

مقدمه :

تحقیق در عملیات دارای یک رویکرد علمی است که در صدد حل مسائل مدیریتی است و هدف آن کمک به مدیران جهت تصمیم گیری بهتر است و از مجموعه ای از متون در حوزه ی ریاضی یا علم مدیریت و یا سایر رشته ها اقتباس شده است و با عناوین مختلفی چون علم مدیریت ، روشهای مقداری با تحلیلی مقداری و یا علم تصمیم گیری یا به طور کلی (Opretin Reserch) OR بیان می گردد.

تعریف تحقیق در عملیات :

تحقیق در عملیات به مجموعه ای از روشهای علمی و متونی گفته می شود که جهت شناخت مسائل درون سیستم به کار می روند و در صدد جواب بهینه برای مسائل هستند یا به عبارت دیگر :

تحقیق در عملیات عبارتست از کاربرد روشهای علمی برای بررسی و مطالعه فعالیتهای پیچیده در سازمانهای بزرگ و یا به طور کلی کاربرد روش علمی برای تحلیل و حل مسائل مدیریتی است .

ویژگی های تحقیق در عملیات :

الف) تحقیق در عملیات بر تصمیم گیری مدیران تمرکز و توجه دارد. (تصمیم گیری)

1. چه کاری باید انجام شود. (what)
2. چه وقت بایستی انجام شود. (when)
3. چگونه بایستی انجام شود. (How)
4. کجا بایستی انجام شود . (where)
5. به وسیله چه کسی بایستی انجام شود. (by whom)

تصمیم گیری دارای یک فرآیند علمی است که عبارتست از :

1. تعریف مساله
2. شناخت راه حل های ممکن
3. ارزیابی راه حل های ممکن
4. انتخاب یک راه حل

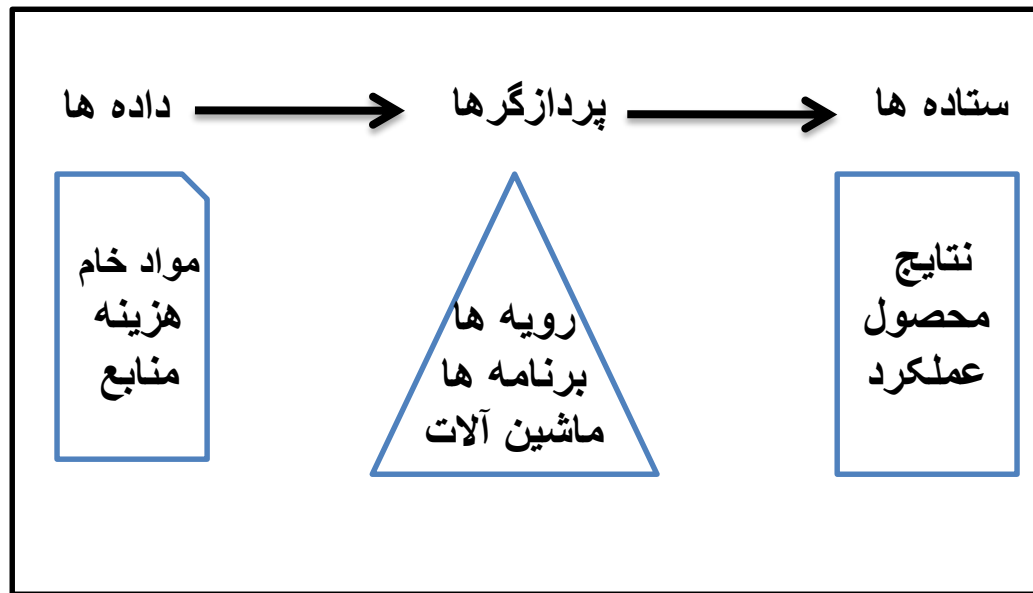
ب) رویکرد علمی :

1. تعریف مساله
2. مشاهده
3. تعریف فرضیه
4. آزمایش ، طراحی و اجرا
5. تایید یا رد فرضیه

ج) نگاه سیستمی

1. داده ها
2. پردازگر
3. ستاده ها

محیط



رقبا - دولت - اقتصاد - بازار - جامعه

د) رویکرد بین رشته ای

ه) استفاده از مدلها :

1. مدل شمایی

2. مدل قیاسی

3. مدل ریاضی

دلایل استفاده از مدل ریاضی :

1. استفاده از ریاضی باعث می شود بتوان موقعیتهای خیلی پیچیده را تعریف کرد.
2. مدل ریاضی باعث می شود که زمان واقعه عملیات را شبیه سازی کرد یعنی زمان آینده را به حال تبدیل کرد.
3. دستکاری مدل بسیار ساده تر از سیستم واقعی است.
4. هزینه خطا و آزمون در مدل ریاضی بسیار کمتر از مدل واقعی است .
5. با استفاده از مدل ریاضی می تون ریسک را محاسبه کرد.
6. مدل ریاضی زمینه آموزش و یادگیری را به راحتی فراهم می کند .

و) استفاده از رایانه

مدلسازی :

شرایط برنامه ریزی خطی :

1. مساله باید به گونه ای تعریف شود که با استفاده از برنامه ریزی قابل حل باشد.
2. مساله بایستی با روشهای ریاضی فرموله شود.
3. مساله بایستی با یکی از تکنیک های ریاضی قابل حل باشد.

برنامه ریزی خطی از این واقعیت گرفته شده است که روابط کارکردی در مدل ریاضی خطی هستند که اصطلاحاً به آن **یک برنامه** می گوئیم .

هر مدل برنامه ریزی خطی دارای ویژگی های زیر است :

1. تابع هدف
2. متغیر تصمیم
3. محدودیت های مدل

مراحل نوشتن یک مدل :

1. تابع هدف را تعیین می کنیم.
2. متغیرهای تصمیم را تعریف می کنیم.
3. محدودیت های مدل را فرموله می نماییم.

