمپلکس ، متغیرهایی که در بازه متغیرها موجودند ولی اساسی نیستند ، مقدارشان برابر صفر است.
- هر محدودیت در جدول سیمپلکس یک نماینده دارد که در شروع کار همان متغیرهای کمکی هستند.
- تابع هدف جزء بازه متغیرها نیست.
- مقادیر سمت راست در جدول سیمپلکس ، هیچ نقشی در تعیین تابع بهینه ندارند.
- متغیر خروجی : از بین بازه متغیرها ، متغیری که قرار است به عنوان متغیر اساسی وارد تابلوی بعدی در جدول سیمپلکس شود.
- متغیر ورودی : از بین متغیرهای اساسی ، متغیری که قرار است از متغیرهای اساسی در تابلوی بعدی حذف و به جای آن متغیر خروجی قرار بگیرد.

مثال : مدل زیر را به روش سیمپلکس حل کنید.

$$\text{Max } Z = 40x_1 + 50x_2$$

s. t

$$\textcircled{1} : x_1 + 2x_2 \leq 40$$

$$\textcircled{2} : 4x_1 + 3x_2 \leq 120$$

$$\textcircled{3} : x_1, x_2 \geq 0$$

در گام اول ، مدل را به فرم استاندارد بازنویسی می کنیم : (برای درک بهتر می توانید شکل مربوط به این مدل در [این صفحه](#) را مشاهده نمایید)

$$\text{Max } Z - 40x_1 - 50x_2 - 0s_1 - 0s_2 = 0$$

s. t

$$\textcircled{1} : x_1 + 2x_2 + s_1 = 40$$

$$\textcircled{2} : 4x_1 + 3x_2 + s_2 = 120$$

$$\textcircled{3} : x_1, x_2 \geq 0$$

$$\textcircled{4} : s_1, s_2 \geq 0$$

هم اکنون مدل آماده است تا درون جدول سیمپلکس قرار گیرد.

شرط اول در رسم جدول سیمپلکس در ابتدای مسئله

بازه متغیرها

متغیرهای اساسی		Z	X_1	X_2	S_1	S_2	مقادیر سمت راست Right Hand Side (RHS)
سطر صفرم مربوط به تابع هدف	Z_0	1	-40	-50	0	0	0
سطر اول مربوط به محدودیت اول	S_1	0	1	2	1	0	40
سطر دوم مربوط به محدودیت دوم	S_2	0	4	3	0	1	120

شرط دوم در رسم جدول سیمپلکس در ابتدای مسئله

ستون لولا

سطر لولا

مقدار متغیر کمکی اول
در مبدأ مختصات

مقدار متغیر کمکی دوم
در مبدأ مختصات

A

نکات :

- جدول فوق ، تابلوی اول جدول سیمپلکس است.
- در این تابلو داریم :

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad s_1 = 40, \quad s_2 = 120$$

که این ، مشخصات نقطه A است ؛ یعنی همان مبدأ مختصات.

در اینجا ، به S_1 و S_2 ، منابع بلا استفاده گفته می شود. معنی آن این است که اگر هیچ محصولی تولید نکرده باشید ، نیروی کار (که معادل S_1 است) و مواد اولیه شما (که معادل S_2 است) ، استفاده نشده است (منابع بلا استفاده).

- تنها در صورتی تابلوهای بعدی را رسم می کنیم که دو شرط ابتدائی مسئله در جدول سیمپلکس و در تابلوی اول برقرار باشد.
- اگر تابلوی اول درست بود (نکته قبلی) ، اقدام به تعیین متغیرهای ورودی و خروجی می کنیم.
- تعیین منفی ترین عدد در سطر مربوط به تابع هدف : -50 ولی چرا ؟ زیرا بالاترین سود را در بین محصولات دارد. در نتیجه ستون X_2 ، ستون لولاست. همچنین متغیر X_2 ، متغیر ورودی خواهد بود. ولی این متغیر به جای کدام متغیر کمکی (یعنی S_1 یا S_2) باید قرار بگیرد ؟

$$s_1 : \frac{40}{2} = 20, \quad s_2 : \frac{120}{3} = 40 \Rightarrow s_1 < s_2$$

پس S_1 متغیر خروجی و سطر اول ، سطر لولا در مدل ما خواهد بود. در نتیجه متغیر X_2 جایگزین متغیر S_1 در تابلوی بعدی خواهد بود. همچنین عدد لولا برابر ۲ است.

برای نوشتن تابلوی بعدی ، می توان از نکات زیر استفاده کرد :

- ستون مربوط به تابع هدف یا همان Z ، همواره ثابت است.
- در ستون لولا : عدد لولا برابر یک و مابقی صفر خواهند شد.
- ستون مربوط به متغیری که در تابلوی قبلی اساسی بوده و در تابلوی بعدی هم اساسی خواهد ماند ، هیچ تغییری نخواهد کرد.
- سعی کنید مقادیر تابلوی جدید را ، سطر به سطر محاسبه کرده و درون تابلوی جدید قرار دهید.

$\overline{\quad}$	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	$R.H.S$
Z_0	1	$-40 - (-50 \times 0.5)$	0	$0 - (-50 \times 0.5)$	0	$0 - (-50 \times 20)$
x_2	0	0.5	1	0.5	0	20
s_2	0	$4 - (3 \times 0.5)$	0	$0 - (3 \times 0.5)$	1	$120 - (3 \times 20)$

و خواهیم داشت :

$\overline{\quad}$	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	$R.H.S$
Z_0	1	-15	0	25	0	1000
x_2	0	0.5	1	0.5	0	20
s_2	0	$\frac{5}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	1	60

نکات :

- جدول فوق ، تابلوی دوم جدول سیمپلکس است.
- چون در بازه متغیرها و در سطر صفرم (مربوط به تابع هدف) ، هنوز عدد منفی وجود دارد (-15) ، پس باز هم بایستی ادامه دهیم.
- در این تابلو داریم :

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 20, \quad s_1 = 0, \quad s_2 = 60$$

که این ، مشخصات نقطه B است. معنی آن در دنیای واقعی این است که برای تولید ۲۰ واحد از محصول دوم ، بایستی ۴۰ نفر کار کرده و ۶۰ کیلوگرم از مواد اولیه مصرف شوند.

- تعیین منفی ترین عدد در سطر مربوط به تابع هدف : -15. در نتیجه ستون x_1 ، ستون لولاست. همچنین متغیر x_1 ، متغیر ورودی خواهد بود. ولی این متغیر به جای کدام متغیر کمکی (یعنی x_2 یا s_2) باید قرار بگیرد ؟

$$x_2 : \frac{20}{0.5} = 40, \quad s_2 : \frac{60}{\frac{5}{2}} = 24 \Rightarrow s_2 < x_2$$

پس s_2 متغیر خروجی و سطر دوم ، سطر لولا در مدل ما خواهد بود. در نتیجه متغیر x_1 جایگزین متغیر s_2 در تابلوی بعدی خواهد بود. همچنین عدد لولا برابر $\frac{5}{2}$ است.

$\overline{\quad}$	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	$R.H.S$
Z_0	1	0	0	$25 - (-15 \times \frac{3}{5})$	$0 - (-15 \times \frac{2}{5})$	$1000 - (-15 \times 24)$
x_2	0	0	1	$0.5 - (0.5 \times \frac{3}{5})$	$0 - (0.5 \times \frac{2}{5})$	$20 - (0.5 \times 24)$
x_1	0	1	0	$\frac{-3}{\frac{5}{2}} = \frac{-3}{5}$	$\frac{1}{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5}$	$\frac{60}{\frac{5}{2}} = \frac{120}{5} = 24$

و خواهیم داشت :

$\overline{\quad}$	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	$R.H.S$
Z_0	1	0	0	16	6	1360
x_2	0	0	1	$\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{5}$	8
x_1	0	1	0	$-\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	24

نکات :

- جدول فوق ، تابلوی سوم جدول سیمپلکس است.
- چون در بازه متغیرها و در سطر صفرم ، عدد منفی وجود ندارد ، پس به شرط بهینگی مدل رسیده و نیازی به ادامه دادن نیست. جدول فوق ، جدول بهینه مدل ما می باشد.
- در این تابلو داریم :

$$x_1 = x_1^* = 24, \quad x_2 = x_2^* = 8, \quad s_1 = 0, \quad s_2 = 0, \quad Z^* = 1360$$

که این ، مشخصات نقطه C است.

$$\text{Max } Z = x_1 + 3x_2 \quad \text{s.t.}$$

$$\textcircled{1} : x_1 \leq 9$$

$$\textcircled{2} : x_2 \leq 7$$

$$\textcircled{3} : 2x_1 + x_2 \leq 22$$

$$\textcircled{4} : x_1 + 4x_2 \leq 32$$

$$\textcircled{5} : x_1, x_2 \geq 0$$

تمرین: مدل زیر را به روش ترسیمی و سیمپلکس حل نمایید.

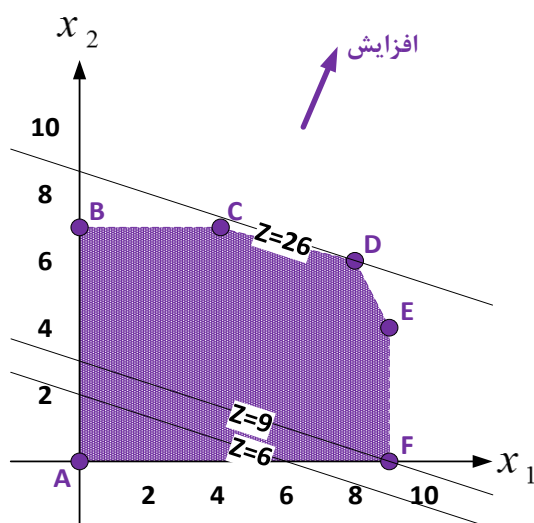
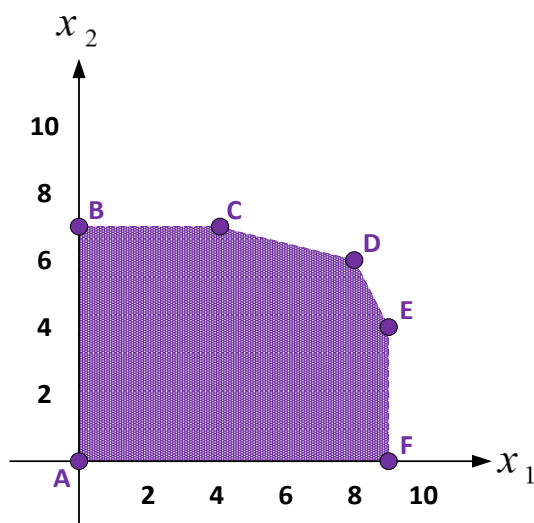
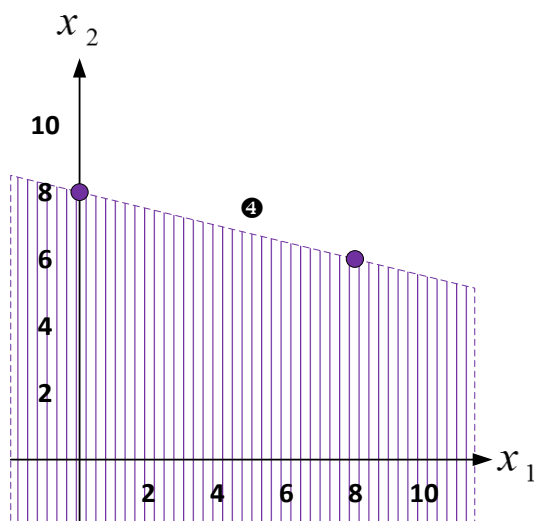
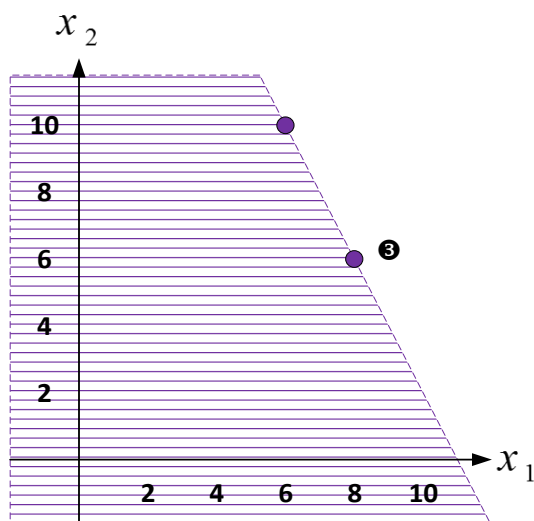
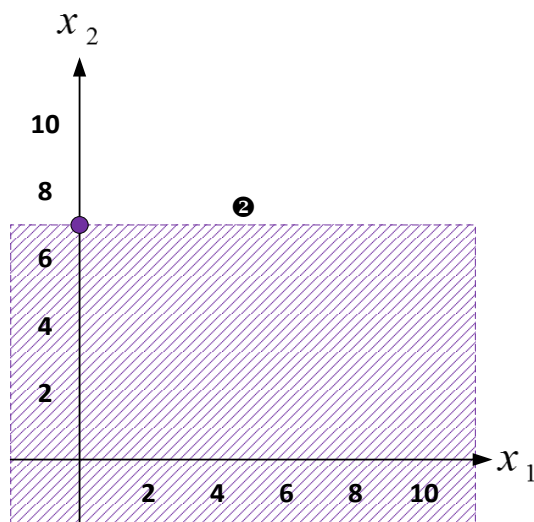
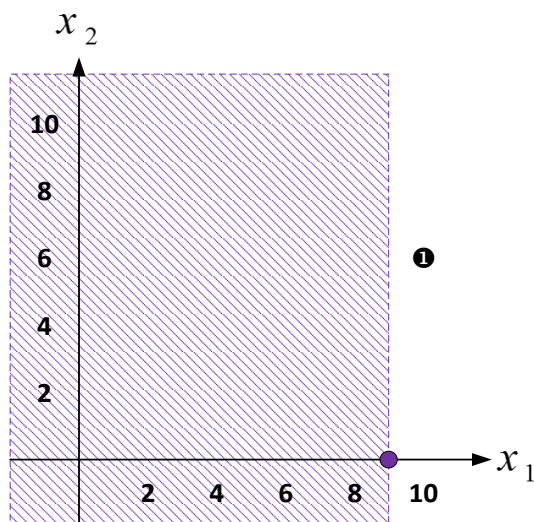
$$\textcircled{3} : 2x_1 + x_2 = 22 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 8 & , & x_2 = 6 \\ x_1 = 6 & , & x_2 = 10 \end{cases}$$

$$\textcircled{4} : x_1 + 4x_2 = 32 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 & , & x_2 = 8 \\ x_1 = 8 & , & x_2 = 6 \end{cases}$$

« برای نقطهٔ بهینه هم خواهیم داشت »

$$\textcircled{1} : x_1 + 3x_2 = 6 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 & , & x_2 = 2 \\ x_1 = 6 & , & x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} : x_1 + 3x_2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 & , & x_2 = 3 \\ x_1 = 9 & , & x_2 = 0 \end{cases}$$



$$\Rightarrow x_1^* = 8, \quad x_2^* = 6, \quad Z^* = Z_D = 26$$

برای روش سیمپلکس خواهیم داشت :

$$\text{Max } Z -x_1 -3x_2 +0s_1 +0s_2 +0s_3 +0s_4 =0 \quad \text{s.t.}$$

$$\textcircled{1} : x_1 + s_1 = 9 \quad \textcircled{2} : x_2 + s_2 = 7 \quad \textcircled{3} : 2x_1 + x_2 + s_3 = 22 \quad \textcircled{4} : x_1 + 4x_2 + s_4 = 32 \quad \textcircled{5} : x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0$$

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	$R.H.S$
Z_0	1	-1	-3	0	0	0	0	0
s_1	0	1	0	1	0	0	0	9
s_2	0	0	1	0	1	0	0	7
s_3	0	2	1	0	0	1	0	22
s_4	0	1	4	0	0	0	1	32

« تابلوی اول »

ستون لولا = متغیر ورودی x_2 سطر لولا = متغیر خروجی s_2

عدد لولا = 1

نقطه A

شرط بهینگی = $\square$ شرط ادامه دادن = $\square$

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	$R.H.S$
Z_0	1	-1	0	0	3	0	0	21
s_1	0	1	0	1	0	0	0	9
x_2	0	0	1	0	1	0	0	7
s_3	0	2	0	0	-1	1	0	15
s_4	0	1	0	0	-4	0	1	4

« تابلوی دوم »

ستون لولا = متغیر ورودی x_1 سطر لولا = متغیر خروجی s_4

عدد لولا = 1

نقطه B

شرط بهینگی = $\square$

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	$R.H.S$
Z_0	1	0	0	0	-1	0	1	25
s_1	0	0	0	1	4	0	-1	5
x_2	0	0	1	0	1	0	0	7
s_3	0	0	0	0	7	1	-2	7
x_1	0	1	0	0	-4	0	1	4

« تابلوی سوم »

ستون لولا = متغیر ورودی s_2 سطر لولا = متغیر خروجی s_3

عدد لولا = 7

نقطه C

شرط بهینگی = $\square$

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	$R.H.S$
Z_0	1	0	0	0	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{5}{7}$	26
s_1	0	0	0	1	0	$-\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$	1
x_2	0	0	1	0	0	$-\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	6
s_2	0	0	0	0	1	$\frac{1}{7}$	$-\frac{2}{7}$	1
x_1	0	1	0	0	0	$\frac{4}{7}$	$-\frac{1}{7}$	8

« تابلوی چهارم »

نقطه D

شرط بهینگی = $\square$

$$\Rightarrow x_1 = x_1^* = 8, \quad x_2 = x_2^* = 6, \quad s_1 = 1, \quad s_2 = 1, \quad s_3 = 0, \quad s_4 = 0 \Rightarrow Z^* = Z_D = 26$$

روش M بزرگ :

برای حل مسائلی که دارای محدودیت‌های بزرگتر مساوی و یا مساوی هستند ، بکار برده می‌شود.

از آنجائیکه شروع جدول سیمپلکس از مبدأ مختصات است و در اینگونه مسائل (که در خط قبل ذکر شد) معمولاً مبدأ مختصات جزء ناحیه موجه مدل قرار نمی‌گیرد ، ناچاریم ناحیه موجه را بطور کاذب بزرگ کنیم که این کار با استفاده از متغیر مصنوعی صورت می‌گیرد. متغیر مصنوعی ، نه متغیر کمبود است و نه متغیر مازاد. متغیر مصنوعی ، ناحیه موجه مدل را بگونه‌ای بزرگتر می‌کند که مبدأ مختصات به عنوان یک جواب موجه اساسی تلقی می‌شود و هیچ معنای فیزیکی و واقعی ندارد. بنابراین در اینگونه مسائل ، گام‌های زیر را به ترتیب طی می‌کنیم :

۱. گام اول : استاندارد سازی مسئله ؛ یعنی تابع هدف را Max و محدودیت‌ها را با استفاده از متغیر کمکی برابر می‌کنیم.
۲. گام دوم : متغیر مصنوعی R را به سمت چپ محدودیت‌هایی که به فرم مساوی و یا بزرگتر مساوی هستند ، اضافه می‌کنیم. با اضافه کردن R ، ناحیه موجه بطور کاذب بزرگ می‌شود.
۳. گام سوم : برای جلوگیری از قرار گرفتن جواب بهینه روی یکی از نقاط گوشه منطقه موجه ناشی از اضافه شدن متغیر مصنوعی ، از تابع هدف استفاده می‌شود ؛ یعنی در تابع هدف ، جریمه‌ای معادل M بزرگ (که M ، عددی بسیار بزرگ و مثبت است) به متغیر مصنوعی R در تابع هدف تعلق می‌گیرد ؛ یعنی مقدار MR را از سمت راست تساوی تابع هدف که بصورت Max است ، کم می‌کنیم.
۴. گام چهارم : در مرحله بعدی ، مسئله را به روش سیمپلکس معمولی حل می‌نمائیم. اگر مسئله دارای نقطه موجه و جواب بهینه باشد ، در جدول نهایی ، مقدار متغیر مصنوعی R صفر خواهد شد که اگر صفر نشد ، یعنی این مسئله فاقد جواب است.

مثال : مسأله زیر را به روش M بزرگ حل نمائید. (برای درک بهتر می‌توانید شکل مربوط به این مدل در [این صفحه](#) را مشاهده نمائید)

$$\text{Min } Z = 6x_1 + 2x_2 \quad \text{s.t.}$$

$$\textcircled{1} : 2x_1 + 4x_2 \geq 16$$

$$\textcircled{2} : 4x_1 + 3x_2 \geq 24$$

$$\textcircled{3} : x_1, x_2 \geq 0$$

مسئله بصورت Min می‌باشد. پس ابتدا آنرا بصورت استاندارد باز نویسی می‌کنیم.

$$\text{Max } (-Z) = -6x_1 - 2x_2 \quad \text{s.t.}$$

$$\textcircled{1} : 2x_1 + 4x_2 - s_1 = 16$$

$$\textcircled{2} : 4x_1 + 3x_2 - s_2 = 24$$

$$\textcircled{3} : x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$$

مبدأ مختصات جزء محدوده ما نیست. پس متغیر مصنوعی را در آن اعمال کرده و آنرا برای حل بوسیله سیمپلکس معمولی آماده می‌کنیم.

$$\text{Max } (-Z) = -6x_1 - 2x_2 - MR_1 - MR_2 \Rightarrow \text{Max } (-Z) + 6x_1 + 2x_2 + MR_1 + MR_2 = 0 \quad \text{s.t.}$$

$$\textcircled{1} : 2x_1 + 4x_2 - s_1 + R_1 = 16$$

$$\textcircled{2} : 4x_1 + 3x_2 - s_2 + R_2 = 24$$

$$\textcircled{3} : x_1, x_2, s_1, s_2, R_1, R_2 \geq 0$$

حال می‌توانیم اطلاعات را درون جدول سیمپلکس قرار دهیم :

	$\frac{Z}{Z_0}$	$\frac{x_1}{6}$	$\frac{x_2}{2}$	$\frac{s_1}{0}$	$\frac{s_2}{0}$	$\frac{R_1}{M}$	$\frac{R_2}{M}$	$\frac{R.H.S}{0}$
R_1	0	2	4	-1	0	1	0	16
R_2	0	4	3	0	-1	0	1	24

نکات :

- به تابلوی فوق ، تابلوی مقدماتی گفته می‌شود. زیرا شرط دوم برای ادامه دادن را دارد ولی شرط اول در آن برقرار نیست (ضریب متغیرهای اساسی در سطر تابع هدف بایستی صفر باشد)
- برای اینکه ضریب متغیرهای اساسی یا همان M ها را صفر کنیم ، یک عمل سطری روی ماتریس فوق انجام می‌دهیم که هیچ تغییری در نتیجه مدل نخواهد داشت :
(سطر $M \times R_1$) + (سطر $-M \times R_2$) + سطر صفرم = سطر صفرم
- در نتیجه عملیات فوق ، متغیر M از ستون‌هایی که باید صفر باشند حذف شده و لذا تابلوی مقدماتی قابل تبدیل به تابلوی اول خواهد شد.
- هر محدودیت ، یک نماینده (سطر) در جدول سیمپلکس دارد و اولویت با R است. اگر R وجود نداشت از S استفاده می‌کنیم.

تابلوی اول جدول سیمپلکس بصورت زیر خواهد بود :

	$\frac{Z}{Z_0}$	$\frac{x_1}{-6M+6}$	$\frac{x_2}{-7M+2}$	$\frac{s_1}{M}$	$\frac{s_2}{M}$	$\frac{R_1}{0}$	$\frac{R_2}{0}$	$\frac{R.H.S}{-40M}$
R_1	0	2	4	-1	0	1	0	16
R_2	0	4	3	0	-1	0	1	24

- ستون لولا : x_2
- سطر لولا : R_1
- عدد لولا : 4

$$\begin{array}{c|ccccccc|c}
 \overline{Z_0} & \frac{Z}{-1} & \frac{x_1}{-5/2M+5} & \frac{x_2}{0} & \frac{s_1}{-3/4M+1/2} & \frac{s_2}{M} & \frac{R_1}{7/4M-1/2} & \frac{R_2}{0} & \frac{R.H.S}{-12M+8} \\
 x_2 & 0 & 1/2 & 1 & -1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 4 \\
 R_2 & 0 & \boxed{5/2} & 0 & 3/4 & -1 & -3/4 & 1 & 12
 \end{array}$$

« تابلوی دوم »

- ستون لولا : x_1
- سطر لولا : R_2
- عدد لولا : $5/2$

نکته :

- نقطه بدست آمده در تابلوی دوم ، نقطه $x_2 = 4$ ، $x_1 = 0$ است که اگر شکل مدل را رسم کنید ، خواهید فهمید که این نقطه در ناحیه موجه کاذب است. این نکته ، از اینکه هنوز متغیر R ، جزء متغیرهای اساسی قرار دارد نیز ، قابل تشخیص است.

$$\begin{array}{c|ccccccc|c}
 \overline{Z_0} & \frac{Z}{-1} & \frac{x_1}{0} & \frac{x_2}{0} & \frac{s_1}{-1} & \frac{s_2}{2} & \frac{R_1}{M+1} & \frac{R_2}{M-2} & \frac{R.H.S}{-16} \\
 x_2 & 0 & 0 & 1 & -2/5 & 1/5 & 2/5 & -1/5 & 8/5 \\
 x_1 & 0 & 1 & 0 & \boxed{3/10} & -2/5 & -3/10 & 2/5 & 24/5
 \end{array}$$

« تابلوی سوم »

- ستون لولا : s_1
- سطر لولا : x_1
- عدد لولا : $3/10$

نکته :

- نقطه بدست آمده در تابلوی سوم ، نقطه برخورد دو محدودیت است که داخل ناحیه موجه است ، زیرا دیگر متغیر R ، جزء متغیرهای اساسی قرار ندارد.

$$\begin{array}{c|ccccccc|c}
 \overline{Z_0} & \frac{Z}{-1} & \frac{x_1}{2} & \frac{x_2}{0} & \frac{s_1}{0} & \frac{s_2}{1} & \frac{R_1}{M} & \frac{R_2}{M-1} & \frac{R.H.S}{-24} \\
 x_2 & 0 & 4/3 & 1 & 0 & -1/3 & 0 & 1/3 & 8 \\
 s_1 & 0 & 10/3 & 0 & 1 & -4/3 & -1 & 4/3 & 16
 \end{array}$$

« تابلوی چهارم »

شرط بهینگی : ☒

نکته :

- به شرط بهینگی رسیدیم ولی در اینگونه مسائل ، بایستی ببینیم متغیر R از متغیرهای اساسی حذف شده یا خیر. اگر R حذف شده باشد ، به جواب بهینه مدل رسیده ایم ؛ ولی اگر R حذف نشده باشد ، مدل فاقد جواب بهینه خواهد بود. البته در اینجا R حذف شده است.

$$\Rightarrow x_1^* = 0 , \quad x_2^* = 8 , \quad Z^* = -(-24) = 24$$

توجه کنید که منفی اول در محاسبه Z^* ، به این علت است که در ابتدا مسئله را استاندارد سازی نمودیم که در طی آن ، با ضرب یک منفی در تابع هدف ، Min را به Max تبدیل نمودیم.

- تابلوی فوق در دنیای واقعی بدین معنی است که محصول اول را از چرخه تولید بیرون آوردیم و لذا مواد اولیه مربوط به آن آزاد و بلا استفاده خواهد شد.

نکته بسیار مهم و کاربردی :

جهت استاندارد سازی محدودیت‌ها ، سه حالت کلی پیش خواهد آمد :

۱. محدودیت مدل ، بزرگتر مساوی باشد آنگاه
 ۲. محدودیت مدل ، کوچکتر مساوی باشد آنگاه
 ۳. محدودیت مدل ، مساوی باشد آنگاه
- به متغیرهای S ، R نیاز خواهیم داشت.
- تنها به متغیر S نیاز خواهیم داشت.
- تنها به متغیر R نیاز خواهیم داشت.

نکته :

- متغیر S یا متغیر برابر ساز ، بسته به محدودیت ، اضافه و یا کسر خواهد شد ؛ در حالیکه متغیر R همواره اضافه خواهد شد.

مثال : مسأله زیر را به روش M بزرگ حل نمائید. (مثال کامل شامل انواع محدودیت ها)

$$\text{Min } Z = -3x_1 + x_2 + x_3 \quad \text{s.t.}$$

$$\textcircled{1} : x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 11$$

$$\textcircled{2} : -4x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 3$$

$$\textcircled{3} : -2x_1 + x_3 = 1$$

$$\textcircled{4} : x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$\text{Max } (-Z) = 3x_1 - x_2 - x_3 \quad \text{s.t.}$$

$$\textcircled{1} : x_1 - 2x_2 + x_3 + s_1 = 11$$

$$\textcircled{3} : -2x_1 + x_3 + R_2 = 1$$

$$\textcircled{2} : -4x_1 + x_2 + 2x_3 - s_2 + R_1 = 3$$

$$\textcircled{4} : x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, R_1, R_2 \geq 0$$

$$\text{Max } (-Z) = 3x_1 - x_2 - x_3 - MR_1 - MR_2 \quad \text{s.t.}$$

$$\text{Max } (-Z) - 3x_1 + x_2 + x_3 + MR_1 + MR_2 = 0 \quad \text{s.t.}$$

$$\textcircled{1} : x_1 - 2x_2 + x_3 + s_1 = 11$$

$$\textcircled{3} : -2x_1 + x_3 + R_2 = 1$$

$$\textcircled{2} : -4x_1 + x_2 + 2x_3 - s_2 + R_1 = 3$$

$$\textcircled{4} : x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, R_1, R_2 \geq 0$$

ابتدا بایستی تابع هدف را به Max تبدیل کنیم ، سپس محدودیت ها را به مساوی.

حال که متغیر R بوجود آمد ، بایستی MR را از تابع هدف کم کنیم.

حال همه جملات در تابع هدف را به یک سمت می بریم. خواهیم داشت :

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	R_1	R_2	RHS
Z_0	-1	-3	1	1	0	0	M	M	0
s_1	0	1	-2	1	1	0	0	0	11
R_1	0	-4	1	2	0	-1	1	0	3
R_2	0	-2	0	1	0	0	0	1	1

« تابلوی مقدماتی »

شرط اول : $\boxtimes$

شرط دوم : $\boxtimes$

نکته : بررسی شرط دوم ، برای

متغیرهای اساسی انجام می شود

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	R_1	R_2	RHS
Z_0	-1	$6M-3$	$-M+1$	$-3M+1$	0	M	0	0	$-4M$
s_1	0	1	-2	1	1	0	0	0	11
R_1	0	-4	1	2	0	-1	1	0	3
R_2	0	-2	0	1	0	0	0	1	1

« تابلوی اول »

ستون لولا : x_3

سطر لولا : R_2

عدد لولا : 1

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	R_1	R_2	RHS
Z_0	-1	-1	$-M+1$	0	0	M	0	$3M-1$	$-M-1$
s_1	0	3	-2	0	1	0	0	-1	10
R_1	0	0	1	0	0	-1	1	-2	1
x_2	0	-2	0	1	0	0	0	1	1

« تابلوی دوم »

ستون لولا : x_2

سطر لولا : R_1

عدد لولا : 1

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	R_1	R_2	RHS
Z_0	-1	-1	0	0	0	1	$M-1$	$M+1$	-2
s_1	0	3	0	0	1	-2	2	-5	12
x_2	0	0	1	0	0	-1	1	-2	1
x_3	0	-2	0	1	0	0	0	1	1

« تابلوی سوم »

ستون لولا : x_1

سطر لولا : s_1

عدد لولا : 3

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	R_1	R_2	RHS
Z_0	-1	0	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$M-\frac{1}{3}$	$M-\frac{2}{3}$	2
x_1	0	1	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{5}{3}$	4
x_2	0	0	1	0	0	-1	1	-2	1
x_3	0	0	0	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{7}{3}$	9

« تابلوی چهارم »

شرط پهنگی : $\boxtimes$

به این علت مدل دارای جواب

است ؛ زیرا دیگر متغیر اساسی

R نداریم

$$\Rightarrow x_1^* = 4, \quad x_2^* = 1, \quad x_3^* = 9, \quad Z^* = -(2) = -2$$

در این حالت می گوئیم : تولید ، هزینه بر است

روش دو مرحله‌ای یا دو فازی :

این روش برای مسائلی مورد استفاده قرار می‌گیرد که محدودیت‌هایی از نوع مساوی و یا بزرگتر مساوی دارند. روش دیگر برای این نوع مسائل ، همان روش M بزرگ است ولی دو نکته حائز اهمیت است :

۱. اگر مسئله دارای محدودیت کوچکتر مساوی باشد و از روش M بزرگ برای حل آن استفاده کنید ، مسئله در نهایت به یک سیمپلکس ساده تبدیل خواهد شد و به جواب خواهد رسید ؛ درحالیکه به هیچ عنوان از روش دو مرحله‌ای قابل حل نخواهد بود. در واقع ، دو روش آخر ، یعنی M بزرگ و دو مرحله‌ای برای مسائلی با محدودیت‌های مختلط و یا از نوع مساوی یا بزرگتر مساوی قابل استفاده خواهند بود.
 ۲. روش دو مرحله‌ای به علت ثبات کم محاسبات کامپیوتری در روش M بزرگ ، ارائه شد.
- این روش شامل دو مرحله به شرح زیر است :

۱. مرحله اول : پیدا کردن جواب موجه ابتدائی با استفاده از تابع هدف مصنوعی : در این مرحله ، مجموع متغیرهای مصنوعی را در حالت Min به جای تابع هدف اصلی در مسئله قرار داده و شروع به حل مسئله می‌نمائیم. (حالت کلی این مجموع بصورت $Min R_0 = \sum R_i$ است). اگر مسئله دارای یک ناحیه موجه باشد ، مقدار این تابع هدف مساوی با صفر خواهد شد و این بدان معنی است که همه متغیرهای مصنوعی صفر شده‌اند. در این حالت می‌توانیم به مرحله دوم رفته و حل مسئله را ادامه دهیم.

۲. مرحله دوم : پیدا کردن جواب بهینه مسئله با استفاده از تابع هدف اصلی در مسئله : از تابلوی بهینه بدست آمده در مرحله اول ، به عنوان جواب اولیه برای مسئله استفاده می‌کنیم ؛ یعنی به جای ردیف R_0 در تابلوی نهایی مرحله اول ، تابع هدف اصلی مسئله به فرم Max قرار می‌گیرد و سپس عملیات معمول سیمپلکس ، پس از کنترل شرایط متغیرهای اساسی انجام می‌گیرد تا به جواب بهینه برسیم.