بنابراین مدل عمومی برنامه ریزی خطی به شرح زیر است :

$$\begin{array}{ll} \max(\min) \ z = \sum_{j=1}^n c_j X_j & \text{سطر } i \\ & \text{ستون } j \\ \text{S . To : } \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j \leq = \geq b_i & \\ x_j \geq 0 & \\ j = 1, 2, 3, \dots, n & \end{array}$$

$$\max(\min) \ z = C_1 X_1 + C_2 X_2 + \dots C_j X_j + \dots C_n X_n$$

S . To :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n \leq = \geq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2n}x_n \leq = \geq b_2$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n \leq = \geq b_i$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mj}x_j + \dots + a_{mn}x_n \leq = \geq b_m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n \geq 0$$

Z = تابع هدف

Max z → حداکثر کردن

Min z → حداقل کردن

$$X_j = x_1, \dots, x_n \geq 0$$

متغیرهای تصمیم

$$C_j = C_1 \dots C_n$$

ضریب x_j در تابع هدف

$$a_{ij} \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ضریب x_j (متغیر تصمیم) می باشد در محدودیتهایی که اصطلاحاً به آن ضرایب تکنولوژی گویند. یا ضرایب مورد استفاده از منابع برای تولید یک واحد کالا

S . To :

به شرط آنکه

$$b_i \begin{bmatrix} b_1 \\ b_j \\ b_m \end{bmatrix}$$

منابع یا اصطلاحاً اعداد سمت راست

$\leq$

برای توابعی است که به صورت حداکثر کردن باشد

$\geq$

برای توابعی است که به صورت حداقل کردن باشد

$$x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n \geq 0$$

شرط مساله



انواع مسائل برنامه ریزی خطی :

تولید

2. ترکیب محصولات کشاورزی

3. مسائل حمل و نقل

4. رژیم غذایی

5. بازاریابی

6. برش

7. سرمایه گذاری

8. زمان بندی

9. امتزاج (ترکیب کردن چند نوع مواد برای تولید یک کالا)

مفروضات مدل برنامه ریزی خطی :

(۱) فرض تناسب :

$$a_{11} x_1 = ?$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$10 * 100 = 1000$$

اگر $x_1 \%20 = 100 * \%20 + 100 = 120$

$$10 * 120 = 1200$$

$$1000 * \%20 + 1000 = 1200$$

(۲) فرض جمع پذیری :

$$2x_1 + x_2 - x_3 < 100 \quad \text{صحیح}$$

$$\frac{2x_1}{x^2} + x_2 * x_3 \leq 100 \quad \text{غلط}$$

۲ (فرض بخش پذیری :

$$\frac{10}{5} = 5$$

$$\frac{10}{3} = 3 / 3$$

صحيح

غير صحيح

۴ (فرض معين بودن :

$$a_{1j}, b_1, c_j$$

روش های حل :

۱. روش ترسیمی :

این روش برای مدل‌هایی به کار می رود که حداکثر ۳ متغیر دارند.

۲. روش سیمپلکس (simplex) :

برای مدل‌هایی که بیش از دو متغیر دارند .

مراحل حل روش ترسیمی :

1. نامعادلات را به معادله تبدیل می کنیم .
2. مقادیر x_1 و x_2 را بدست آورده و در یک نمودار رسم می کنیم .
3. تعیین فضای جواب
4. تعیین منطقه مشترک
5. بدست آوردن جواب بهینه

مراحل حل :

۱. نامعادلات را به معادله تبدیل می کنیم .

۲. مقادیر را بدست آورده و در یک نمودار رسم می کنیم .

۳. تعیین فضای جواب

۴. تعیین منطقه مشترک

۵. بدست آوردن جواب بهینه

تعیین فضای جواب :

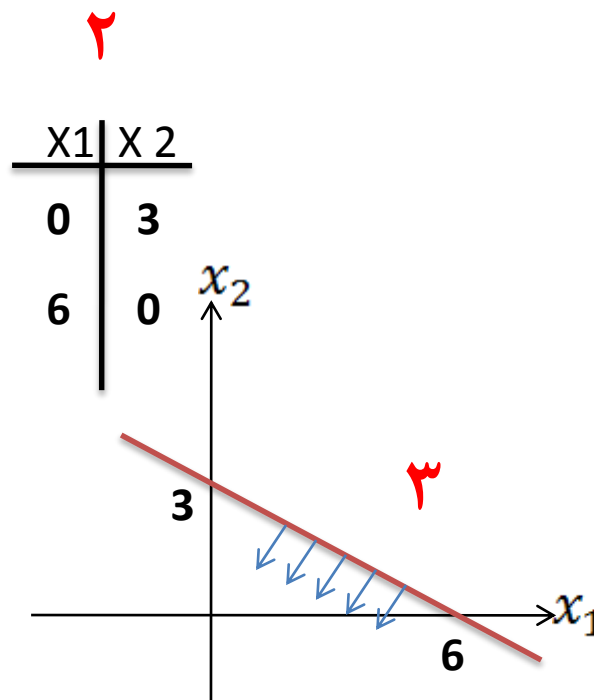
برای تعیین فضای جواب بایستی یک نقطه را در معادله امتحان کنیم اگر این نقطه در معادله صدق کند از آن نقطه تا مبدا مختصات فضای جواب است و اگر آن نقطه در معادله صدق نکند از آن نقطه به طرف مخالف مبدا مختصات فضای جواب است .

$$2x_1 + 4x_2 \leq 12$$

۱ $2x_1 + 4x_2 = 12$

۰ $\begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases} \quad 2 * 0 + 4 * 0 \leq 12$

$0 \leq 12$ صحیح



پس نتیجه می گیریم محدودیت های که به صورت کوچکتر مساوی هستند فضای جواب به طرف مبدا مختصات هستند .

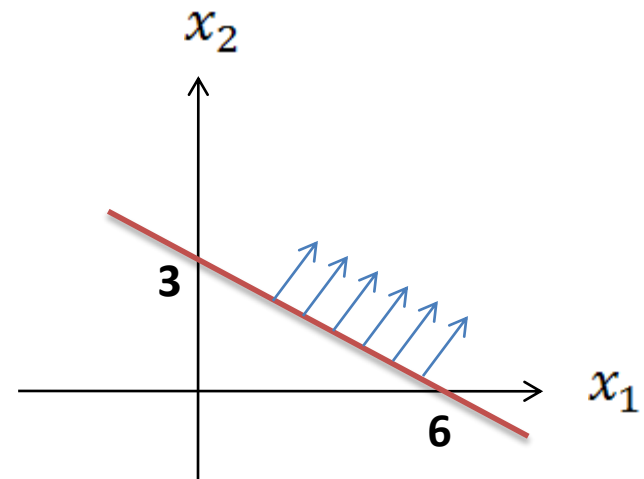
$$2x_1 + 4x_2 \geq 12$$

$$o \begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases}$$

$$2 * 0 + 4 * 0 \geq 12$$

$$0 \geq 12 \quad \text{غلط}$$

x_1	x_2
0	3
6	0



پس نتیجه می گیریم که محدودیتهایی که بزرگتر مساوی هستند فضای جواب مخالف مبدا مختصات است .