مثال : مسأله زیر را به روش دو مرحله‌ای حل کنید :

$$Min Z = -x_1 + 2x_2 - x_3 \quad s. t$$

$$\textcircled{1} : x_1 + x_2 + x_3 = 6 \quad \textcircled{2} : -2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 8 \quad \textcircled{3} : 2x_2 + 3x_3 = 10 \quad \textcircled{4} : x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

ابتدا بایستی تابع هدف را به Max تبدیل کنیم ، سپس محدودیت‌ها را به مساوی.

$$Max (-Z) = x_1 - 2x_2 + x_3 \quad s. t$$

$$\textcircled{1} : x_1 + x_2 + x_3 + R_1 = 6 \quad \textcircled{2} : -2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + R_2 = 8$$

$$\textcircled{3} : 2x_2 + 3x_3 + R_3 = 10 \quad \textcircled{4} : x_1, x_2, x_3, R_1, R_2, R_3 \geq 0$$

مرحله اول :

به دلیل اینکه مسأله به روش دو مرحله‌ای باید حل شود ، لذا تابع هدف مصنوعی را ایجاد می‌کنیم :

$$Min R_0 = R_1 + R_2 + R_3 \quad s. t$$

$$\textcircled{1} : x_1 + x_2 + x_3 + R_1 = 6 \quad \textcircled{2} : -2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + R_2 = 8$$

$$\textcircled{3} : 2x_2 + 3x_3 + R_3 = 10 \quad \textcircled{4} : x_1, x_2, x_3, R_1, R_2, R_3 \geq 0$$

ابتدا بایستی تابع هدف مصنوعی را به Max تبدیل کنیم ؛ یعنی استاندارد سازی :

$$Max (-R_0) = -R_1 - R_2 - R_3 \Rightarrow Max (-R_0) + R_1 + R_2 + R_3 = 0 \quad s. t$$

$$\textcircled{1} : x_1 + x_2 + x_3 + R_1 = 6 \quad \textcircled{2} : -2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + R_2 = 8$$

$$\textcircled{3} : 2x_2 + 3x_3 + R_3 = 10 \quad \textcircled{4} : x_1, x_2, x_3, R_1, R_2, R_3 \geq 0$$

	R	x_1	x_2	x_3	R_1	R_2	R_3	RHS
R_0	-1	0	0	0	1	1	1	0
R_1	0	1	1	1	1	0	0	6
R_2	0	-2	2	4	0	1	0	8
R_3	0	0	2	3	0	0	1	10

« تابلوی مقدماتی »

شرط اول : ☒

شرط دوم : ☒

نکته :

همواره برای ایجاد شرط اساسی اول در هر تابلو ، سطرهای مربوط به متغیرهای اساسی را در قرینه عددی که در ضریب سطر صفرم (تابع هدف) قرار گرفته ضرب کرده و مجموع آن را با سطر صفرم جمع کرده و به جای سطر صفرم قرار می‌دهیم. همواره پس از انجام این فرآیند ، سطرهای مربوط به متغیرهای اساسی هیچ تغییری نکرده و شرط اساسی اول در سطر صفرم برقرار خواهد شد. در این مثال داریم :

$$\text{سطر صفرم} = [(-1) \times \text{سطر } R_1] + [(-1) \times \text{سطر } R_2] + [(-1) \times \text{سطر } R_3] = \text{سطر صفرم}$$

این دو شرط اساسی ، همواره و در هر تابلو بایستی برقرار باشد تا ادامه حل مسأله ، امکان پذیر باشد.

$\overline{\quad}$	R	x_1	x_2	x_3	R_1	R_2	R_3	RHS
R_0	-1	1	-5	-8	0	0	0	-24
R_1	0	1	1	1	1	0	0	6
R_2	0	-2	2	4	0	1	0	8
R_3	0	0	2	3	0	0	1	10

« تابلوی اول »

ستون لولا : x_3 سطر لولا : R_2

عدد لولا : 4

$\overline{\quad}$	R	x_1	x_2	x_3	R_1	R_2	R_3	RHS
R_0	-1	-3	-1	0	0	2	0	-8
R_1	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{1}{4}$	0	4
x_3	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{4}$	0	2
R_3	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{3}{4}$	1	4

« تابلوی دوم »

ستون لولا : x_1 سطر لولا : R_1 عدد لولا : $\frac{3}{2}$

$\overline{\quad}$	R	x_1	x_2	x_3	R_1	R_2	R_3	RHS
R_0	-1	0	0	0	2	$\frac{3}{2}$	0	0
x_1	0	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{6}$	0	$\frac{8}{3}$
x_3	0	0	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{10}{3}$
R_3	0	0	0	0	-1	$-\frac{1}{2}$	1	0

« تابلوی سوم »

شرط بهینگی : ☒

« تابلوی نهایی در مرحله اول »

نکات :

- تابلو ، بهینه شد. در این زمان به بررسی شروط می پردازیم. تابع هدف صفر شده ، R ها هم حذف شده و یا اگر وجود دارند ، مقدار آنها برابر صفر است. پس تابلوی نهایی مرحله اول ، به اولین تابلو در مرحله دوم تبدیل خواهد شد.
- توجه داشته باشید که اگر تابع هدف صفر نمی شد ، ناحیه موجه کاذب از بین نرفته بود و لذا مسأله ، جواب بهینه نداشت و قادر به ادامه دادن آن نبودیم.

مرحله دوم :

- چون متغیرهای مصنوعی ، یعنی R ها صفر شده اند ، از بازه متغیرها حذف می شوند. البته اگر متغیر برابر ساز یا همان S وجود داشت ، این نوع متغیرها هم به جدول جدید منتقل خواهند شد.
- در سطرهای تابلوی جدید هم ، تنها متغیرهای اساسی از آخرین تابلوی مرحله اول منتقل شده و نوشته می شوند.
- در سطر صفرم ، ضرایب در تابع هدف اصلی مسئله و البته به فرم Max نوشته خواهد شد. تابع هدف اصلی به شکل زیر است :

$$Max (-Z) - x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$$

$\overline{\quad}$	Z	x_1	x_2	x_3	RHS
Z_0	-1	-1	2	-1	0
x_1	0	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{8}{3}$
x_3	0	0	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{10}{3}$

« تابلوی مقدماتی »

شرط اول : ☒شرط دوم : ☒

$$\text{سطر صفرم} = [x_3 \text{ سطر} \times (+1)] + [x_1 \text{ سطر} \times (+1)] = \text{سطر صفرم}$$



برای بر طرف کردن عدم شرط اول

$\overline{\quad}$	Z	x_1	x_2	x_3	RHS
Z_0	-1	0	3	0	6
x_1	0	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{8}{3}$
x_3	0	0	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{10}{3}$

« تابلوی اول »

شرط بهینگی : ☒

$$\Rightarrow x_1^* = \frac{8}{3} , x_2^* = 0 , x_3^* = \frac{10}{3} , Z^* = -(6) = -6$$

بررسی موارد خاص در برنامه ریزی خطی :

همانطور که در قبل به بررسی چهار حالت خاص در برنامه ریزی خطی پرداختیم ، این چهار حالت در جداول سیمپلکس نیز ممکن است اتفاق بیفتد که در اینجا به بررسی آنها پرداخته و قواعد آنها را ذکر خواهیم کرد :

حالت اول : جواب بهینه چندگانه :

قاعده : هرگاه ضریب یک متغیر غیر اساسی در سطر صفرم در تابلوی بهینه ، برابر با صفر باشد ، آن مسئله دارای جواب بهینه چندگانه است.
توجه داشته باشید که در قبل ، اگر شیب تابع هدف با شیب یکی از محدودیتها برابر بود ، مسئله می‌توانست دارای جواب بهینه چندگانه باشد ولی در اینجا و با شرایط فوق ، مسئله قطعاً دارای جواب بهینه چندگانه است.

مثال : حالات خاص در مدل زیر را بررسی نمایید :

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= x_1 + 2x_2 + 3x_3 & \text{s.t} \\ \text{① : } x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\leq 10 & \text{② : } x_1 + x_2 \leq 5 & \text{③ : } x_1 \leq 1 & \text{④ : } x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

پس از استاندارد سازی و بردن جملات در تابع هدف به یک سمت خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &- x_1 - 2x_2 - 3x_3 & \text{s.t} \\ \text{① : } x_1 + 2x_2 + 3x_3 + S_1 &= 10 & \text{② : } x_1 + x_2 + S_2 = 5 & \text{③ : } x_1 + S_3 = 1 & \text{④ : } x_1, x_2, x_3, S_1, S_2, S_3 \geq 0 \end{aligned}$$

و داریم :

	Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	RHS	
Z_0	1	-1	-2	-3	0	0	0	0	« تابلوی اول »
S_1	0	1	2	3	1	0	0	10	ستون x_3 : لولا
S_2	0	1	1	0	0	1	0	5	سطر S_1 : لولا
S_3	0	1	0	0	0	0	1	1	عدد لولا : 3

	Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	RHS	
Z_0	1	0	0	0	1	0	0	10	« تابلوی دوم »
x_3	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{10}{3}$	شرط بهینگی : ☒
S_2	0	1	1	0	0	1	0	5	
S_3	0	1	0	0	0	0	1	1	

$$\Rightarrow x_1^* = 0, \quad x_2^* = 0, \quad x_3^* = \frac{10}{3}, \quad Z^* = 10$$

نکته :

- به شرط بهینگی رسیدیم ولی بایستی الزاماً حداقل دو نقطه بدست آورده باشیم و ما تاکنون یک نقطه بدست آوردیم.
- پس بایستی یک تابلوی دیگر نیز ادامه دهیم. ولی با شرط بهینگی و با در نظر گرفتن اینکه در سطر صفرم یعنی تابع هدف هیچ عدد منفی وجود ندارند ، چگونه ادامه دهیم ؟ در اینجا ، یکی از متغیرهای غیر اساسی یعنی x_1, x_2 را به دلخواه انتخاب کرده و ادامه می‌دهیم :
- ستون لولا : x_2 ؛ سطر لولا : S_2 ؛ عدد لولا : 1
- توجه داشته باشید که برای انتخاب سطر لولا نیز دو متغیر در اختیار داشتیم ؛ یعنی S_2, x_3 . در اینگونه مواقع می‌توانید سطری را انتخاب نمایید که عدد لولای بدست آمده در اثر آن ، اعشاری نباشد.

	Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	RHS	
Z_0	1	0	0	0	1	0	0	10	« تابلوی دوم »
x_3	0	$-\frac{1}{3}$	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	0	شرط بهینگی : ☒
x_2	0	1	1	0	0	1	0	5	
S_3	0	1	0	0	0	0	1	1	

$$\Rightarrow x_1^* = 0, \quad x_2^* = 5, \quad x_3^* = 0, \quad Z^* = 10$$

مسلماً در این نقطه هم ، Z یکسانی داریم و با توجه به نکته فوق باز هم می‌توانیم ادامه دهیم ؛ ولی کافیست.

حالت دوم: فاقد ناحیهٔ موجه (فاقد جواب) :

قاعده: اگر در تابلوی آخر سیمپلکس (یعنی تابلوی بهینه - چه به روش M بزرگ و چه به روش دو مرحله‌ای) ، حداقل یکی از متغیرهای مصنوعی ، مقدار بزرگتر از صفر داشته باشد ، مدل فاقد ناحیهٔ موجه (فاقد جواب) خواهد بود.

مثال: حالات خاص در مدل زیر را بررسی نمائید :

$$\text{Max } Z = 4x_1 + 3x_2 \quad \text{s.t.}$$

$$\textcircled{1} : x_1 + x_2 \leq 3$$

$$\textcircled{2} : 2x_1 - x_2 \leq 3$$

$$\textcircled{3} : x_1 \geq 4$$

$$\textcircled{4} : x_1, x_2 \geq 0$$

پس از استاندارد سازی ، افزودن متغیرهای مورد نیاز و بردن جملات در تابع هدف به یک سمت خواهیم داشت :

$$\text{Max } Z - 4x_1 - 3x_2 + MR_1 = 0$$

s.t

$$\textcircled{1} : x_1 + x_2 + S_1 = 3$$

$$\textcircled{2} : 2x_1 - x_2 + S_2 = 3$$

$$\textcircled{3} : x_1 - S_3 + R_1 = 4$$

$$\textcircled{4} : x_1, x_2, S_1, S_2, R_1 \geq 0$$

خواهیم داشت :

	$\frac{Z}{Z_0}$	$\frac{x_1}{1}$	$\frac{x_2}{-4}$	$\frac{S_1}{-3}$	$\frac{S_2}{0}$	$\frac{S_3}{0}$	$\frac{R_1}{M}$	$\frac{RHS}{0}$
S_1	0	1	1	1	0	0	0	3
S_2	0	2	-1	0	1	0	0	3
R_1	0	1	0	0	0	-1	1	4

« تابلوی مقدماتی »

شرط اول: ☒شرط دوم: ☒

← برای بر طرف کردن عدم شرط اول سطر صفرم + $(-M)$ × سطر R_1 = سطر صفرم

	$\frac{Z}{Z_0}$	$\frac{x_1}{1}$	$\frac{x_2}{-M-4}$	$\frac{S_1}{-3}$	$\frac{S_2}{0}$	$\frac{S_3}{M}$	$\frac{R_1}{0}$	$\frac{RHS}{-4M}$
S_1	0	1	1	1	0	0	0	3
S_2	0	2	-1	0	1	0	0	3
R_1	0	1	0	0	0	-1	1	4

« تابلوی اول »

ستون x_1 : لولاسطر S_2 : لولا

عدد لولا : 2

	$\frac{Z}{Z_0}$	$\frac{x_1}{1}$	$\frac{x_2}{-M/2-5}$	$\frac{S_1}{0}$	$\frac{S_2}{M/2+2}$	$\frac{S_3}{M}$	$\frac{R_1}{0}$	$\frac{RHS}{+5/2M+6}$
S_1	0	0	3/2	1	-1/2	0	0	3/2
x_1	0	1	-1/2	0	1/2	0	0	3/2
R_1	0	0	1/2	0	-1/2	-1	1	5/2

« تابلوی دوم »

ستون x_1 : لولاسطر S_2 : لولا

عدد لولا : 2

	$\frac{Z}{Z_0}$	$\frac{x_1}{1}$	$\frac{x_2}{0}$	$\frac{S_1}{M+10}$	$\frac{S_2}{M+1}$	$\frac{S_3}{M}$	$\frac{R_1}{0}$	$\frac{RHS}{-2M+11}$
x_2	0	0	1	2/3	-1/3	0	0	1
x_1	0	1	0	1/3	1/3	0	0	2
R₁	0	0	0	-1/3	-1/3	-1	1	2

« تابلوی سوم »

شرط بهینگی: ☒

نکته :

• اگر به تابلوی فوق توجه کنید خواهید فهمید که تابلو ، بهینه است ؛ ولی متغیر R_1 صفر نشده است. لذا مسئله فاقد ناحیهٔ موجه و لذا فاقد جواب است.

حالت سوم : ناحیه جواب بی کران :

در قبل ، ناحیه رسم شده در این حالت از یک طرف کران نداشت و نقطه بهینه در این ناحیه بستگی به تابع هدف داشت.
 قاعده : هرگاه در تابلوی آخر سیمپلکس (که الزاماً بهینه هم نخواهد بود) امکان انتخاب متغیر ورودی وجود داشته باشد ولی متغیر خروجی به دلیل مثبت نبودن ضرایب ستون لولا قابل تعریف نباشد ، مدل برنامه ریزی خطی دارای ناحیه جواب بی کران است.

مثال : حالات خاص در مدل زیر را بررسی نمائید :

$$\text{Max } Z = 6x_1 + 2x_2 \quad \text{s.t.}$$

$$\textcircled{1} : 2x_1 - x_2 \leq 2$$

$$\textcircled{2} : x_1 \leq 4$$

$$\textcircled{3} : x_1, x_2 \geq 0$$

پس از استاندارد سازی و بردن جملات در تابع هدف به یک سمت خواهیم داشت :

$$\text{Max } Z - 6x_1 - 2x_2 = 0 \quad \text{s.t.}$$

$$\textcircled{1} : 2x_1 - x_2 + S_1 = 2$$

$$\textcircled{2} : x_1 + S_2 = 4$$

$$\textcircled{3} : x_1, x_2, S_1, S_2 \geq 0$$

خواهیم داشت :

$\overline{\quad}$	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	RHS
Z_0	1	-6	-2	0	0	0
S_1	0	2	-1	1	0	4
S_2	0	1	0	0	1	4

« تابلوی اول »

ستون لولا : x_1

سطر لولا : S_1

عدد لولا : 2

$\overline{\quad}$	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	RHS
Z_0	1	0	-5	3	0	6
x_1	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1
S_2	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	3

« تابلوی دوم »

ستون لولا : x_2

سطر لولا : S_2

عدد لولا : $\frac{1}{2}$

$\overline{\quad}$	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	RHS
Z_0	1	0	0	-2	10	36
x_1	0	1	0	0	1	4
x_2	0	0	1	-1	2	6

« تابلوی سوم »

شرط بهینگی : $\square$

نکته :

- اگر به تابلوی فوق توجه کنید ، ستون لولا را می توان انتخاب نمود ولی به دلیل مثبت نبودن عناصر ستون لولا ، نمی توان متغیر خروجی را تعیین نمود. لذا مسئله دارای جواب بی کران است.

حالت چهارم: جواب تبهگن:

قاعده: شرط تبهگن بودن یک گوشه آن است که حداقل یکی از متغیرهای اساسی آن گوشه، در سمت راست تابلوی سیمپلکس، دارای مقدار صفر باشد. توجه داشته باشید که الزاماً این تابلو، تابلوی بهینه نخواهد بود. اگر این تابلو، تابلوی بهینه نباشد، به این گوشه، گوشه تبهگن موقت گفته می‌شود.

مثال: حالات خاص در مدل زیر را بررسی نمایید:

$$\text{Max } Z = 4x_1 + 6x_2 \quad \text{s.t.}$$

$$\textcircled{1}: 6x_1 + 4x_2 \leq 24$$

$$\textcircled{2}: x_2 \leq 3$$

$$\textcircled{3}: 5x_1 + 10x_2 \leq 40$$

$$\textcircled{4}: x_1, x_2 \geq 0$$

پس از استاندارد سازی و بردن جملات در تابع هدف به یک سمت خواهیم داشت:

$$\text{Max } Z - 4x_1 - 6x_2 = 0$$

s.t

$$\textcircled{1}: 6x_1 + 4x_2 + S_1 = 24$$

$$\textcircled{2}: x_2 + S_2 = 3$$

$$\textcircled{3}: 5x_1 + 10x_2 + S_3 = 40$$

$$\textcircled{4}: x_1, x_2, S_1, S_2 \geq 0$$

خواهیم داشت:

	$\frac{Z}{Z_0}$	$\frac{x_1}{-4}$	$\frac{x_2}{-6}$	$\frac{S_1}{0}$	$\frac{S_2}{0}$	$\frac{S_3}{0}$	$\frac{RHS}{0}$
Z_0	1	-4	-6	0	0	0	0
S_1	0	6	4	1	0	0	24
S_2	0	0	1	0	1	0	3
S_3	0	5	10	0	0	1	40

« تابلوی اول »

ستون x_2 : لولا

سطر S_2 : لولا

عدد لولا: 1

	$\frac{Z}{Z_0}$	$\frac{x_1}{-4}$	$\frac{x_2}{0}$	$\frac{S_1}{0}$	$\frac{S_2}{6}$	$\frac{S_3}{0}$	$\frac{RHS}{18}$
Z_0	1	-4	0	0	6	0	18
S_1	0	6	0	1	-4	0	12
x_2	0	0	1	0	1	0	3
S_3	0	5	0	0	-10	1	10

« تابلوی دوم »

ستون x_1 : لولا

سطر S_3 : لولا

عدد لولا: 5

	$\frac{Z}{Z_0}$	$\frac{x_1}{0}$	$\frac{x_2}{0}$	$\frac{S_1}{0}$	$\frac{S_2}{-2}$	$\frac{S_3}{4/5}$	$\frac{RHS}{26}$
Z_0	1	0	0	0	-2	$\frac{4}{5}$	26
S_1	0	0	0	1	8	$-\frac{6}{5}$	0
x_2	0	0	1	0	1	0	3
x_1	0	1	0	0	-2	$\frac{1}{5}$	2

« تابلوی سوم »

ستون S_2 : لولا

سطر S_1 : لولا

عدد لولا: 8

شرط بهینگی در تابلوی فوق وجود ندارد. پس:

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 3, \quad Z = 26$$

این نقطه، نقطه تبهگن موقت است. لذا یک تابلوی دیگر به جلو می‌رویم. اگر این نقطه تکرار شد، جواب تبهگن خواهد بود. تکرار شدن این نقطه، به معنی تکرار شدن مختصات نقطه است و اصلاً مهم نیست که متغیرهای اساسی آن عوض شوند.

	$\frac{Z}{Z_0}$	$\frac{x_1}{0}$	$\frac{x_2}{0}$	$\frac{S_1}{1/4}$	$\frac{S_2}{0}$	$\frac{S_3}{1/2}$	$\frac{RHS}{26}$
Z_0	1	0	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	26
S_2	0	0	0	$\frac{1}{8}$	1	$-\frac{3}{20}$	0
x_2	0	0	1	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{3}{20}$	3
x_1	0	1	0	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{10}$	2

« تابلوی چهارم »

شرط بهینگی: ☒

$$x_1^* = 2, \quad x_2^* = 3, \quad Z^* = 26$$

حال که در دو تابلو، مختصات نقطه تکرار شد، گوشه بهینه تبهگن خواهد بود

هر مسئله اولیه دارای یک مسئله ثانویه در برنامه ریزی خطی است که در ابتدا ، قوانین مربوط به نوشتن این مسئله ثانویه را خواهیم آموخت :

مسئله با تابع هدف Min	$\Rightarrow$ تبدیل می شود به $\Leftarrow$	مسئله با تابع هدف Max
تعداد متغیرهای تصمیم	$\Rightarrow$ برابر است با $\Leftarrow$	تعداد محدودیت ها
ضرایب تابع هدف	$\Rightarrow$ تشکیل دهنده $\Leftarrow$	اعداد سمت راست
ضرایب هر محدودیت j ام	$\Rightarrow$ تشکیل دهنده $\Leftarrow$	ضریب هر متغیر تصمیم x_j
متغیر متناظر بصورت غیر منفی	$\Leftrightarrow$	محدودیت های بصورت نامعادله
متغیر متناظر بصورت آزاد در علامت	$\Leftrightarrow$	محدودیت های بصورت تساوی

نکته : اگر تابع هدف مسئله بصورت Max بود ، محدودیت های نامعادله ای را بصورت کوچکتر مساوی در می آوریم و بعد ثانویه می نویسیم.
 همچنین اگر تابع هدف مسئله بصورت Min بود ، محدودیت های نامعادله ای را بصورت بزرگتر مساوی در می آوریم و بعد ثانویه می نویسیم.
 (در صورتیکه به فرم مورد نظر نبودند ، کافی است آنها را در یک منفی ضرب کنیم ؛ در اینصورت ، جهت نامساوی نیز عوض خواهد شد)

مثال : مسئله ثانویه مدل های زیر را بنویسید :

$$\begin{array}{ll}
 \text{Max } Z = 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 & \text{s.t.} \\
 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 430 & \Leftrightarrow y_1 \\
 3x_1 + 1x_2 + 2x_3 \leq 460 & \Leftrightarrow y_2 \quad x_i \geq 0 \quad i=1,2,3
 \end{array}
 \quad \begin{array}{ll}
 \text{Min } y_0 = 430y_1 + 460y_2 & \text{s.t.} \\
 2y_1 + 3y_2 \geq 3 & \Leftrightarrow x_1 \\
 2y_1 + 1y_2 \geq 3 & \Leftrightarrow x_2 \\
 3y_1 + 2y_2 \geq 5 & \Leftrightarrow x_3 \quad y_i \geq 0 \quad i=1,2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 \text{Max } Z = 3x_1 + 5x_2 + x_3 + 10x_4 & \text{s.t.} \\
 x_1 + x_2 - x_4 \leq 100 \\
 x_2 - x_3 \geq 80 \\
 x_1 + x_2 - 3x_4 = 90 \\
 x_1 \text{ آزاد در علامت} , \quad x_i \geq 0 \quad i=2,3,4
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{ll}
 \text{Max } Z = 3x_1 + 5x_2 + x_3 + 10x_4 & \text{s.t.} \\
 x_1 + x_2 - x_4 \leq 100 \\
 -x_2 + x_3 \leq -80 \\
 x_1 + x_2 - 3x_4 = 90 \\
 x_1 \text{ آزاد در علامت} , \quad x_i \geq 0 \quad i=2,3,4
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{ll}
 \text{Min } y_0 = 100y_1 - 80y_2 + 90y_3 & \text{s.t.} \\
 y_1 + 0y_2 + y_3 = 3 \\
 y_1 - y_2 + y_3 \geq 5 \\
 0y_1 + y_2 + 0y_3 \geq 1 \\
 -y_1 + 0y_2 - 3y_3 \geq 10 \\
 y_3 \text{ آزاد در علامت} , \quad y_i \geq 0 \quad i=1,2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 \text{Min } Z = 100x_2 + 80x_3 - x_5 & \text{s.t.} \\
 2x_1 + 3x_2 - x_4 \geq 20 \\
 x_2 + x_3 - x_5 \geq 30 \\
 x_1 + \frac{1}{2}x_2 - x_3 + x_5 = 25 \\
 x_5 \geq 2 \\
 \cancel{x_1 \leq 10} \Rightarrow -x_1 \geq -10 \\
 x_3, x_4 \text{ آزاد در علامت} , \quad x_i \geq 0 \quad i=1,2,5
 \end{array}
 \quad \begin{array}{ll}
 \text{Max } y_0 = 20y_1 + 30y_2 + 25y_3 + 2y_4 - 10y_5 & \text{s.t.} \\
 2y_1 + 0y_2 + y_3 + 0y_4 - y_5 \leq 0 \\
 3y_1 + y_2 + \frac{1}{2}y_3 + 0y_4 + 0y_5 \leq 100 \\
 0y_1 + y_2 - y_3 + 0y_4 + 0y_5 = 80 \\
 -y_1 + 0y_2 + 0y_3 + 0y_4 + 0y_5 = 0 \\
 0y_1 - y_2 + y_3 + y_4 + 0y_5 \leq -1 \\
 y_3 \text{ آزاد در علامت} , \quad y_i \geq 0 \quad i=1,2,4,5
 \end{array}$$

ولی نوشتن این مسئله ثانویه ، چه سودی برای ما خواهد داشت ؟
 برای استفاده از این مسئله ثانویه ، یکسری قضایایی مطرح می کنیم و با اثبات آنها کاری نداریم (در واقع اثبات آنها برای ما مطرح نیست)

قضیه اول :

ثانویه مسئله ثانویه ، مسئله اولیه است.

قضیه دوم :

چنانچه $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ ، یک جواب موجه مسئله اولیه و $(y_1, y_2, y_3, \dots, y_m)$ یک جواب موجه مسئله ثانویه باشد ، در اینصورت همواره رابطه زیر برقرار است :

$$\sum_{j=1}^n C_j x_j \leq \sum_{j=1}^m b_j y_j$$

و این یعنی ، همواره $Z \leq y_0$ ؛ یعنی همواره تابع هدف مسئله اولیه از تابع هدف مسئله ثانویه کوچکتر یا مساوی خواهد بود.

نکته : حالت تساوی در قضیه فوق ، در جواب بهینه دو مسئله اتفاق می افتد ؛ یعنی $Z^* = y_0^*$.

مثال : می خواهیم قضیه فوق را در مثال زیر نشان دهیم :

$$\text{Max } Z = 8x_1 + 4x_2 \quad \text{s.t.}$$

$$\textcircled{1} : x_1 + x_2 \leq 10$$

$$\textcircled{2} : 5x_1 + x_2 \leq 15$$

$$\textcircled{3} : x_1, x_2 \geq 0$$

مسئله ثانویه آن خواهد بود :

$$\text{Min } y_0 = 10y_1 + 15y_2 \quad \text{s.t.}$$

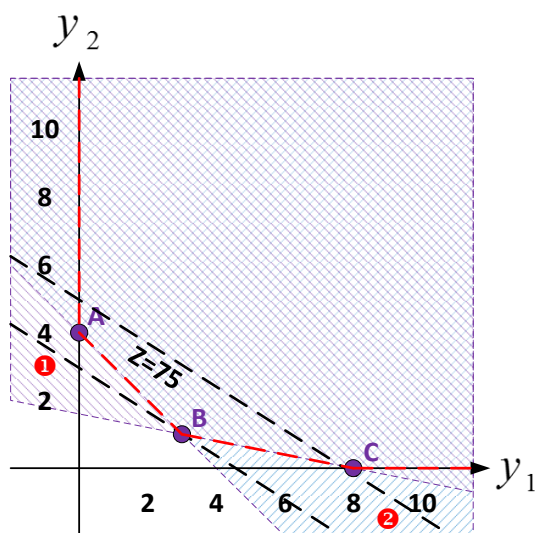
$$\textcircled{1} : y_1 + 5y_2 \geq 8$$

$$\textcircled{2} : y_1 + y_2 \geq 4$$

$$\textcircled{3} : y_1, y_2 \geq 0$$

ابتدا دو مسئله را بصورت ترسیمی حل می کنیم. خواهیم داشت :

« مسئله ثانویه »

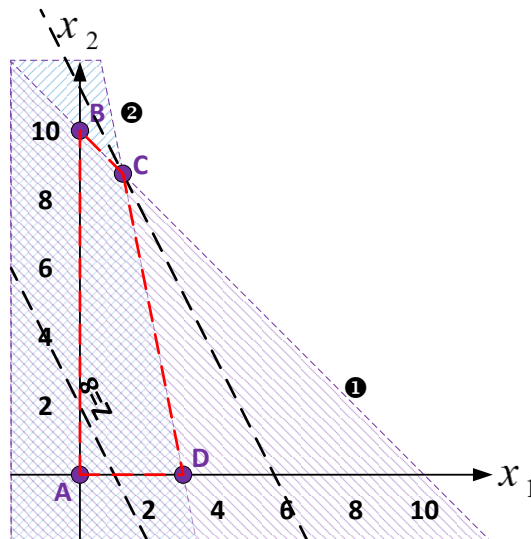


نقطه بهینه = نقطه تلاقی دو محدودیت اول و دوم

$$B : \begin{cases} y_1 + 5y_2 = 8 \\ y_1 + y_2 = 4 \end{cases} \times (-1) \Rightarrow 4y_2 = 4$$

$$\Rightarrow y_1^* = 3, \quad y_2^* = 1 \Rightarrow y_0^* = 45$$

« مسئله اولیه »



نقطه بهینه = نقطه تلاقی دو محدودیت اول و دوم

$$C : \begin{cases} x_1 + x_2 = 10 \\ 5x_1 + x_2 = 15 \end{cases} \times (-1) \Rightarrow 4x_1 = 5$$

$$\Rightarrow x_1^* = \frac{5}{4}, \quad x_2^* = \frac{35}{4} \Rightarrow Z^* = 45$$

توجه داشته باشید که مختصات نقاط با هم متفاوت است ؛ ولی جواب بهینه در هر دو مسئله یکسان و برابر است.

نکته :

در صورتیکه مختصات هر نقطه در ناحیه موجه مسئله اولیه را در Z قرار دهیم ، قطعاً مقدار آن کمتر از مختصات آن نقطه در ناحیه موجه مسئله ثانویه در y_0 خواهد بود. یعنی خواهیم داشت :

«مقدار y_0 با توجه به ازای مختصات هر سه نقطه در ناحیه موجه مسئله ثانویه < مقدار Z با توجه به ازای مختصات هر چهار نقطه در ناحیه موجه مسئله اولیه»

قضیه کمکی (لنگی) مکمل : « خیلی مهم و پرکاربرد »

هر جواب اساسی در مسئله اولیه ، دارای یک جواب اساسی مکمل در مسئله ثانویه است که بین متغیرهای آنها ، یک رابطه لنگی مکمل وجود دارد. این قضیه به ما کمک خواهد کرد تا رابطه بین مسئله اولیه و مسئله ثانویه را بفهمیم.

اگر متغیرهای تصمیم مسئله اولیه را با x ، متغیرهای تصمیم مسئله ثانویه را با y ، متغیرهای کمکی مسئله اولیه را با S و متغیرهای کمکی مسئله ثانویه را با t نشان دهیم ؛ خواهیم داشت :

$$\Rightarrow x \cdot t = 0 \quad , \quad y \cdot S = 0$$

با استفاده از رابطه فوق خواهیم توانست متناظر یک نقطه در یک مسئله را در مسئله دیگر بدست آوریم (اولیه در ثانویه و یا بالعکس). توجه داشته باشید که حتی این نقطه می تواند خارج از ناحیه موجه باشد.

نکته :

نقطه ، خارج از ناحیه موجه	نقطه ، روی محدودیت های ناحیه موجه	نقطه ، داخل از ناحیه موجه	
$S < 0$	$S = 0$	$S > 0$	در مسئله اولیه
$t < 0$	$t = 0$	$t > 0$	در مسئله ثانویه

مثال : فرض کنید در مثال قبلی ، نقطه ای با مختصات $S_1 = 0$ ، $S_2 = 5$ ، $x_1 = 0$ ، $x_2 = 10$ داشته باشیم. از پارامترهای داده شده مشخص است که نقطه در مسئله اولیه است. می خواهیم متناظر آنرا در مسئله ثانویه بدست آوریم. خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} \text{در مسئله ثانویه داشتیم} : \begin{cases} y_1 + 5y_2 - t_1 = 8 \\ y_1 + y_2 - t_2 = 4 \end{cases} \\ \text{در مسئله اولیه داشتیم} : \begin{cases} x_1 + x_2 + S_1 = 10 \\ 5x_1 + x_2 + S_2 = 15 \end{cases} \end{aligned}$$

با توجه به اطلاعات فوق ، دو تا x ، دو تا y ، دو تا S و دو تا t داریم. پس با توجه به رابطه کمکی مکمل خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} x_1 \cdot t_1 &= 0 \\ x_2 \cdot t_2 &= 0 \\ y_1 \cdot S_1 &= 0 \\ y_2 \cdot S_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} &\text{با توجه به مختصات} \\ &\text{نقطه داده شده ،} \\ &\text{خواهیم داشت} \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} t_1 &= 0 \\ t_2 &= 0 \\ y_1 &= 0 \\ y_2 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} &\text{اگر در مسئله} \\ &\text{ثانویه قرار دهیم} \\ &\text{خواهیم داشت} \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} y_1 + 5y_2 - t_1 &= 8 \\ y_1 + y_2 - t_2 &= 4 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} &\text{با توجه به} \\ &t_2 = y_2 = 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} y_1 - t_1 &= 8 \\ y_1 &= 4 \end{aligned}$$

با توجه به معادله آخر خواهیم داشت : $t_1 = -4$ و چون مقداری کمتر از صفر دارد (با توجه به نکته فوق) قطعاً این نقطه ، خارج از ناحیه موجه خواهد بود. مختصات نقطه بدست آمده ، با استفاده از مطالب فوق ، بصورت زیر است :

$$\Rightarrow y_1 = 4 \quad , \quad y_2 = 0 \quad , \quad t_1 = -4 \quad , \quad t_2 = 0$$

که اگر مختصات فوق را در شکل مربوط به مسئله ثانویه در صفحه قبل پیدا کنید ، خارج از ناحیه موجه قرار دارد.