جواب به طرف مبدا مختصات

جواب به طرف مخالف مبدا مختصات

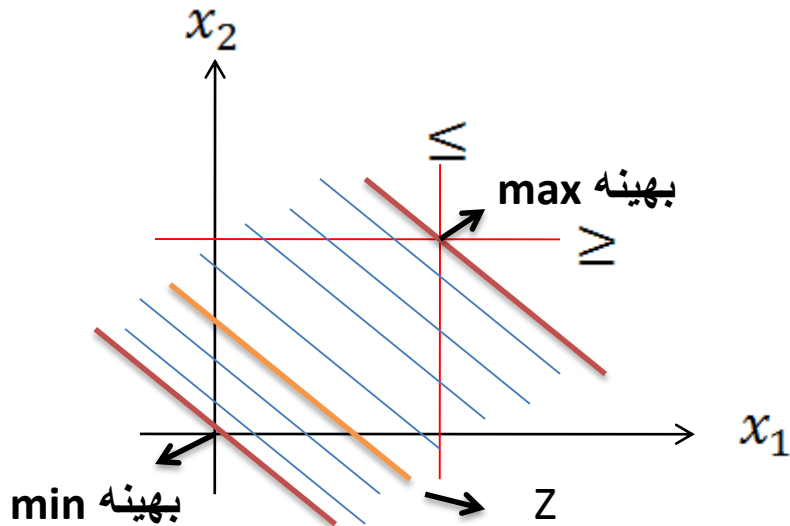
۴. تعیین منطقه مشترک :

1. به صورت سطح باشد
2. به صورت طول یک پاره خط
3. به صورت یک منطقه

۵. بدست آوردن جواب بهینه :

الف (روش آزمون و خطا

نکته : در مسائل (MAX) نقطه بهینه آخرین نقطه ای است که شیب خط تابع هدف از طریق آن از منطقه موجه خارج می شود و در مسائل (MIN) اولین نقطه ای که شیب خط تابع هدف از طریق آن وارد منطقه جواب می گردد .



ب (بررسی نقاط گوشه

نکته : نقطه بهینه ، نقطه ای است که به ازای تابع هدف مطلوب ترین مقدار را دارد یعنی در مسائل (MAX) بیشترین مقدار و در مسائل (MIN) کمترین مقدار می باشد .

مثال : جواب بهینه را با روش ترسیمی بدست آورید .

$$\max z = 4x_1 + 6x_2$$

$$1) 2x_1 + 3x_2 \geq 12 \Rightarrow 2x_1 + 3x_2 = 12$$

x_1	x_2
0	4
6	0

$$2) -2x_1 - x_2 \leq 4 \Rightarrow -2x_1 - x_2 = 4$$

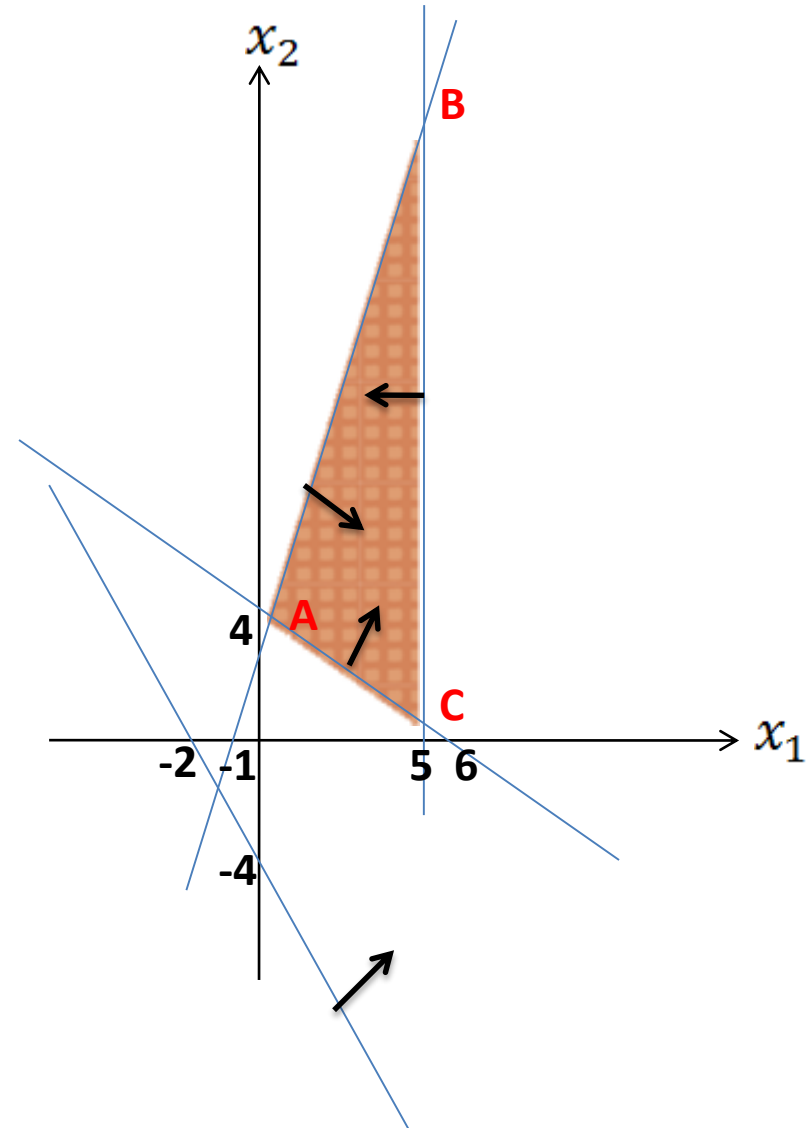
x_1	x_2
0	4
-2	0

$$3) -3x_1 + x_2 \leq 3 \Rightarrow -3x_1 + x_2 = 3$$

x_1	x_2
0	3
-1	0

$$4) x_1 \leq 5$$

$$\text{شرط } x_1, x_2 \geq 0$$



روش آزمون و خطا :

$$z = 4x_1 + 6x_2$$

مثلا اگر $z = 24$

$$24 = 4x_1 + 6x_2$$

x1	x2
0	4
6	0

$$z = 48$$

$$48 = 4x_1 + 6x_2$$

x1	x2
0	8
12	0

$$z = 72$$

$$72 = 4x_1 + 6x_2$$

x1	x2
0	12
18	0

همانگونه که ملاحظه می گردد شیب خط تابع هدف از نقطه B خارج می گردد
مختصات این نقطه را که از محل تلاقی معادله ۳ و ۴ است بدست می آوریم .