توجه داشته باشید که قضیه فوق برای نقطه بهینه هم برقرار است. برای نمونه در مثال صفحه قبل ، مختصات نقطه بهینه در مسئله اولیه بصورت زیر بود :

$$x_1 = \frac{5}{4} \quad , \quad x_2 = \frac{35}{4} \quad , \quad S_1 = 0 \quad , \quad S_2 = 0$$

برای این نقطه ، با توجه به قضیه کمکی مکمل خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} x_1 \cdot t_1 &= 0 \\ x_2 \cdot t_2 &= 0 \\ y_1 \cdot S_1 &= 0 \\ y_2 \cdot S_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} &\text{با توجه به مختصات} \\ &\text{نقطه داده شده ،} \\ &\text{خواهیم داشت} \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} t_1 &= 0 \\ t_2 &= 0 \\ y_1 &= 0 \\ y_2 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} &\text{اگر در مسئله} \\ &\text{ثانویه قرار دهیم} \\ &\text{خواهیم داشت} \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} y_1 + 5y_2 - t_1 &= 8 \\ y_1 + y_2 - t_2 &= 4 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} &\text{با توجه به} \\ &t_1 = t_2 = 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} y_1 + 5y_2 &= 8 \\ y_1 + y_2 &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} y_1 + 5y_2 = 8 \\ y_1 + y_2 = 4 \end{cases} \times (-1) \Rightarrow 4y_2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} y_2 = 1 \\ y_1 = 3 \end{cases} \Rightarrow y_1 = 3 \quad , \quad y_2 = 1 \quad , \quad t_1 = 0 \quad , \quad t_2 = 0$$

با توجه به نکته فوق ، چون مقدار $t_1 = t_2 = 0$ شده ؛ لذا قطعاً نقطه روی محدودیت های ناحیه موجه قرار دارد. در صورتیکه مختصات نقطه روی شکل مربوط به مسئله ثانویه در صفحه قبل را پیدا کنید ، نه تنها مشاهده خواهید کرد که این نقطه روی محدودیت های ناحیه موجه قرار دارد ، بلکه این نقطه نیز ، مشخصات نقطه بهینه در مسئله ثانویه است.

تعیین جواب بهینه یک مسئله با استفاده از تابلوی بهینه مسئله دیگر :

مراحل کار به شرح زیر است :

۱. یکی از دو مسئله اولیه یا ثانویه را برای حل انتخاب کنید و جواب بهینه آنرا بدست آورید. (حتی الامکان مسئله‌ای که دارای محدودیت‌های کوچکتر مساوی باشد ؛ زیرا در اینصورت متغیرهای مصنوعی در آن موجود نخواهد بود)
۲. جواب بهینه مسئله دیگر ، در سطر صفر جدول بهینه این مسئله قرار دارد.
۳. مقدار متغیرهای تصمیم مسئله دیگر در زیر ستون متغیرهای اساسی در جدول ابتدائی (تابلوی اولیه) این مسئله قرار دارد.
۴. اگر مسئله اولیه بصورت استاندارد باشد ، مقدار متغیرهای تصمیم مسئله ثانویه ، همان مقادیری است که در مرحله سوم آنها را بدست آوردید.
۵. اگر مسئله اولیه بصورت غیر استاندارد بوده و به روش M بزرگ حل شده باشد ، M ها را از مقادیر حاصل از مرحله سوم حذف کرده و به مرحله ششم توجه نمایید.
۶. اگر تابع هدف اصلی مسئله بصورت Max باشد ، مقادیر حاصل از مرحله پنجم ، مقدار بهینه متغیرهای تصمیم مسئله ثانویه هستند. در غیر اینصورت (یعنی مسئله بصورت Min باشد) ، مقادیر حاصل از مرحله پنجم را در -1 ضرب می‌کنیم.

مثال : (که همان مثال مربوط به دو صفحه قبل است) :

$$Max \ Z = 8x_1 + 4x_2 \quad s. \ t$$

$$\textcircled{1} : x_1 + x_2 \leq 10$$

$$\textcircled{2} : 5x_1 + x_2 \leq 15$$

$$\textcircled{3} : x_1, x_2 \geq 0$$

که به روش ترسیمی حل شد و جواب بصورت زیر بدست آمد :

$$\Rightarrow x_1^* = \frac{5}{4}, \quad x_2^* = \frac{35}{4} \Rightarrow Z^* = 45$$

مسئله ثانویه آن خواهد بود :

$$Min \ y_0 = 10y_1 + 15y_2 \quad s. \ t$$

$$\textcircled{1} : y_1 + 5y_2 \geq 8$$

$$\textcircled{2} : y_1 + y_2 \geq 4$$

$$\textcircled{3} : y_1, y_2 \geq 0$$

که به روش ترسیمی حل شد و جواب بصورت زیر بدست آمد :

$$\Rightarrow y_1^* = 3, \quad y_2^* = 1 \Rightarrow y_0^* = 45$$

مسئله اولیه با روش سیمپلکس بصورت زیر خواهد بود :

$\overline{Z_0}$	$\frac{Z}{1}$	$\frac{x_1}{-8}$	$\frac{x_2}{-4}$	$\frac{S_1}{0}$	$\frac{S_2}{0}$	$\frac{RHS}{0}$	
$\boxed{S_1}$	0	1	1	1	0	10	ستون l_1 : x_1
$\boxed{S_2}$	0	$\boxed{5}$	1	0	1	15	سطر l_2 : S_2
							عدد l_3 : 5

« تابلوی اول »

$\overline{Z_0}$	$\frac{Z}{1}$	$\frac{x_1}{0}$	$\frac{x_2}{-12/5}$	$\frac{S_1}{0}$	$\frac{S_2}{8/5}$	$\frac{RHS}{24}$	
S_1	0	0	$\boxed{4/5}$	1	$-1/5$	7	ستون l_2 : x_2
x_1	0	1	$1/5$	0	$1/5$	3	سطر l_1 : S_1
							عدد l_3 : $4/5$

« تابلوی دوم »

$\overline{Z_0}$	$\frac{Z}{1}$	$\frac{x_1}{0}$	$\frac{x_2}{0}$	$\boxed{S_1}$	$\boxed{S_2}$	$\frac{RHS}{45}$	
x_2	0	0	1	$5/4$	$-1/4$	$35/4$	ستون l_1 : x_2
x_1	0	1	0	$-1/4$	$1/4$	$5/4$	سطر l_2 : x_1
							عدد l_3 : $5/4$

« تابلوی سوم »

شرط بهینگی : $\square$ متغیرهای اساسی در شروع مسئله ، S_1, S_2 بودند. ضریب این دو متغیر در سطر صفرم تابلوی بهینه ، 1، 3 می‌باشد. ولی کدام y_1 و کدام y_2 می‌باشد ؟

$$\Rightarrow S_1 = y_1 = 3, \quad S_2 = y_2 = 1 \Rightarrow y_1^* = 3, \quad y_2^* = 1 \Rightarrow y_0^* = 45$$

حال اگر بخواهیم مسئله فوق را از ثانویه شروع کرده و به جواب بهینه مسئله اولیه برسیم ، خواهیم داشت :
ابتدا بایستی استاندارد سازی کنیم :

$$\text{Max } (-y_0) = -10y_1 - 15y_2 \quad \text{s.t.}$$

$$\textcircled{1} : y_1 + 5y_2 - t_1 + R_1 = 8$$

$$\textcircled{2} : y_1 + y_2 - t_2 + R_2 = 4$$

$$\textcircled{3} : y_1, y_2, t_1, t_2, R_1, R_2 \geq 0$$

در نتیجه خواهیم داشت :

$$\text{Max } (-y_0) = -10y_1 - 15y_2 - MR_1 - MR_2 \Rightarrow \text{Max } (-y_0) + 10y_1 + 15y_2 + MR_1 + MR_2 = 0 \quad \text{s.t.}$$

$$\textcircled{1} : y_1 + 5y_2 - t_1 + R_1 = 8$$

$$\textcircled{2} : y_1 + y_2 - t_2 + R_2 = 4$$

$$\textcircled{3} : y_1, y_2, t_1, t_2, R_1, R_2 \geq 0$$

در جدول سیمپلکس نیز خواهیم داشت :

$\frac{y_0}{y_0}$	$\frac{y_0}{-1}$	$\frac{y_1}{10}$	$\frac{y_2}{15}$	$\frac{t_1}{0}$	$\frac{t_2}{0}$	$\frac{R_1}{M}$	$\frac{R_2}{M}$	$\frac{RHS}{0}$
R_1	0	1	5	-1	0	1	0	8
R_2	0	1	1	0	-1	0	1	4

« تابلوی مقدماتی »

☒ شرط اول :

☒ شرط دوم :

$\frac{y_0}{y_0}$	$\frac{y_0}{-1}$	$\frac{y_1}{-2M+10}$	$\frac{y_2}{-6M+15}$	$\frac{t_1}{M}$	$\frac{t_2}{M}$	$\frac{R_1}{0}$	$\frac{R_2}{0}$	$\frac{RHS}{-12M}$
R_1	0	1	$\frac{5}{-6M+15}$	-1	0	1	0	8
R_2	0	1	1	0	-1	0	1	4

« تابلوی اول »

ستون y_2 : لولا :

سطر R_1 : لولا :

عدد لولا : 5

$\frac{y_0}{y_0}$	$\frac{y_0}{-1}$	$\frac{y_1}{-4/5M+7}$	$\frac{y_2}{0}$	$\frac{t_1}{-1/5M+3}$	$\frac{t_2}{M}$	$\frac{R_1}{6/5M-3}$	$\frac{R_2}{0}$	$\frac{RHS}{-12/5M-24}$
y_2	0	$\frac{1}{5}$	1	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{8}{5}$
R_2	0	$\frac{4}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	-1	$-\frac{1}{5}$	1	$\frac{12}{5}$

« تابلوی دوم »

ستون x_2 : لولا :

سطر S_1 : لولا :

عدد لولا : $\frac{4}{5}$

$\frac{y_0}{y_0}$	$\frac{y_0}{-1}$	$\frac{y_1}{0}$	$\frac{y_2}{0}$	$\frac{t_1}{5/4}$	$\frac{t_2}{35/4}$	$\frac{R_1}{M-5/4}$	$\frac{R_2}{M-35/4}$	$\frac{RHS}{-45}$
y_2	0	0	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	1
y_1	0	1	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$	3

« تابلوی سوم »

☒ شرط بهینگی :

متغیرهای اساسی در شروع مسئله ، R_1, R_2 بودند. ضریب این دو متغیر در سطر صفرم تابلوی بهینه ، $M - \frac{5}{4}, M - \frac{35}{4}$ می باشد.

Mها را حذف کرده و به تابع هدف اولیه نگاه می کنیم. چون Min بوده ، ضرایب فوق را در 1- ضرب می کنیم. خواهیم داشت :

$$\Rightarrow R_1 = x_1 = \frac{5}{4} , \quad R_2 = x_2 = \frac{35}{4} \quad \Rightarrow \quad x_1^* = \frac{5}{4} , \quad x_2^* = \frac{35}{4} \quad \Rightarrow \quad Z^* = 45$$

قیمت سایه‌ای : (یک مفهوم خیلی مهم)

در روش سیمپلکس ، قیمت سایه‌ای هر منبع را می‌توان از طریق ضریب متغیر کمکی آن منبع در سطر صفر تابلوی بهینه بدست آورد. منظور از قیمت سایه‌ای هر منبع ، ارزش اقتصادی آن است.

مثال : در مثال قبلی و در قسمت مسئله اولیه ، S_1, S_2 همان منابع هستند. ولی ارزش اقتصادی آن چقدر است ؟ ارزش منبع $S_1 = 3$ و ارزش منبع $S_2 = 1$ است. (توجه داشته باشید که این مقدار ربطی به مسئله ثانویه ندارد).

در مثال فوق و در قسمت مسئله اولیه (زیرا مسئله اولیه استاندارد است) ارزش اقتصادی هر واحد از منبع اول ، سه واحد پولی و ارزش اقتصادی هر واحد از منبع دوم ، یک واحد پولی است.

قیمت سایه‌ای برای مدل‌های غیر استاندارد (مدل‌هایی که دارای محدودیت‌های بزرگتر مساوی و یا مساوی هستند) :

اگر تابع هدف از نوع Max باشد ، مقدار قیمت سایه‌ای ، پس از حذف مقدار M از ضریب R ها در سطر صفر تابلوی بهینه بدست خواهد آمد. در غیر اینصورت اگر تابع هدف اصلی از نوع Min باشد ، مقدار قیمت سایه‌ای ، پس از حذف مقدار M از ضریب R ها در سطر صفر تابلوی بهینه و ضرب آن در -1 بدست خواهد آمد.

مثال : در مثال قبلی و در قسمت مسئله ثانویه داریم :

$$t_1 = \frac{5}{4} , \quad t_2 = \frac{35}{4}$$

ولی این مقدار سایه‌ای به چه درد می‌خورد ؟

برای مثال در در ابتدای مثال قبلی داشتیم : $S_1 = 10$, $S_2 = 15$. ارزش این منابع را هم در قیمت سایه‌ای بدست آوردیم ؛ پس خواهیم داشت :

$$S_1 = 10 \times 3 , \quad S_2 = 15 \times 1 \Rightarrow 10 \times 3 + 15 \times 1 = 45$$

و این همان مقدار بهینه تابع هدف مسئله اولیه است.

همچنین در قسمت ثانویه آن داشتیم : $t_1 = 8$, $t_2 = 4$. (توجه داشته باشید که این مقادیر ، مقادیر سمت راست محدودیت‌ها هستند که در تابلوی اول جدول سیمپلکس نیز موجود هستند). ارزش این منابع را هم در قیمت سایه‌ای بدست آوردیم ؛ پس خواهیم داشت :

$$t_1 = 8 \times \frac{5}{4} , \quad t_2 = 4 \times \frac{35}{4} \Rightarrow 8 \times \frac{5}{4} + 4 \times \frac{35}{4} = 10 + 35 = 45$$

این روش برای حل مسائلی استفاده می‌شود که به ظاهر بهینه (یعنی بعد از ورود مسئله در جدول سیمپلکس، تمامی اعداد سطر صفر در بازه متغیرها، غیر منفی هستند) و غیر موجه (یعنی اعداد سمت راست می‌توانند منفی باشند) حداقل یکی از آنها منفی است)) باشند. برای حل اینگونه مسائل، که بایستی محدودیت‌های کوچکتر مساوی و یا بزرگتر مساوی داشته باشند، گام‌های زیر را دنبال می‌کنیم:

۱. تابع هدف را بصورت Max و محدودیت‌ها را به شکل کوچکتر مساوی در آورید. مسئله را وارد جدول سیمپلکس نمایید.
۲. منفی ترین عدد در سمت راست را انتخاب کنید و سطر مربوط به آن متغیر را، سطر لولا نامیده و متغیر اساسی مربوط به این سطر را خروجی نام نهاده و به گام بعدی بروید. اگر تمام اعداد سمت راست، مقادیر غیر منفی داشته باشند، به جواب نهایی رسیده‌اید. توقف نمایید.
۳. متغیر ورودی را با تقسیم اعداد سطر صفر بر اعداد منفی سطر لولا و انتخاب کوچکترین عدد از نظر قدر مطلق انتخاب کنید. ستون زیر این متغیر را ستون لولا بنامید. اگر تمام عناصر سطر لولا غیر منفی باشند، مسئله فاقد ناحیه موجه است.
۴. عملیات لازم برای یافتن جواب اساسی و جدول بعدی سیمپلکس را عیناً مانند روش سیمپلکس انجام داده و به گام دوم بروید.

توجه داشته باشید که اگر محدودیت مساوی در مسئله موجود باشد، نمی‌توانید از این روش استفاده کنید.

مثال: حل مسئله زیر با استفاده از روش سیمپلکس ثانویه:

$$Min Z = 4x_1 + 12x_2 + 18x_3 \quad s.t$$

$$\textcircled{1}: x_1 + 3x_2 \geq 3$$

$$\textcircled{2}: 2x_2 + 2x_3 \geq 5$$

$$\textcircled{3}: x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$Max (-Z) = -4x_1 - 12x_2 - 18x_3 \quad s.t$$

$$\textcircled{1}: -x_1 - 3x_2 \leq -3$$

$$\textcircled{2}: -2x_2 - 2x_3 \leq -5$$

$$\textcircled{3}: x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$Max (-Z) + 4x_1 + 12x_2 + 18x_3 = 0 \quad s.t$$

$$\textcircled{1}: -x_1 - 3x_2 + S_1 = -3$$

$$\textcircled{2}: -2x_2 - 2x_3 + S_2 = -5$$

$$\textcircled{3}: x_1, x_2, x_3, S_1, S_2 \geq 0$$

و در نهایت داریم:

	Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	RHS
Z_0	-1	4	12	18	0	0	0
S_1	0	-1	0	-3	1	0	-3
S_2	0	0	-2	0	1	1	-5

« تابلوی اول »

☒ شروط اولیه:

☒ بهینگی:

☐ موجه:

اگر در تابلوی فوق دقت کنید، مشاهده خواهید کرد که در بازه متغیرها، عدد منفی وجود ندارد. پس طبق الگوریتم فوق، ابتدا سطر لولا را مشخص می‌کنیم:

منفی ترین عدد در مقادیر سمت راست $= -5$ ← پس سطر لولا، سطر S_2 خواهد بود. ولی ستون لولا؟
 $\Rightarrow \frac{12}{-2} = -6$, $\frac{18}{-2} = -9$

و کوچکترین عدد از لحاظ قدر مطلق (یا بزرگترین عدد)، -6 است؛ لذا ستون لولا هم x_2 می‌باشد. پس در تابلوهای بعدی خواهیم داشت:

	Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	RHS
Z_0	-1	4	0	6	0	6	-30
S_1	0	-1	0	-3	1	0	-3
x_2	0	0	1	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$

« تابلوی دوم »

☒ شروط اولیه:

☒ بهینگی:

☐ موجه:

هنوز هم در مقادیر سمت راست، عدد منفی وجود دارد. پس باز هم مانند قبل عمل می‌کنیم:

منفی ترین عدد در مقادیر سمت راست $= -3$ ← پس سطر لولا، سطر S_1 خواهد بود. برای ستون لولا نیز داریم:
 $\Rightarrow \frac{4}{-1} = -4$, $\frac{6}{-3} = -2$

و کوچکترین عدد از لحاظ قدر مطلق (یا بزرگترین عدد)، -2 است؛ لذا ستون لولا هم x_3 می‌باشد. پس در تابلوهای بعدی خواهیم داشت:

	Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	RHS
Z_0	-1	2	0	0	2	6	-36
x_3	0	$\frac{1}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	1
x_2	0	$-\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$

« تابلوی سوم »

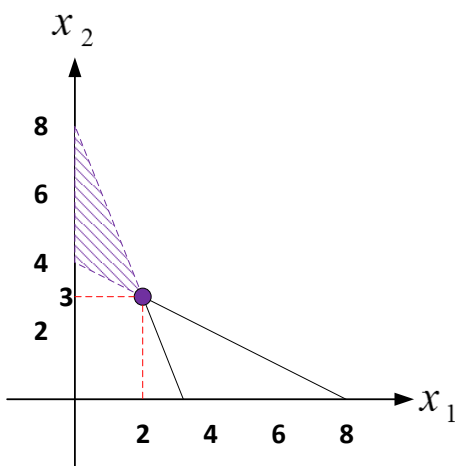
☒ شروط اولیه:

☒ بهینگی:

☒ موجه:

$$\Rightarrow x_1^* = 0, \quad x_2^* = \frac{3}{2}, \quad x_3^* = 1 \Rightarrow Z^* = -(-36) = 36$$

☛ منطقه موجه یک مسئله برنامه ریزی خطی بصورت زیر مشخص شده است. در گوشه A مقدار متغیرهای کمکی S_1, S_2 چقدر است ؟ چرا ؟



Z_0	
Z_0	
$A \rightarrow x_2$	
x_1	

با توجه به نمودار ، مسئله دارای دو متغیر تصمیم و دو محدودیت می باشد. در گوشه موجه A ، این دو متغیر تصمیم ، دارای مقدار هستند $(3, 2)$. لذا دو متغیر دیگر ، مقدار صفر خواهند داشت چون اساسی نیستند.

☛ ضریب S_2 در ردیف Z_0 تابلوی بهینه جدول سیمپلکس ، دارای مقدار 10 است. متغیر متناظر آن در مسئله ثانویه

۱. یک متغیر غیر اساسی است. ۲. دارای مقدار صفر است. ۳. یک متغیر اساسی است. ☒ ۴. آزاد در علامت است.

چون متغیر S_2 ، یک متغیر غیر اساسی است (به این دلیل که ضریب آن در سطر صفر یا در سطر مربوط به تابع هدف صفر است) و می دانیم که اگر تغییری در مسئله اولیه غیر اساسی باشد ، متناظر آن در مسئله ثانویه اساسی خواهد بود (و بالعکس) ؛ لذا گزینه سوم درست است.

☛ در صورتیکه y_0 نشاندهنده مقدار تابع هدف ثانویه مسئله زیر باشد ؛ مقدار آنرا حساب کنید.

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 4x_2 \quad \text{s.t.}$$

$$\textcircled{1} : 3x_1 + 2x_2 \geq 0$$

$$\textcircled{2} : x_1 - \frac{1}{2}x_2 \leq 0$$

$$\textcircled{3} : 2x_1 + x_2 \leq 0$$

$$\textcircled{4} : x_1, x_2 \geq 0$$

چون عناصر سمت راست محدودیتها در مسئله اولیه صفر هستند ، لذا ضریب متغیرهای تصمیم در تابع هدف مسئله ثانویه صفر می شود و در نتیجه مقدار تابع هدف ثانویه به ازای هر مقداری صفر خواهد بود.

☛ قسمتی از جداول اول و بهینه یک مسئله برنامه ریزی خطی بصورت زیر داده شده است. مطلوب است مقدار Z^* ؟

	Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	
Z_0	1						0
S_1	0						20
S_2	0						50
				$\vdots$			
Z_0	1	0	0	2	5	0	?
x_2	0						
S_2	0						

ارزش S_1 برابر 5

ارزش S_2 برابر 0

مقدار S_1 برابر 20

مقدار S_2 برابر 50

لذا با استفاده از نکته مقدار سایه ای خواهیم داشت :

$$Z^* = (5 \times 20) + (0 \times 50) = 100$$

تابلوی بهینه

☛ متغیرهای اساسی جدول بهینه مسئله زیر $x_1 = 40$ ، $x_2 = 110$ ، $S_2 = 90$ است. مقدار بهینه تابع هدف مسئله ثانویه را بدست آورید ؟

$$\text{Max } Z = 20x_1 + 10x_2 \quad \text{s.t.}$$

$$\textcircled{1} : x_1 + x_2 = 150$$

$$\textcircled{2} : x_1 \leq 40$$

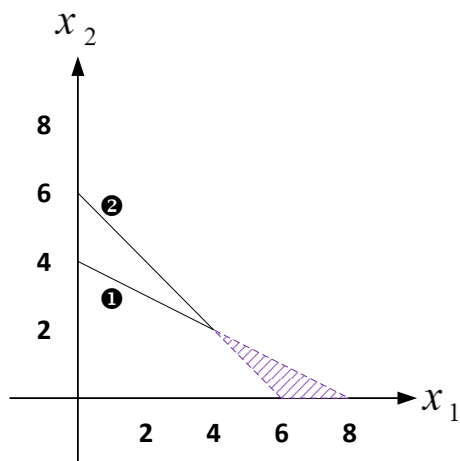
$$\textcircled{3} : x_2 \geq 0$$

$$\textcircled{4} : x_1, x_2 \geq 0$$

چون حرفی از مکمل نزده (یعنی در واقع مختصات نقطه بهینه را نمی خواهد) لذا تنها کافی است از قضیه ای که اثبات می کرد مقدار تابع هدف بهینه در مسئله اولیه و ثانویه برابر است ، استفاده کرده و مقدار بهینه را بدست آوریم. پس خواهیم داشت :

$$\Rightarrow Z^* = (20 \times 40) + (10 \times 110) = 1900 \quad , \quad Z^* = y_0^* \Rightarrow y_0^* = 1900$$

☛ ناحیهٔ موجه یک LP (Linear Programming) با تابع هدف $Min Z = 2x_1 + 3x_2$ بصورت زیر است. برای حل آن به روش سیمپلکس، از چه روش‌هایی می‌توان استفاده کرد و چرا؟



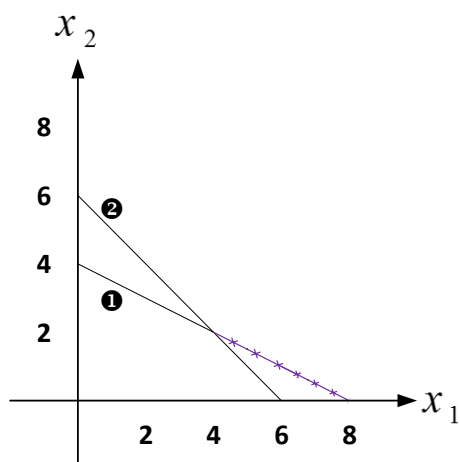
برای محدودیت اول داریم :

چون پائین خط هاشور خورده، پس محدودیت کوچکتر مساوی بوده است ($\leq$ یعنی) پس به علت وجود R از طریق M بزرگ و دو مرحله‌ای و همچنین ثانویه قابل حل است.

برای محدودیت دوم نیز داریم :

چون بالای خط هاشور خورده، پس محدودیت بزرگتر مساوی بوده است ($\geq$ یعنی) از طریق M بزرگ و دو مرحله‌ای قابل حل است. همچنین اگر آنرا در یک منفی ضرب کنیم به محدودیت کوچکتر مساوی تبدیل شده و لذا با ثانویه نیز قابل حل خواهد بود. در نتیجه از روش‌های M بزرگ و دو مرحله‌ای و همچنین ثانویه قابل حل خواهد بود.

☛ مثال فوق را برای شکل زیر، مجدداً بررسی نمائید ؟



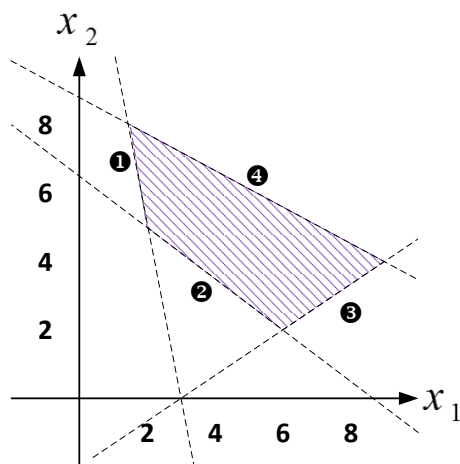
برای محدودیت اول داریم :

چون روی خط هاشور خورده، پس محدودیت مساوی بوده است ($=$ یعنی) پس از روش ثانویه قابل حل نخواهد بود.

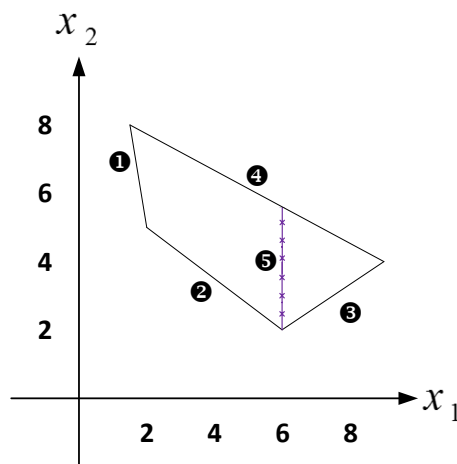
برای محدودیت دوم داریم :

چون بالای خط هاشور خورده، پس محدودیت بزرگتر مساوی بوده است ($\geq$ یعنی) از طریق M بزرگ و دو مرحله‌ای قابل حل است. همچنین اگر آنرا در یک منفی ضرب کنیم به محدودیت کوچکتر مساوی تبدیل شده و لذا با ثانویه نیز قابل حل خواهد بود. در نتیجه تنها از روش‌های M بزرگ و دو مرحله‌ای قابل حل خواهد بود.

☛ ناحیهٔ موجه دو مدل LP بصورت زیر است. تعداد محدودیت‌های بزرگتر مساوی و کوچکتر مساوی را مشخص کرده، تعداد متغیرهای مصنوعی و کمکی برای حل آن را نیز ذکر نمائید ؟



خط اول : سمت راست هاشور خورده پس محدودیت بزرگتر مساوی است
خط دوم : سمت راست هاشور خورده پس محدودیت بزرگتر مساوی است
خط سوم : سمت چپ هاشور خورده پس محدودیت کوچکتر مساوی است
خط چهارم : سمت چپ هاشور خورده پس محدودیت کوچکتر مساوی است
پس به چهار متغیر کمکی نیازمندیم. از طرفی چون دو محدودیت بزرگتر مساوی داریم پس به دو متغیر مصنوعی نیاز داریم



خط اول و دوم : محدودیت بزرگتر مساوی است
خط سوم و چهارم : محدودیت کوچکتر مساوی است
خط پنجم : محدودیت مساوی است
باز هم به چهار متغیر کمکی نیازمندیم. از طرفی چون دو محدودیت بزرگتر مساوی داریم پس به دو متغیر مصنوعی نیاز داریم

« فصل سوم : مسائل حمل و نقل »

(مربوط به یکسری از مسائل دو اندیشه هستند که البته بایستی یکسری شروط را نیز داشته باشند)
منظور از یک مسئله برنامه ریزی خطی حمل و نقل ، حمل و نقل تعداد معینی از یک محصول ، از m نقطه به عنوان مبدأ (عرضه) به n نقطه به عنوان مقصد (تقاضا) می باشد . (مسلماً این عرضه و تقاضا ، مربوط به یک محصول خاص خواهد بود) .

صورت کلی یک مسئله حمل و نقل ، بصورت زیر است :

- داخل گوشه ها : مقداری که تخصیص داده می شوند ، در این گوشه ها نوشته می شوند
- ضرایب ، داخل خود مربع های بزرگ نوشته می شوند.
- S_i ها : میزان عرضه که مسلماً از مبدأ i ام صورت گرفته است.
- D_j ها : میزان تقاضا که مسلماً از مقصد j ام صورت گرفته است.
- C_{ij} ها : هزینه حمل یک واحد کالا از مبدأ i ام به مقصد j ام
- x_{ij} ها : میزان کالایی که باید از مبدأ i ام به مقصد j ام ارسال شود
- S_i ها و D_j ها در واقع مقادیر سمت راست محدودیت ها هستند

		مقصد یا تقاضا				
		1	2	...	n	میزان عرضه
مبدأ یا عرضه	مقصد مبدأ	1	2	...	n	
	1	C_{11}	C_{12}		C_{1n}	S_1
	2	C_{21}	C_{22}		C_{2n}	S_2
	...					...
	m	C_{m1}	C_{m2}		C_{mn}	S_m
میزان تقاضا		D_1	D_2	...	D_n	

معمولاً مسائل حمل و نقلی در مورد هزینه صحبت کرده و لذا تابع هدف آنها بصورت Min است. پس خواهیم داشت :

$$Min Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} \cdot x_{ij} \quad s.t \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} = S_i \quad , \quad \sum_{i=1}^m x_{ij} = D_j \quad , \quad x_{ij} \geq 0$$

که در آن :

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = S_i \quad , \quad \sum_{i=1}^m x_{ij} = D_j \quad \bullet \quad \text{محدودیت های مربوط به عرضه است.} \quad \bullet \quad \sum_{i=1}^m x_{ij} = D_j \quad , \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} = S_i \quad \bullet \quad \text{محدودیت های مربوط به تقاضا است.}$$

نکته : این مسائل ، دارای یک فرض مهم و اساسی است که باید برقرار باشد ؛ یعنی : $\sum_{i=1}^m S_i = \sum_{j=1}^n D_j$

نکته : جواب مسائل حمل و نقل ، همواره جوابی موجه و عدد صحیح است. هیچگاه دارای منطقه موجه نامحدود و یا بدون جواب نیست. ضمناً محدودیت های عرضه می توانند بصورت کوچکتر مساوی و محدودیت های تقاضا می توانند بصورت بزرگتر مساوی باشند.

رویه حل کلیه مسائل حمل و نقل :

حل اینگونه مسائل دارای یکسری گام به شرح زیر است :

۱. برابر کردن میزان عرضه کل با تقاضای کل ؛ البته در صورتی که برابر نباشند.
 ۲. بدست آوردن یک جواب پایه قابل قبول (موجه) ابتدائی
 ۳. بررسی بهینگی جواب موجه بدست آمده
- حال هر یک از گام های فوق را بصورت کامل توضیح خواهیم داد.

توضیح گام اول : برابر کردن میزان عرضه کل با تقاضای کل :

اگر عبارت $\sum_i S_i = \sum_j D_j$ برقرار نباشد ، دو حالت بوجود خواهد آمد :

$$1. \quad \sum_i S_i > \sum_j D_j \quad \text{یعنی : میزان عرضه کل از تقاضا بیشتر است ؛}$$

کاری که باید انجام دهیم : اضافه کردن تقاضای مجازی متعادل ساز (ستون) به میزان $\sum_i S_i - \sum_j D_j$

$$2. \quad \sum_j D_j > \sum_i S_i \quad \text{یعنی : میزان تقاضای کل از عرضه بیشتر است ؛}$$

کاری که باید انجام دهیم : اضافه کردن عرضه مجازی متعادل ساز (سطر) به میزان $\sum_j D_j - \sum_i S_i$

نکته : در هر دو حالت ، چون مقادیر اضافه شده مجازی هستند ، لذا هزینه ارسال در آنها ، صفر در نظر گرفته خواهد شد.

مثال : مسئله حمل و نقل زیر را متوازن کنید. (توجه داشته باشید که در امتحان مسائل به اینصورت مطرح نخواهد شد ؛ بلکه این ، مرحله‌ای از یک سؤال است)
متوازن سازی : چون $\sum_i S_i > \sum_j D_j$ ؛ لذا یک ستون مجازی اضافه خواهد شد.

مقصد \ میزبان	1	2	3	عرضه
1	1	2	1	20
2	0	4	5	40
3	2	3	3	30
میزان تقاضا	30	20	20	

→

مقصد \ میزبان	1	2	3	4	عرضه
1	1	2	1	0	20
2	0	4	5	0	40
3	2	3	3	0	30
میزان تقاضا	30	20	20	20	

توضیح گام دوم : بدست آوردن یک جواب پایه قابل قبول (موجه) ابتدائی :

برای این گام چندین روش وجود دارد که عبارتند از :

۱. روش گوشه شمال غربی
 ۲. روش حداقل هزینه روی سطر
 ۳. روش حداقل هزینه روی ستون
 ۴. روش حداقل هزینه روی ماتریس
 ۵. روش وُگل یا فُگل
 ۶. روش راسل
- که به توضیح آنها می‌پردازیم.