معادله ۳ و ۴ $B \begin{cases} -3x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 = 5 \end{cases}$

$$-3 * 5 + x_2 = 3$$

$$-15 + x_2 = 3$$

$$x_2 = 18$$

$$x_1 = 5$$

نکته: مختصات نقطه B را در تابع هدف قرار می دهیم تا میزان تابع هدف بدست
آید و این بدین معنی است که بایستی از x_1 ۵ واحد و از x_2 ۱۸ واحد کالا تولید
شود تا ۱۲۸ واحد سود دهد .

$$z = 4x_1 + 6 * 2$$

$$z = 4(5) + 6(18)$$

$$z = 128$$

روش بررسی نقاط گوشه:

نقاط	x_1	x_2	$z = 4x_1 + 6x_2$
(1,3) A	0/27	3/81	$4(0/27) + 6(3/81) = 23/94$
(4,3) B	5	18	$4(5) + 6(18) = 128$
(1,4) C	5	$\frac{2}{3}$	$4(5) + 6(0/66) = 24$

نقاط بهینه

$$A \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 12 \\ -3x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$$

$$2x_1 + 3x_2 = 12$$

$$9x_1 + -3x_2 = -9$$

$$x_1 = 0/27$$

$$x_2 = 3/81$$

$$B \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 18 \end{cases}$$

$$C \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 12 \\ x_1 = 5 \end{cases}$$

$$x_2 = \frac{2}{3}$$

نکته: چون تابع هدف max است
بیشترین مقدار یعنی B را انتخاب
می کنیم.

1. جواب
2. جواب موجه
3. جواب غیر موجه
4. جواب بی‌هینه
5. جواب غیر بهینه
6. جواب گوشه
7. جواب گوشه موجه
8. جواب گوشه غیر موجه
9. معادلات مرزی
10. نقاط حدی

مراحل :

1. تابع هدف حداکثر می باشد. (MAX Z)
2. متغیر های تصمیم بزرگتر از صفر باشد .
3. محدودیتها کوچکتر از صفر باشد

مدل برنامه ریزی خطی به شرح زیر است :

$$Max Z = \sum c_j x_j$$

$$S.to : \sum a_{ij} x_j \leq b_i$$

$$x_j \geq 0$$

نکته : برای اینکه بتوانیم ضرایب متغیر ها را در اولین جدول بنویسیم باید نامعادلات را به معادله تبدیل کنیم و ضرایب تابع را به سمت چپ منتقل می کنیم :

$$\text{Max } z - \sum c_j x_j = 0$$

$$\sum a_{ij} x_j + \sum s_i = b_i$$

$$x_j, s_i \geq 0$$

x_j متغیر تصمیم

s_i متغیر کمکی

اولین جدول simplex:

متغیر پایه	x_1	x_2	x_j	x_n	s_1	s_2	s_i	s_m	b
s_1	a_{11}	a_{12}	a_{1j}	a_{1n}	1	0	0	0	b_1
s_2	a_{21}	a_{22}	a_{2j}	a_{2n}	0	1	0	0	b_2
s_i	a_{i1}	a_{i2}	a_{ij}	a_{in}	0	0	1	0	b_i
s_m	a_{m1}	a_{m2}	a_{mj}	a_{mn}	0	0	0	1	b_m
z	$-C_1$	$-C_2$	$-C_j$	$-C_n$	0	0	0	0	0

مراحل حل :

1. نامعادلات را به معادله تبدیل می کنیم با اضافه کردن متغیر کمکی s
 2. ضرایب تابع هدف را به سمت چپ منتقل می کنیم .
 3. اولین جدول را تشکیل می دهیم که در آن متغیرهای کمکی s در پایه قرار می گیرد ، ضرایب متغیرها را در آن می نویسیم .
 4. **تعیین متغیر ورودی :** منفی ترین عدد در سطح تابع هدف را به عنوان متغیر ورودی انتخاب می کنیم ، آنرا ستون ورودی یا ستون لولا می نامیم.
 5. **تعیین متغیر خروجی :** اعداد منابع را بر ضریب مثبت ستون ورودی تقسیم نموده و کوچکترین عدد را به عنوان خروجی انتخاب می کنیم و آن را سطر لولا یا سطر خروجی می نامیم
 6. **تعیین عدد لولا :** محل تقاطع ستون لولا و سطر لولا را عدد لولا می گوئیم . این عدد نقش اساسی در محاسبات جدول دارد و همواره بایستی یک مثبت $(+1)$ باشد .
 7. دومین جدول را تشکیل می دهیم که در آن نتغیر ورودی بجای خروجی قرار می گیرد و سطر لولای جدید را بدست می آوریم که عبارت است از سطر لولای قدیم تقسیم بر عدد لولا
 8. سایر سطرها را بر اساس رابطه زیر می نویسیم :
(ضرایب ستون لولا در جدول جدید $\times$ ضرایب ستون لولا در جدول قدیم) - سطر قدیم = سطر جدید
 9. **آیا شرط بهینگی برقرار است :** شرط بهینگی یعنی غیر منفی بودن اعداد سطر تابع هدف
- اگر این شرط برقرار نباشد به مرحله ۴ می رویم و مساله را آنقدر تکرار می کنیم تا شرط بهینگی برقرار شود .

حالت‌های غیر استاندارد :

اگر حداقل یکی از شرایط استاندارد برقرار نباشد مساله غیر استاندارد است که به صورت زیر است :

1. تابع هدف $\min z$ (حداقل کردن)
2. متغیرهای تصمیم بتوانند مقادیر منفی اختیار کنند $x_j < 0$
3. محدودیتها به صورت بزرگتر و مساوی یا مساوی باشند .

۱ - اگر تابع هدف $\min z$ باشد :

روش اول : چون می‌دانیم حداقل هزینه با حداکثر درآمد برابر است پس فرض می‌کنیم $\min z$ برابر با $\max z$ است و مساله را حل می‌کنیم .

$$\text{Min } z = - \max z$$

روش دوم : اعداد سطر تابع هدف را در عدد منفی ضرب می‌کنیم و مساله را طبق روش گفته شده حل می‌کنیم .

۲ - اگر متغیر تصمیم یا یکی از آنها بتواند مقادیر منفی اختیار کند به چنین متغیری . متغیر آزاد در علامت می گویم :

روش اول : حذف متغیر آزاد در علامت و حذف محدودیت
روش دوم : روش تغییر متغیر : مراحل آن عبارت است از :

(1) یک رابطه تغییر در متغیر به صورت زیر تعریف می کنیم :
$$X_j = X'_j - X''_j$$

(2) به جای متغیر آزاد در علامت رابطه ی تغییر متغیر را قرار می دهیم .

(3) مساله را به روش قبلی حل می نماییم .

(4) مقادیر بدست آمده را در رابطه تغییر متغیر قرار می دهیم تا مقدار متغیر آزاد در علامت بدست آید.

۳ - اگر محدودیتها یا یکی از آنها به صورت بزرگتر و مساوی یا مساوی باشد :

با استفاده از تکنیک متغیرهای مصنوعی چنین مدلهایی را حل می کنیم که ۲ روش دارد .

روش اول : به روش M بزرگ

روش دوم : روش دوفاز

متغیر مصنوعی :

متغیری است که به طور مصنوعی فضای جواب را افزایش می دهد تا بتواند یک نقطه ی بهینه در منطق جواب بیابد .

$$2x_1 + 4x_2 \leq 10 \rightarrow 2x_1 + 4x_2 + s_1 = 10$$

$$2x_1 + 4x_2 \geq 10 \rightarrow 2x_1 + 4x_2 - s_1 = 10 \rightarrow$$

$$2x_1 + 4x_2 - s + R_1 = 10$$

نکته : همانگونه که مشاهده می گردد چون متغیر کمکی دارای ضریب منفی است به عنوان متغیر پایه نمی تواند به کار رود پس متغیر مصنوعی R جایگزین آن می گردد.

روش M بزرگ :

نکته : M عدد بسیار بزرگی است که فقط جنبه محاسباتی دارد مراحل آن به شرح زیر است :

(۱) نامعادلات را به معادله تبدیل می کنیم با اضافه کردن متغیرهای کمکی S_i, R_i

جایهائی که علامت $\geq$ باشد S_i اضافه می شود و جایهائی که علامت $\leq$ باشد R_i اضافه می شود و S_i کم می شود و جایهائی که علامت $=$ باشد R_i اضافه می شود .

(۲) ضرایب متغیرهای مصنوعی را در تابع هدف با ضریب $-M$ نشان می دهیم .
در مسایل min متغیر مصنوعی R را با ضریب $+M$ نشان می دهیم :

$$\min z = \sum c_j \cdot j + MR_i$$

$$\max z = \sum c_j \cdot j - MR_i$$

(۳) ضرایب تابع هدف را به سمت چپ منتقل می کنیم :

$$\max z - \sum c_j \cdot j + MR_i = 0$$

(4) اولین جدول را تشکیل می دهیم که در آن متغیرهای کمکی مثبت (+Si) و متغیرهای مصنوعی (R) به عنوان متغیرهای پایه به کار می رود .

(5) آیا شرط یکه بودن برقرار است اگر برقرار نیست آنرا برقرار می کنیم .

$$Z = Z - MR_i$$

(6) اگر شرط بهینه گی برقرار نیست مساله را به روش گفته شده قبلی حل می کنیم.

مثال :

$$\max z = 2x_1 + x_2 - MR_2 - MR_3$$

$$\max z = 2x_1 + x_2 \quad x_1 + x_2 + s_1 = 10$$

$$x_1 + x_2 \leq 10$$

$$2x_1 + x_2 \geq 30$$

$$x_1 + x_2 = 40$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\rightarrow 2x_1 + x_2 - s_2 + R_2 = 30$$

$$x_1 + x_2 + R_3 = 40$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2, R_2, R_3 \geq 0$$

$$\max z - 2x_1 - x_2 + MR_2 + MR_3 = 0$$

	x1	x2	s1	s2	R2	R3	b
S1	1	1	1	0	0	0	10
R2	2	1	0	-1	1	0	30
R3	1	1	0	0	0	1	40
Z	-2	-1	0	0	M	M	0
Z	-2-3m	-1-2m	0	m	0	0	-70m
X1	1	1	1	0	0	0	10
R2	0	-1	-2	-1	1	0	10
R3	0	0	-1	0	0	1	30
Z	0	1+m	2+3m	m	0	0	20-40m

روش دو فاز - دو مرحله ای :

در این روش ۲ تابع هدف داریم (۱) تابع هدف مصنوعی (۲) تابع هدف اصلی و ۲ مرحله داریم که

مرحله اول : بدست آوردن جواب موجه ابتدایی با تابع هدف مصنوعی و محدودیتهای مساله
مرحله دوم : بدست آوردن جواب بهینه با استفاده از تابع اصلی مساله و محدودیتهای پایانی

$$\max(\min)z = \sum c_j \cdot j$$

می باشد .
مرحله اول :

علت استفاده از این روش : چون M از ثبات کمتری برخوردار است از روش ۲ فاز استفاده می کنیم یعنی در این روش میزان R ها (متغیر مصنوعی) را حداقل می کنیم .

مراحل آن :

1) نامعادلات را به معادله تبدیل می کنیم با اضافه کردن متغیرهای کمکی و مصنوعی

$$+R = \quad -S+R \geq \quad +S \leq$$

۲) تابع هدف مصنوعی را تشکیل می دهیم

$$\min R_0 = R_i$$

۳) تابع هدف مصنوعی و تابع اصلی مساله را به سمت چپ منتقل می کنیم .

$$\max(-R_0) + R_i = 0 \quad \max z - \sum c_j \cdot j = 0$$

۴) اولین جدول سیمپلکس را تشکیل می دهیم در آن متغیرهای کمکی مثبت و متغیرهای مصنوعی به عنوان متغیرهای پایه و تابع هدف مصنوعی به عنوان تابع هدف به کار می رود .

(۵) سطر تابع هدف را یکه می کنیم .
 $R_0 = R_0 - R_i$

(۶) حل مساله به روش گفته شده قبلی و بدست آوردن جواب موجه ابتدایی

تذکر: هرگاه R متغیر مصنوعی به عنوان **متغیر خروجی** انتخاب شود موقعیت خود را از دست می دهد .