روش گوشه شمال غربی :

از گوشه شمال غربی ، یعنی گوشه چپ بالایی (X_{11}) شروع می‌کنیم. میزان عرضه و تقاضای مسئله از میزان بیشینه مجاز تخصیصی کسر می‌شود. در گام بعد ، سطر یا ستونی که عرضه یا تقاضای آن صفر شده ، حذف می‌شود. سپس این روند را ادامه داده تا کل سطر یا ستون‌های جدول حذف شوند. (نکته : اگر مقدار عرضه یا تقاضای هر دو سطر و ستون ، بصورت همزمان صفر شد ، یک سطر یا ستون را به دلخواه حذف می‌کنیم.)

مثال : مسئله زیر را در نظر بگیرید. یک جواب قابل قبول به روش گوشه شمال غربی بدست آورید.

$$\text{Min } Z = 2x_{11} + 3x_{12} + 4x_{13} + 3x_{21} + 4x_{22} + x_{23}$$

s. t

$$\textcircled{1} : x_{11} + x_{21} = 10$$

$$\textcircled{2} : x_{12} + x_{22} = 20$$

$$\textcircled{3} : x_{13} + x_{23} = 20$$

$$\textcircled{4} : x_{11} + x_{12} + x_{13} = 20$$

$$\textcircled{5} : x_{21} + x_{22} + x_{23} = 30$$

$$\textcircled{6} : x_{ij} \geq 0 \quad i=1,2 \quad j=1,2,3$$

مقصد \ میزبان	1	2	3	عرضه
1	2	3	4	20
2	3	4	1	30
میزان تقاضا	10	20	20	

$$\sum_j D_j = 50$$

$$\sum_i S_i = 50$$

پس شرط
برقرار است

→

مقصد مبدأ	1	2	3	میزان عرضه	
1	10	2	3	4	20 10
2		3	4	1	30
میزان تقاضا	10 0	20	20		

از گوشه شمال غربی شروع می‌کنیم ؛ یعنی X_{11} . بالاترین مقداری که از بین عرضه و تقاضا (یعنی از ستون اول و از سطر اول) می‌توان انتخاب کرد ، برابر 10 است (بیشینه تخصیصی). این مقدار را به X_{11} تخصیص می‌دهیم. حال که مقدار ستون اول برابر صفر شده ، این ستون را نیز حذف می‌کنیم.

مقصد \ میزبان	2	3	عرضه
1	3	4	10
2	4	1	30
میزان تقاضا	20	20	

مقصد \ میزبان	2	3	عرضه
2	4	1	30
میزان تقاضا	10	20	

مقصد \ میزبان	3	عرضه
2	1	20
میزان تقاضا	20	

$$\Rightarrow x_{11}=10, \quad x_{12}=10, \quad x_{22}=10, \quad x_{23}=20 \Rightarrow Z = (2 \times 10) + (3 \times 10) + (4 \times 10) + (1 \times 20) = 110$$

این یک جواب موجه ابتدائی است ؛ ولی باید بررسی کنیم که آیا مقدار بدست آمده ، بهینه است یا خیر ؟

روش حداقل هزینه روی سطر :

در این روش ، کار را از سطر اول شروع می کنیم. اولین تخصیص به متغیری صورت می گیرد که کمترین هزینه (C_{ij}) را دارد. این کار را تا مصرف کامل سطر اول ادامه می دهیم. سپس این روند را در سطرها بعدی تکرار خواهیم کرد.

مثال : یک جواب موجه آغازین برای مسئله حمل و نقل زیر به روش حداقل هزینه روی سطر بدست آورید.

مقصد مبدأ	A	B	C	D	میزان عرضه
1	10	2	5	1	100
2	6	8	4	3	50
3	7	12	9	2	150
میزان تقاضا	70	100	80	50	

$$\sum_j D_j = \sum_i S_i = 300$$

پس شرط اول برقرار می باشد
لذا می توانیم به گام های بعدی برویم

پس در سطر اول ،

به خانه ای که کمترین هزینه را دارد ، مراجعه می کنیم.

مقادیر تخصیص داده شده به ترتیب عبارتند از :

$$\begin{aligned} 1: & x_{1D} = 50, \quad 2: x_{1B} = 50, \quad 3: x_{2C} = 50 \\ 4: & x_{3A} = 70, \quad 5: x_{3C} = 30, \quad 6: x_{3B} = 50 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow Z &= \left\{ (1 \times 50) + (2 \times 50) + (4 \times 50) + \right. \\ &\quad \left. (7 \times 70) + (9 \times 30) + (12 \times 50) \right\} \\ \Rightarrow Z &= 1710 \end{aligned}$$

مقصد مبدأ	A	B	C	D	میزان عرضه
1	10	50 2	5	50 1	100 50 0
2	6	8	50 4	3	50 0
3	70 7	50 12	30 9	2	150 80 50 0
میزان تقاضا	70 0	100 50 0	80 30 0	50 0	

روش حداقل هزینه روی ستون :

در این روش ، کار را از ستون اول شروع می کنیم. اولین تخصیص به متغیری صورت می گیرد که کمترین هزینه (C_{ij}) را دارد. این کار را تا مصرف کامل ستون اول ادامه می دهیم. سپس این روند را در ستون های بعدی تکرار خواهیم کرد.

مثال : یک جواب موجه آغازین برای مسئله حمل و نقل زیر به روش حداقل هزینه روی ستون بدست آورید.

مقصد مبدأ	A	B	C	D	میزان عرضه
1	10	2	5	1	100
2	6	8	4	3	50
3	7	12	9	2	150
میزان تقاضا	70	100	80	50	

$$\sum_j D_j = \sum_i S_i = 300$$

پس شرط اول برقرار می باشد
لذا می توانیم به گام های بعدی برویم

پس در ستون اول ،

به خانه ای که کمترین هزینه را دارد ، مراجعه می کنیم.

مقادیر تخصیص داده شده به ترتیب عبارتند از :

$$\begin{aligned} 1: & x_{2A} = 50, \quad 2: x_{3A} = 20, \quad 3: x_{1B} = 100 \\ 4: & x_{3C} = 80, \quad 5: x_{3D} = 50 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow Z &= \left\{ (6 \times 50) + (7 \times 20) + (2 \times 100) \right. \\ &\quad \left. + (9 \times 80) + (2 \times 50) \right\} \\ \Rightarrow Z &= 1460 \end{aligned}$$

مقصد مبدأ	A	B	C	D	میزان عرضه
1	10	100 2	5	1	100⁰
2	50 6	8	4	3	50⁰
3	20 7	12	80 9	50 2	150¹³⁰_{50 0}
میزان تقاضا	70_{20 0}	100₀	80₀	50₀	

روش حداقل هزینه روی ماتریس :

در این روش ، حداقل هزینه حمل و نقل ، در کل خانه‌های جدول جستجو می‌شود و به متغیر آن خانه ، حداقل عرضه و تقاضا ، مشابه روش‌های قبلی تخصیص می‌یابد.

مثال : مسئله زیر را در نظر گرفته ، یک جواب موجه ابتدائی از طریق حداقل هزینه روی ماتریس بدست آورید.

مقصد مبدأ	1	2	3	میزان عرضه
1	2	3	4	20
2	3	4	1	30
میزان تقاضا	10	20	20	

$$\sum_j D_j = 50$$

$$\sum_i S_i = 50$$

پس شرط
برقرار است
→

مقصد مبدأ	1	2	3	میزان عرضه
1	10	10	4	20 ₀
2	3	10	20	30 ₀
میزان تقاضا	10 ₀	20 _{10 0}	20 ₀	

مقادیر تخصیص داده شده به ترتیب عبارتند از :

$$1: x_{23} = 20, \quad 2: x_{11} = 10, \quad 3: x_{12} = 10, \quad 4: x_{22} = 10$$

$$\Rightarrow Z = (1 \times 20) + (2 \times 10) + (3 \times 10) + (4 \times 10) \Rightarrow Z = 110$$

روش وگل یا فگل :

در این روش ، برای هر سطر و ستون جدول ، جریمه‌ای را تعریف می‌کنیم که برابر است با تفاضل دو هزینه مینیموم در همان سطر یا ستون جدول. سپس به ازای بزرگترین جریمه ممکن ، به کمترین هزینه سطر یا ستون ، عمل تخصیص را انجام می‌دهیم. این عمل را تا زمانیکه به یک سطر یا ستون خط نخورده برسیم ، تکرار می‌کنیم.

مثال : یک جواب موجه آغازین برای مسئله حمل و نقل زیر به روش وگل بدست آورید.

$$\sum_j D_j = \sum_i S_i = 50$$

و لذا شرط برقرار است.

مقصد مبدأ	1	2	3	میزان عرضه
1	2	3	4	20
2	3	4	1	30
میزان تقاضا	10	20	20	

سطر و ستون جریمه را اضافه کرده و طبق الگوریتم روش وگل ، عمل می‌کنیم.
خواهیم داشت :

برای مثال :

- دو هزینه کمتر در سطر اول ، برابر 2,3 می‌باشد. پس تفاضل آنها که برابر یک است در جریمه مربوط به این سطر نوشته خواهد شد.
- پس از نوشتن کلیه جرائم ، بزرگترین جریمه ممکن را انتخاب می‌کنیم ؛ یعنی ستون سوم.
- از کمترین هزینه واقع در سطر یا ستون انتخابی ، تخصیص را شروع می‌کنیم.

مقصد مبدأ	1	2	3	میزان عرضه	جریمه سطر
1	2	3	4	20	1
2	3	4	1	30	2
میزان تقاضا	10	20	20		
جریمه ستون	1	1	3		

مقصد مبدأ	1	2	3	میزان عرضه	جریمه سطر
1	2	20	4	20 ₀	1
2	10	4	20	30 _{10 0}	2
میزان تقاضا	10 ₀	20 ₀	20 ₀		
جریمه ستون	1	1	3		

مقادیر تخصیص داده شده به ترتیب عبارتند از :

$$1: x_{23} = 20, \quad 2: x_{22} = 10, \quad 3: x_{12} = 20$$

$$\Rightarrow Z = (1 \times 20) + (3 \times 10) + (3 \times 20) \Rightarrow Z = 110$$

نکته : وقتی سطر و ستون با هم حذف می‌شوند ، حالت تبه‌گن یا تباهی‌دگی در مسائل حمل و نقل بوجود آمده است. البته ما به دنبال حالات خاص در مسائل حمل و نقل نخواهیم بود.

روش راسل :

در این روش ، ابتدا بزرگترین هزینه سطرها (U_i) و بزرگترین هزینه ستون‌ها (V_j) را در نظر می‌گیریم. برای هزینه اساسی X_{ij} ، مقدار Δ_{ij} را از رابطه $\Delta_{ij} = C_{ij} - U_i - V_j$ بدست می‌آوریم. منفی‌ترین مقدار Δ_{ij} را انتخاب کرده و به متغیر مربوطه ، حداقل مقدار عرضه و تقاضا را تخصیص می‌دهیم. سطر یا ستونی که میزان عرضه یا تقاضای آن صفر شود ، حذف می‌شود.

مثال : مسئله زیر را در نظر گرفته ، یک جواب موجه ابتدائی از طریق روش راسل بدست آورید.

$$\sum_j D_j = \sum_i S_i = 50 \quad \text{و لذا شرط برقرار است. پس } \Delta_{ij} \text{ را بدست می‌آوریم}$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{11} &= C_{11} - U_1 - V_1 = 2 - 4 - 3 = -5 \\ \Delta_{12} &= C_{12} - U_1 - V_2 = 3 - 4 - 4 = -5 \\ \Delta_{13} &= C_{13} - U_1 - V_3 = 4 - 4 - 4 = -4 \\ \Delta_{21} &= C_{21} - U_2 - V_1 = 3 - 4 - 3 = -4 \\ \Delta_{22} &= C_{22} - U_2 - V_2 = 4 - 4 - 4 = -4 \\ \Delta_{23} &= C_{23} - U_2 - V_3 = 1 - 4 - 4 = -7 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta_{23} \quad \checkmark$$

مقادیر تخصیص داده شده به ترتیب عبارتند از :

$$\begin{aligned} 1: \quad x_{23} &= 20 \quad , \quad 2: \quad x_{12} = 20 \quad , \quad 3: \quad x_{22} = 10 \\ \Rightarrow \quad Z &= (1 \times 20) + (3 \times 20) + (3 \times 10) \Rightarrow \quad Z = 110 \end{aligned}$$

توجه داشته باشید که پس از تخصیص عرضه یا تقاضا به X_{23} ، مقادیر مربوط به Δ_{23} و Δ_{13} حذف شده و لذا دیگر قادر به انتخاب آنها نخواهیم بود.

مقصد مبدأ	1	2	3	میزان عرضه
1	2	3	4	20
2	3	4	1	30
میزان تقاضا	10	20	20	

مقصد مبدأ	1	2	3	میزان عرضه
1	2	20	4	20 ⁰
2	10	3	20	10 ⁰
میزان تقاضا	10 ⁰	20 ⁰	20 ⁰	

تمرین : مسئله زیر را در نظر گرفته ، یک جواب موجه ابتدائی از طریق روش‌هایی که تاکنون مطرح شده ، بدست آورید.

مقصد مبدأ	A	B	C	D	میزان عرضه
1	2	1	3	2	15
2	4	1	2	3	20
3	1	5	2	2	35
میزان تقاضا	10	25	15	30	

$$\sum_i S_i = 70$$

$$\sum_j D_j = 80$$

و لذا شرط برقرار

نبوده و بایستی

آنها برقرار کنیم

→

مقصد مبدأ	A	B	C	D	میزان عرضه
1	2	1	3	2	15
2	4	1	2	3	20
3	1	5	2	2	35
4	0	0	0	0	10
میزان تقاضا	10	25	15	30	

مقصد مبدأ	A	B	C	D	میزان عرضه
1	10	5	3	2	15
2		20	2	3	20
3			15	2	35
4				10	10
میزان تقاضا	10	25	15	30	

روش گوشه شمال غربی : مقادیر تخصیص یافته به ترتیب عبارتند از :

$$1: x_{1A} = 10, \quad 2: x_{1B} = 5, \quad 3: x_{2B} = 20$$

$$4: x_{3C} = 15, \quad 5: x_{3D} = 20, \quad 6: x_{4D} = 10$$

$$\Rightarrow Z = \begin{cases} (2 \times 10) + (1 \times 5) + (1 \times 20) + \\ (2 \times 15) + (2 \times 20) + (0 \times 10) \end{cases}$$

$$\Rightarrow Z = 115$$

مقصد مبدأ	A	B	C	D	میزان عرضه
1		15	3	2	15
2		10	10	3	20
3	10		5	2	35
4			5	5	10
میزان تقاضا	10	25	15	30	

روش حداقل هزینه روی سطر : مقادیر تخصیص یافته به ترتیب عبارتند از :

$$1: x_{1B} = 15, \quad 2: x_{2B} = 10, \quad 3: x_{2C} = 10$$

$$4: x_{3A} = 10, \quad 5: x_{3D} = 25, \quad 6: x_{4C} = 5$$

$$7: x_{4D} = 5$$

$$\Rightarrow Z = \begin{cases} (1 \times 15) + (1 \times 10) + (2 \times 10) + (1 \times 10) \\ + (2 \times 25) + (0 \times 5) + (0 \times 5) \end{cases}$$

$$\Rightarrow Z = 105$$

مقصد مبدأ	A	B	C	D	میزان عرضه
1		15	3	2	15
2		10	10	3	20
3			5	2	35
4	10			0	10
میزان تقاضا	10	25	15	30	

روش حداقل هزینه روی ستون : مقادیر تخصیص یافته به ترتیب عبارتند از :

$$1: x_{4A} = 10, \quad 2: x_{1B} = 15, \quad 3: x_{2B} = 10$$

$$4: x_{2C} = 10, \quad 5: x_{3C} = 5, \quad 6: x_{3D} = 30$$

$$\Rightarrow Z = \begin{cases} (0 \times 10) + (1 \times 15) + (1 \times 10) + \\ (2 \times 10) + (2 \times 5) + (2 \times 30) \end{cases}$$

$$\Rightarrow Z = 115$$

مقصد مبدأ	A	B	C	D	میزان عرضه
1	2	15 1	3	2	15 0
2	4	10 1	10 2	3	20 10 0
3	1	5	5 2	30 2	35 30 0
4	10 0	0	0	0	10 0
میزان تقاضا	10	25	15	30	

روش حداقل هزینه روی ماتریس : مقادیر تخصیص یافته به ترتیب عبارتند از :

$$1: x_{4A} = 10, \quad 2: x_{1B} = 15, \quad 3: x_{2B} = 10$$

$$4: x_{2C} = 10, \quad 5: x_{3C} = 5, \quad 6: x_{3D} = 30$$

$$\Rightarrow Z = \begin{cases} (0 \times 10) + (1 \times 15) + (1 \times 10) + \\ (2 \times 10) + (2 \times 5) + (2 \times 30) \end{cases}$$

$$\Rightarrow Z = 115$$

مقصد مبدأ	A	B	C	D	میزان عرضه	جریمه سطر
1	2	1	3	2	15	1
2	4	1	2	3	20	1
3	1	5	2	2	35	1
4	0	0	0	0	10	0
میزان تقاضا	10	25	15	30		
جریمه ستون	1	1	2	2		

مقصد مبدأ	A	B	C	D	میزان عرضه	جریمه سطر
1	10 2	5 1	3	2	15	10 1
2	4	20 1	2	3	20	0 1
3	1	5	15 2	20 2	35	15 1
4	0	0	0	10 0	10	0 0
میزان تقاضا	10	25	15	30		
جریمه ستون	1	1	2	2		