(پایان مرحله اول)

(۷) شروع مرحله دوم و اضافه کردن تابع اصلی مساله

(۸) سطر تابع هدف را نسبت به متغیرهای اساس یکه می کنیم .

(۹) آیا شرط بهینگی برقرار است ؟ اگر این شرط برقرار نباشد مساله را به روش گفته شده قبلی حل می کنیم .

مثال: مساله را به روش ۲ مرحله ای حل کنید .

$$\max z = 2x_1 - 3x_2$$

$$x_1 + 4x_2 \leq 200$$

$$2x_1 + x_2 \geq 80$$

$$x_1 + x_2 = 30$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



$$\max z = 2x_1 - 3x_2$$

$$\min R_0 = R_2 + R_3$$

$$x_1 + 4x_2 + s_1 = 200$$

$$2x_1 + x_2 - s_2 + R_2 = 80$$

$$x_1 + x_2 + R_3 = 30$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2, R_2, R_3 \geq 0$$

$$\max(-R_0) = -R_2 - R_3$$

$$\max(-R_0) + R_2 + R_3 = 0$$

$$\max z - 2x_1 + 3x_2 = 0$$

	x1	x2	s1	s2	R2	R3	B
S1	1	4	1	0	0	0	200
R2	2	1	0	-1	1	0	80
R3	1	1	0	0	0	1	30
-R0	0	0	0	0	1	1	0
-R0	-3	-2	0	1	0	0	-110
S1	0	3	1	0	0	-	170
R2	0	-1	0	0	1	-	
X1	1	1	0	0	0	-	30
-R0	0	1	0	1	0	-	-20
Z	-2	3	0	0	0	-	0
Z	0	5	0	0	0	-	60

حالت‌های خاص در مدل برنامه ریزی خطی :

(1) **جواب بهینه چندگانه :** با ترکیب‌های مختلف یک جواب داریم مثل

$$2 \times 20 = 40$$

$$5 \times 8 = 40$$

$$10 \times 4 = 40$$

ویژگی در روش ترسیمی :

هرگاه طول یک پاره خط نقطه‌ی بهینه باشد چون طول پاره بی نهایت نقطه تشکیل شده است پس جواب بهینه چندگانه است. به طور کلی هرگاه بیش از یک نقطه بهینه داشته باشیم جواب بهینه چندگانه است.

نکته : هرگاه شیب خط تابع هدف ۲ یا چند برابر یکی از محدودیتها باشد جواب بهینه چندگانه است.

مثال :

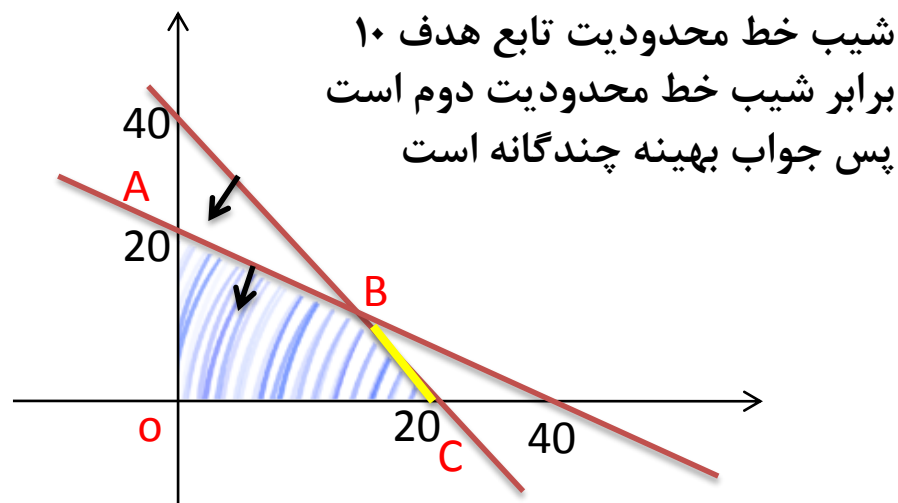
$$\max z = 40x_1 + 30x_2$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 40$$

$$4x_1 + 3x_2 \leq 120$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

x_1	x_2	x_1	x_2
0	20	0	40
40	0	30	0



	X1	X2	S1	S2	B
X1	1	2	2	0	7
S2	0	5	4	1	4
Z	0	0	6	0	300

ویژگی در جدول سیمپلکس :

در جدول سیمپلکس هرگاه تعداد صفرهای سطر تابع هدف بزرگتر از تعداد متغیرهای اساس باشد یا یکی از متغیرهای غیر اساس در سطر تابع هدف صفر باشد مساله دارای ناحیه جواب بهینه چندگانه است .

۲) مواردی که فاقد ناحیه جواب است .

ویژگی در روش ترسیمی : اگر هیچگونه نقطه مشترکی بین محدودیتها نباشد ، مساله فاقد ناحیه جواب است .

ویژگی در جدول سیمپلکس : هرگاه R جزء متغیرهای پایه باشد (در جدول بهینه) فاقد ناحیه جواب است .

۳) تبهگن :

ویژگی در روش ترسیمی : هرگاه نقطه بهینه از محل تلاقی بیش از ۲ معادله تشکیل شده باشد میگوییم مساله دارای ناحیه جواب تبهگن است .

ویژگی در جدول سیمپلکس : هرگاه امکان انتخاب بیش از یک متغیر خروجی را داشته باشیم می گوییم مساله تبهگن است .

تفسیر اقتصادی جداول سیمپلکس :

$$+ \begin{cases} \text{سود} \rightarrow \text{افزایش متغیر ورودی} \rightarrow \text{کاهش} \rightarrow \text{اساسی } s_1 \rightarrow \text{سطری} \\ \text{زیان} \rightarrow \text{افزایش متغیر ورودی} \rightarrow \text{کاهش} \rightarrow \text{اساسی } x_j \rightarrow \text{سطری} \end{cases}$$

$$- \begin{cases} \text{زیان} \rightarrow \text{افزایش متغیر ورودی} \rightarrow \text{کاهش} \rightarrow \text{اساسی } s_1 \rightarrow \text{سطری} \\ \text{سود} \rightarrow \text{افزایش متغیر ورودی} \rightarrow \text{کاهش} \rightarrow \text{اساسی } x_j \rightarrow \text{سطری} \end{cases}$$

(1) متغیرهای تصمیم غیر اساسی را تفسیر نمایید.

	X1	X2	X3	S1	S2	B
S1	1	2	2	1	0	8
S2	3	4	1	0	1	7
Z	-5	-2	-3	0	0	0
S1	0	2/3	5/3	1	-1/3	17/3
X1	1	4/3	1/3	0	1/3	7/3
Z	0	14/3	-4/3	0	5/3	25/3
X3	0	2/5	1	3/5	-1/5	17/5
X1	1	6/5	0	-1/5	2/5	6/5
Z	0	26/5	0	4/5	7/5	81/5

$$x_1 \text{ تولید} \begin{cases} s_1 \text{ یک واحد از} \rightarrow \\ s_3 \text{ سه واحد از} \rightarrow \end{cases} x_1 \begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases} \text{ هزینه} \rightarrow x_1 \begin{cases} 5 \\ 0 \end{cases} \text{ درآمد} \rightarrow x_1 \{ 5 - 0 = 5 \} \text{ سود}$$

اعداد زیر ستون x_2 : تولید x_2 ، ۴ واحد از s_2 و ۴ واحد از s_1 هزینه x_2 برابر ۰ و درآمد x_2 برابر ۲ و سود x_2 برابر ۲ است.

$$x_2 \text{ تولید} \begin{cases} 2 \text{ واحد از } s_1 \rightarrow \\ 4 \text{ واحد از } s_2 \rightarrow \end{cases} \quad x_2 \text{ هزینه} \begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases} \rightarrow x_2 \text{ درآمد} \begin{cases} 2 \\ 2 \end{cases} \rightarrow x_2 \text{ سود} \begin{cases} 2 - 0 = 2 \end{cases}$$

اعداد زیر ستون x_3 :

$$x_3 \text{ تولید} \begin{cases} 2 \text{ واحد از } s_1 \rightarrow \\ 1 \text{ واحد از } s_2 \rightarrow \end{cases} \quad x_3 \text{ هزینه} \begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases} \rightarrow x_3 \text{ درآمد} \begin{cases} 3 \\ 3 \end{cases} \rightarrow x_3 \text{ سود} \begin{cases} 3 - 0 = 3 \end{cases}$$

نکته: چون x_1 سود بیشتری دارد تولید می شود و s_2 باید خارج شود.

۲) اعداد زیر ستون x_1 در جدول دوم را تفسیر نموده و نتیجه را به متغیرهای مشابه تعمیم دهید

هزینه کاهش x_1 + هزینه منبع مستقیم = هزینه تولید x_1

$$X_1 = 0 + 1 \cdot (5) = 5$$

$$X_1 \text{ سود} = 5 - 5 = 0 \rightarrow \text{درآمد} = 5$$

۳) اعداد زیر ستون s_2 در جدول دوم را تفسیر نموده و نتیجه را به متغیرهای مشابه تعمیم دهید

هزینه کاهش x_1 + هزینه منبع مستقیم = هزینه تولید s_2

$$s = 0 + 1/3 (5) = 5/3$$

$$s_2 \text{ درآمد} = 0 - 5/3 = -5/3 \rightarrow x_1 \text{ سود} = 5/2$$

۴) سهم مشارکت در سود :

به اعداد زیر ستون متغیرهای شروع مساله در سطر تابع هدف جدول غیر بهینه سهم مشارکت در سود می گویند .

در این جدول $5/3$ و 0 می باشد .

۵) قیمت های سایه ای یا ثانویه را تعیین کنید .

به اعداد زیر ستون متغیرهای شروع مساله در سطر تابع هدف جدول بهینه قیمت های سایه ای گفته می شود .

در این جدول $7/5$ و $4/5$ است .

نکته : همیشه به تعداد محدودیت ها قیمت های سایه ای وجود دارد .

۶) چه موقع قیمت‌های سایه ای صفر و چه موقع عددی غیر صفر است ؟

هرگاه موجودی یک منبع به صفر نرسیده باشد ، قیمت سایه ای آن صفر است در جدول دوم s_1 برابر $17/3$ و ارزش سایه آن صفر است .

و هرگاه موجودی یک منبع به صفر رسیده باشد ارزش سایه ای آن عددی غیر صفر است مانند s_2 در جدول دوم که موجودی آن صفر و ارزش سایه $5/3$ است .

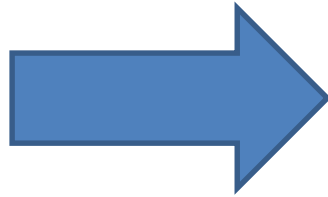
تذکر : در قیمت‌های سایه ای هرگاه مساله غیر استاندارد باشد و به روش M بزرگ حل شده باشد اگر زیر ستون متغیرهای شروع مساله در سطر تابه هدف جدول نهایی که ترکیبی از متغیرهای مصنوعی R و کمکی s می باشد اگر M وجود داشته باشد آنرا حذف می کنیم .

مساله ثانويه (دوگان مساله اوليه) :

عبارت است از یک مدل برنامه ریزی خطی جهت یافتن ارزشهایی که ملاک ارزیابی منابع قرار می گیرد. ارزش واقعی منابع بایستی به عنوان تعیین شود که نسبت داده شده به هزینه ی استفاده از این منابع حداقل گردد. به عبارت دیگر برنامه ثانویه یکی مساله وسیله ای است جهت ارزش یابی منابع مورد استفاده برای تولید یا مصرف در مقابل راه حل های دیگر مثل فرش آنها. بنابراین هر مساله اولیه دارای یک مساله ثانویه است که به صورت زیر تعریف می شود :

مساله اوليه

$$\begin{aligned}\max z &= \sum c_j \cdot j \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot j &\leq b_i \\ x_j &\geq 0\end{aligned}$$



مساله ثانويه

$$\begin{aligned}\min y_0 &= \sum_{i=1}^m b_i \cdot y_i \\ \sum_{i=1}^m a_{ji} &\geq c_j \\ y_i &\geq 0\end{aligned}$$

هر مدل اولیه ممکن است به سه صورت زیر باشد .

1. محدودیتهای به صورت $\geq$ یا $\leq$ باشد .
2. محدودیتهای یا یکی از آنها به صورت $=$ باشد .
3. متغیرها یا یکی از آنها آزاد در علامت باشد .