روش وگل : مقادیر تخصیص یافته به ترتیب عبارتند از :

$$1: x_{4D} = 10, \quad 2: x_{3D} = 20, \quad 3: x_{3C} = 15$$

$$4: x_{2B} = 20, \quad 5: x_{1B} = 5, \quad 6: x_{1A} = 10 \Rightarrow Z = \begin{cases} (0 \times 10) + (2 \times 20) + (2 \times 15) + \\ (1 \times 20) + (1 \times 5) + (2 \times 10) \end{cases} \Rightarrow Z = 115$$

روش راسل :

$$\Delta_{1A} = C_{1A} - U_1 - V_A = 2 - 3 - 4 = -5$$

$$\Delta_{1B} = C_{1B} - U_1 - V_B = 1 - 3 - 5 = -7$$

$$\Delta_{1C} = C_{1C} - U_1 - V_C = 3 - 3 - 3 = -3$$

$$\Delta_{1D} = C_{1D} - U_1 - V_D = 2 - 3 - 3 = -4$$

$$\Delta_{2A} = C_{2A} - U_2 - V_A = 4 - 4 - 4 = -4$$

$$\Delta_{2B} = C_{2B} - U_2 - V_B = 1 - 4 - 5 = -8$$

$$\Delta_{2C} = C_{2C} - U_2 - V_C = 2 - 4 - 3 = -5$$

$$\Delta_{2D} = C_{2D} - U_2 - V_D = 3 - 4 - 3 = -4$$

$$\Delta_{3A} = C_{3A} - U_3 - V_A = 1 - 5 - 4 = -8$$

$$\Delta_{3B} = C_{3B} - U_3 - V_B = 5 - 5 - 5 = -5$$

$$\Delta_{3C} = C_{3C} - U_3 - V_C = 2 - 5 - 3 = -6$$

$$\Delta_{3D} = C_{3D} - U_3 - V_D = 2 - 5 - 3 = -6$$

$$\Delta_{4A} = C_{4A} - U_4 - V_A = 0 - 0 - 4 = -4$$

$$\Delta_{4B} = C_{4B} - U_4 - V_B = 0 - 0 - 5 = -5$$

$$\Delta_{4C} = C_{4C} - U_4 - V_C = 0 - 0 - 3 = -3$$

$$\Delta_{4D} = C_{4D} - U_4 - V_D = 0 - 0 - 3 = -3$$

مقصد مبدأ	A	B	C	D	میزان عرضه
1	2	5 1	3	10 2	15 10 0
2	4	20 1	2	3	20 0
3	10 1	5	15 2	10 2	35 25 10 0
4	0	0	0	10 0	10 0
میزان تقاضا	10	25	15	30	

مقادیر تخصیص یافته به ترتیب عبارتند از :

$$1: x_{2B} = 20, \quad 2: x_{3A} = 10, \quad 3: x_{1B} = 5$$

$$4: x_{3C} = 15, \quad 5: x_{3D} = 10, \quad 6: x_{1D} = 10$$

$$7: x_{4D} = 10$$

$$\Rightarrow Z = \begin{cases} (1 \times 20) + (1 \times 10) + (1 \times 5) + (2 \times 15) \\ + (2 \times 10) + (2 \times 10) + (0 \times 10) \end{cases}$$

$$\Rightarrow Z = 105$$

بهینگی جداول حمل و نقل :

قبل از بررسی بهینگی ، به چند تعریف مهم می پردازیم :

- متغیر اساسی یا پایه : همان جواب های موجه ابتدائی می باشند ؛ یعنی خانه های تخصیص یافته.
- متغیرهای غیر اساسی یا غیر پایه : خانه های خالی جدول که به آنها مقداری تخصیص داده نشده ، متغیرهای غیر پایه هستند.
- شاخه : یک خط جهت دار است که دو خانه پایه (فقط و فقط خانه های ابتدائی و انتهایی بردار ، مورد نظر است) ، روی یک سطر یا ستون در جدول را به هم متصل می کند.
- مسیر جهت دار : یک مجموعه شاخه جهت دار است که
 ۱. شروع هر شاخه ، ختم شاخه قبلی است.
 ۲. هر دو شاخه پشت سر هم ، بر هم عمود هستند.
- حلقه جهت دار : حلقه ای است که از یک خانه غیر پایه ، به یک مسیر جهت دار عمود می شود و عمدتاً به یکی از اشکال زیر است :



برای بررسی بهینگی جواب موجه ابتدائی ، دو روش وجود دارد که عبارتند از :

۱. روش مستقیم یا پله سنگ
۲. روش مضارب یا توزیع تعدیل شده

روش مستقیم یا پله سنگ :

این روش ، حاوی گام های زیر است :

۱. جواب موجه ابتدائی را به یکی از روش های ذکر شده پیدا می کنیم.
۲. برای بردارهای غیر پایه ، مقدار $Z_{ij} - C_{ij} = C_B y_{ij} - C_{ij}$ را بدست می آوریم. برای بردارهای پایه (خانه های پایه یا متغیرهای پایه) این مقدار برابر صفر است. در عبارت فوق ، C_{ij} ضریب متغیرهای تصمیم و C_B ضریب متغیر پایه بر روی حلقه است. روش محاسبه این مقدار بشرح زیر است :
 - برای خانه های غیر پایه ، یک حلقه جهت دار رسم می کنیم. به ترتیب به آنها ، -1 و $+1$ را y_{ij} اختصاص می دهیم. (به اولین خانه ای که جزء بردار پایه است ، $+1$ و به دومین خانه بردار پایه در آنسوی شاخه ، -1 را تخصیص می دهیم).
 - اگر مقدار $Z_{ij} - C_{ij}$ که در مرحله قبل حساب شد ، همگی منفی یا صفر باشند ، جواب بدست آمده نهایی و بهینه است. در غیر اینصورت به گام سوم می رویم.
۳. تعیین متغیر ورودی : مثبت ترین $Z_{ij} - C_{ij}$ را به عنوان بردار ورودی (متغیر ورودی) در نظر می گیریم.
۴. تعیین متغیر خروجی : مقادیر متغیرهای پایه که در مسیر حلقه دارند و y_{ij} برای آنها برابر $+1$ است را نظر می گیریم. متغیری که حداقل ضریب هزینه بر روی آن واقع شده است ، متغیر خروجی جدول در نظر گرفته شود.
۵. ایجاد جدول جدید : خانه هایی که دارای $y_{ij} = +1$ هستند ، مقدار متغیر خروجی را از آنها کم می کنیم و خانه های که دارای $y_{ij} = -1$ هستند ، مقدار متغیر خروجی را به آنها اضافه می کنیم. بقیه خانه ها به همان صورت قبلی نوشته می شوند. سپس دستورالعمل را از گام سوم ، تکرار می کنیم.

روش مضارب یا توزیع تعدیل شده :

فرض کنید مسئله ما بصورت زیر باشد :

$$\text{Max } Z' = \sum_{i=1}^m S_i U_i + \sum_{j=1}^n D_j V_j \quad \text{s.t.}$$

$$U_i + V_j \leq C_{ij}$$

U_i, V_j آزاد در علامت

$$i = 1, 2, \dots, m \quad , \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} x_{ij} \quad \text{s.t.}$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = D_j \quad , \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} = S_i$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, m \quad , \quad j = 1, 2, \dots, n$$

ثانویه
←

بحث ما در اینجا ، ثانویه مسائل حمل و نقل نیست. تنها می خواهیم از U_i, V_j در این روش استفاده کنیم.

از رابطه $U_i + V_j = C_{ij}$ ، U_i ها و V_j ها را برای خانه های پایه محاسبه می کنیم. (برای شروع کار ، یک مقدار دلخواه به یکی از مقادیر U_i یا V_j داده و بقیه را بدست می آوریم). سپس آنها را در محدودیت مسئله ثانویه قرار می دهیم ؛ یعنی $U_i + V_j \leq C_{ij}$. اگر در همه صدق کرد ، جواب بهینه است. اگر صدق نکرد ، ادامه روش را به روش پله سنگ ادامه می دهیم. (یعنی محاسبه $Z_{ij} - C_{ij}$ برای خانه های غیر پایه و ...)

مثال : مدل حمل و نقل زیر را در نظر بگیرید و برنامه ریزی حمل و نقل را به روش اول بگونه‌ای که حداقل پرداخت هزینه را داشته باشیم ، محاسبه نمایید. (وقتی می‌گویند حداقل را داشته باشیم ؛ یعنی جواب بهینه مورد نظر است)

مقصد مبدأ	1	2	3	میزان عرضه
1	10	2	3	4
2		3	4	10
میزان تقاضا	10	20	20	

با استفاده از روش گوشه شمال غربی ، مقادیر تخصیص داده شده عبارتند از :

$$x_{11} = 10, \quad x_{12} = 10, \quad x_{22} = 10, \quad x_{23} = 20$$

$$\Rightarrow Z = 290$$

نکات :

- دو متغیر غیر پایه در جدول فوق وجود دارد که عبارتند از : x_{21} و x_{13} . این دو خانه ، همان خانه‌هایی هستند که به آنها مقداری تخصیص داده نشده است. لذا باید روی آنها یک حلقه ایجاد کنیم. ولی به چه شکلی ؟ به شکل‌های داده شده در صفحه قبل.
- اشکال از خطوطی تشکیل شده‌اند که بر هم عمودند. این خطوط نمی‌توانند بصورت مورب رسم شوند.
- در هر حلقه ، باید تنها یک متغیر غیر پایه وجود داشته باشد. جهت این حلقه‌ها مهم نیست و از همان خانه‌های غیر پایه شروع و به همانجا ختم خواهد شد. پس دو تا حلقه خواهیم داشت.

مقصد مبدأ	1	2	3	میزان عرضه
1	10	2	3	4
2		3	4	10
میزان تقاضا	10	20	20	

- حال که حلقه‌ها را رسم کردیم ، برای بررسی بهینگی ، باید مقدار $Z_{ij} - C_{ij}$ را برای خانه‌های غیر پایه محاسبه کنیم.

• برای حلقه قرمز رنگ داریم :

$$Z_{13} - C_{13} = [(-1 \times 4) + (+1 \times 3) + (-1 \times 4) + (+1 \times 10)] = 5$$

• برای حلقه سبز رنگ داریم :

$$Z_{21} - C_{21} = [(-1 \times 3) + (+1 \times 4) + (-1 \times 3) + (+1 \times 2)] = 0$$

- اگر هر دو مقدار فوق ، منفی یا صفر می‌شدند ، مقدار $Z = 290$ بهینه بود. ولی در اینجا اینطور نیست. پس باید جدول جدید رسم شود
- برای رسم جدول بایستی متغیرهای ورودی و خروجی مشخص شوند.

- مثبت‌ترین مقدار ، از مقادیر بدست آمده در فوق : +5 ؛ پس متغیر ورودی ، x_{13} می‌باشد ، زیرا مقدار +5 مربوط به حلقه این خانه است.
- وقتی می‌گوئیم : متغیر ورودی ؛ یعنی می‌خواهیم به این خانه ، مقداری را تخصیص دهیم.

مقصد مبدأ	1	2	3	میزان عرضه
1	10	2	3	4
2		3	4	10
میزان تقاضا	10	20	20	

- برای متغیر خروجی ، به حلقه مربوط به متغیر ورودی نگاه کرده و خانه‌هایی که در آنها $y_{ij} = +1$ است را در نظر می‌گیریم. (در مثال فوق خانه‌های x_{12}, x_{23}). کدامیک کمترین هزینه را دارند ؟ x_{12} ؛ لذا متغیر خروجی ما ، x_{12} خواهد بود.

- جدول جدید را رسم می‌کنیم. در جدول جدید ، تنها مقادیر تخصیص عوض خواهند شد.

$$x_{11} = 10, \quad x_{13} = 10, \quad x_{22} = 20, \quad x_{23} = 10$$

$$\Rightarrow Z = 240$$

- اگر توجه کنید ، مقدار Z در حال کم شدن است.
- در این جدول هم دو خانه غیر پایه وجود دارد و لذا بایستی دو حلقه رسم کنیم.

• برای حلقه قرمز رنگ داریم :

$$Z_{12} - C_{12} = [(-1 \times 3) + (+1 \times 4) + (-1 \times 10) + (+1 \times 4)] = -5$$

• برای حلقه سبز رنگ داریم :

$$Z_{21} - C_{21} = [(-1 \times 3) + (+1 \times 2) + (-1 \times 4) + (+1 \times 10)] = 5$$

- باز هم بهینه نشد. پس باید یک گام دیگر ادامه دهیم.
- مثبت‌ترین مقدار ، از مقادیر بدست آمده در فوق : +5 ؛ پس متغیر ورودی ، x_{21} می‌باشد.
- متغیر خروجی نیز ، x_{11} خواهد بود.
- جدول جدید را رسم می‌کنیم.

مقصد مبدأ	1	2	3	میزان عرضه
1	10	2	3	4
2		3	4	10
میزان تقاضا	10	20	20	

مقصد مبدأ	1	2	3	میزان عرضه
1	0	2	3	20
2	10	3	4	10
میزان تقاضا	10	20	20	

مقصد مبدأ	1	2	3	میزان عرضه
1	0	2	3	20
2	10	3	4	10
میزان تقاضا	10	20	20	

$$x_{13} = 20, \quad x_{21} = 10, \quad x_{22} = 20$$

$$\Rightarrow Z = 190$$

- توجه کنید که در این جدول ، سه خانه غیر پایه وجود دارد ولی برعکس مراحل قبلی ، یکی از این خانه‌ها از مراحل قبلی ، تکرار شده است. برای این خانه حلقه رسم خواهیم کرد. اگر نقطه‌ای وجود داشته باشد که در چندین مرحله صفر باشد ، آن مسئله دارای حالت بهینه چندگانه است. باز هم یادآوری می‌کنیم که در مسائل حمل و نقل ، به بررسی حالات خاص نمی‌پردازیم.

- برای حلقه قرمز رنگ داریم :

$$Z_{23} - C_{23} = [(-1 \times 10) + (+1 \times 4) + (-1 \times 3) + (+1 \times 4)] = -5$$

- برای حلقه سبز رنگ داریم :

$$Z_{11} - C_{11} = [(-1 \times 2) + (+1 \times 3) + (-1 \times 4) + (+1 \times 3)] = 0$$

- هر دو مقدار ، صفر یا منفی شدند. لذا مقدار Z بهینه است.

مثال : یک جواب موجه آغازین مسئله حمل و نقل بصورت زیر است. جواب بهینه مسئله را به روش مضارب بدست آورید ؟

مقصد مبدأ	A	B	C	D	میزان عرضه
1	10	2	5	1	100
2	6	8	4	3	50
3	7	12	9	2	150
میزان تقاضا	70	100	80	50	

$$Z = \begin{cases} (2 \times 50) + (1 \times 50) + (4 \times 50) + \\ (7 \times 70) + (12 \times 50) + (9 \times 30) \end{cases} \Rightarrow Z = 1710$$

برای بررسی بهینگی با استفاده از روش مضارب ، ابتدا بایستی U_i ها و V_j ها را برای خانه‌های متغیرهای پایه بدست آورد.

پس خواهیم داشت :

$$U_1 + V_B = 2 \quad \text{If } : U_1 = 0 \Rightarrow V_B = 2$$

$$U_1 + V_D = 1 \Rightarrow V_D = 1$$

$$U_2 + V_C = 4$$

$$U_3 + V_A = 7$$

$$U_3 + V_B = 12$$

$$U_3 + V_C = 9$$

$$\Rightarrow U_2 = 5$$

$$\Rightarrow V_A = -3$$

$$\Rightarrow U_3 = 10$$

$$\Rightarrow V_C = -1$$

با مقداردهی دلخواه به یک متغیر ، بقیه را بدست می‌آوریم. معمولاً این مقداردهی ، به عنصر اول صورت می‌گیرد.

سپس برای خانه‌های غیر پایه ، مقدار $Z_{ij} - C_{ij}$ را بدست می‌آوریم.

خواهیم داشت :

$$Z_{1A} - C_{1A} = U_1 + V_A - C_{1A} = 0 - 3 - 10 = -13$$

$$Z_{1C} - C_{1C} = U_1 + V_C - C_{1C} = 0 - 1 - 5 = -6$$

$$Z_{2A} - C_{2A} = U_2 + V_A - C_{2A} = 5 - 3 - 6 = -4$$

$$Z_{2B} - C_{2B} = U_2 + V_B - C_{2B} = 5 + 2 - 8 = -1$$

$$Z_{2D} - C_{2D} = U_2 + V_D - C_{2D} = 5 + 1 - 3 = 3$$

$$Z_{3D} - C_{3D} = U_3 + V_D - C_{3D} = 10 + 1 - 2 = 9$$

طبق شرط بهینگی ، بایستی تمامی جملات فوق ، صفر یا منفی می‌شدند و چون دو عنصر مثبت شدند ، پس $Z = 1710$ بهینه نیست. برای بدست آوردن جواب بهینه ، از اینجا به بعد ، مانند روش قبلی ، یعنی روش پله سنگ عمل می‌کنیم.

تعیین متغیر ورودی از دو عنصر مثبت : بزرگترین عنصر : X_{3D}

تعیین متغیر خروجی : ...

الی آخر ...

در این مثال ، تنها نقاط Z_{2D} ، Z_{3D} غیر پایه هستند (بقیه نقاط را صفر در نظر می‌گیریم) و لذا تنها برای همین دو خانه ، حلقه رسم خواهد شد. در این حلقه‌ها مهم نیست که شما در خانه‌هایی مثل $1A$ ، $1C$ ، $2A$ و یا $2B$ توقف داشته باشید.