۱- اگر محدودیتهای به صورت $\geq$ یا $\leq$ باشد :

مراحل حل :

- ۱- مساله را به فرم استاندارد تبدیل می کنیم : یعنی اگر تابع هدف $\max$ است محدودیتهای بایستی $\leq$ باشد و اگر تابع هدف $\min$ است محدودیتهای به صورت $\geq$ تبدیل می کنیم .
- ۲- $\max Z$ را به $\min y_0$ تبدیل می کنیم و :

$$\max z \Rightarrow \min y_0$$

$$\min z \Rightarrow \max y_0$$

- ۳- متغیر x را به متغیر y تبدیل می کنیم و برعکس .
- ۴- محدودیتهای کوچکتر مساوی $\leq$ به محدودیتهای بزرگتر مساوی $\geq$ تبدیل می گردد و برعکس .
- ۵- اعداد منابع به جای ضرایب تابع هدف قرار می گیرند و برعکس .
- ۶- اعداد تابع هدف به جای اعداد سمت راست قرار می گیرد و برعکس .
- ۷- جای سطر و ستون عوض می شود .

۲) اگر محدودیتها یا یکی از آنها به صورت مساوی باشد :

مراحل حل :

تبدیل

مساله ثانویه	مساله اولیه
$\text{Max } y_0 \rightarrow \leq$	$\text{Max } z \rightarrow \leq$
$\text{Min } y_0 \rightarrow \geq$	$\text{Min } z \rightarrow \geq$
$\text{Min } y_0$	$\text{Max } z$
متغیر y	متغیر x
محدودیت $\geq$	محدودیت $\leq$
c_j	b_j
b_i	c_j
a_{ji}	a_{ij}
تعداد محدودیت	تعداد متغیر
تعداد متغیر	تعداد محدودیت
متغیر آزاد در علامت	محدودیت مساوی
محدودیت مساوی	متغیر آزاد در علامت

1. محدودیت مساوی را در مسال max به صورت $\leq$ بنویسید و در مسال min آنها را به صورت $\geq$ بنویسید .
2. مساله را فرم استاندارد تبدیل کنید .
3. برای محدودیتها متغیر تعریف کنید ، و محدودیتهایی که ۲ به ۲ قرینه اند به صورت y'_i و y''_i تعریف کنید .
4. عملیات تبدیل را انجام دهید .
5. با استفاده از رابطه زیر به جای $y_i = y'_i - y''_i$ فرار دهید . و آنها را آزاد در علامت بنامید .

۳) اگر متغیرها یا یکی از آنها آزاد در علامت باشد :
مراحل حل :

1. در رابطه زیر متغیر آزاد در علامت را جایگذاری کنید .

$$x_j = x'_j - x''_j$$

↓ ↓
آزاد در علامت ≥ 0

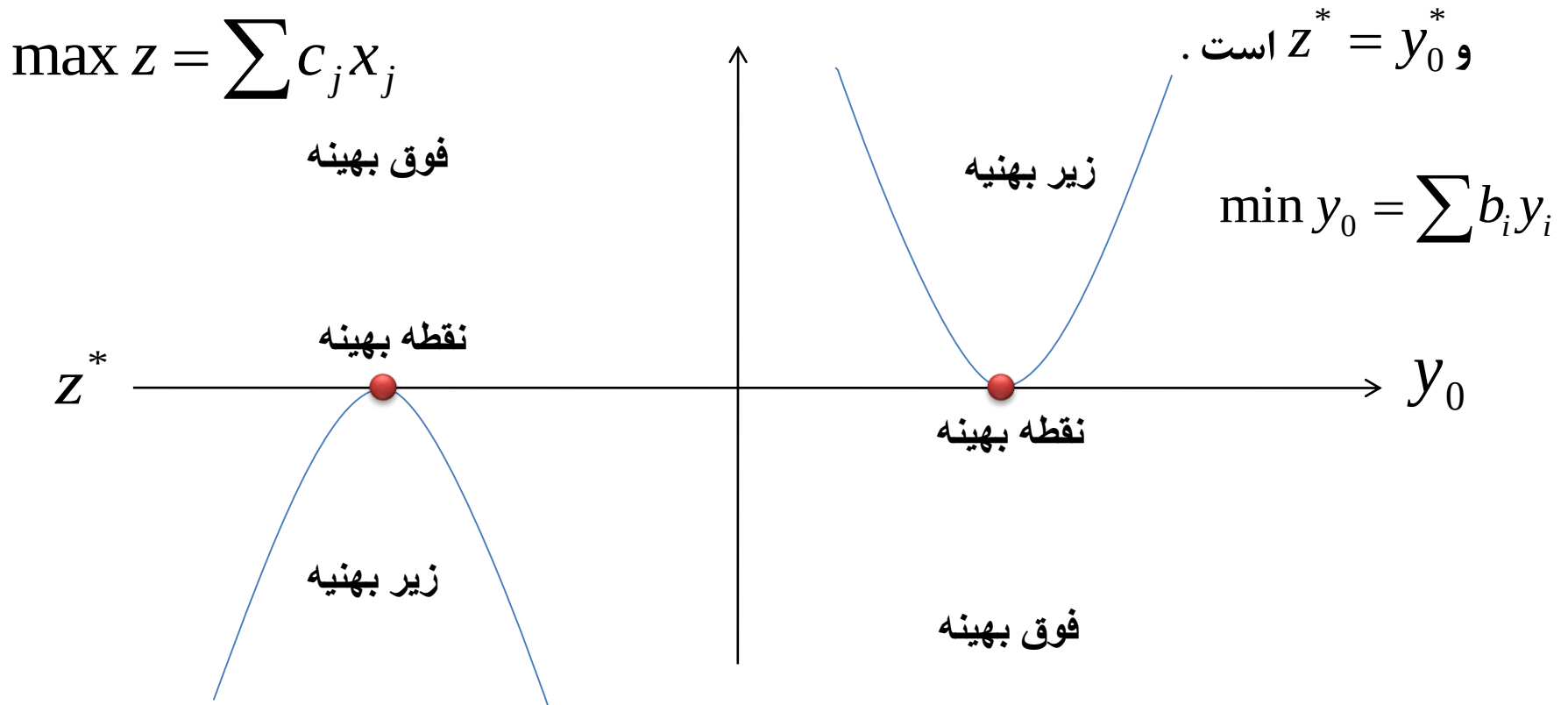
2. مساله را به فرم استاندارد تبدیل کنید .

3. عملیات تبدیل را انجام دهید .

4. محدودیتهای که دو به دو قرینه اند یکی از آنها را به صورت مساوی بنویسید .

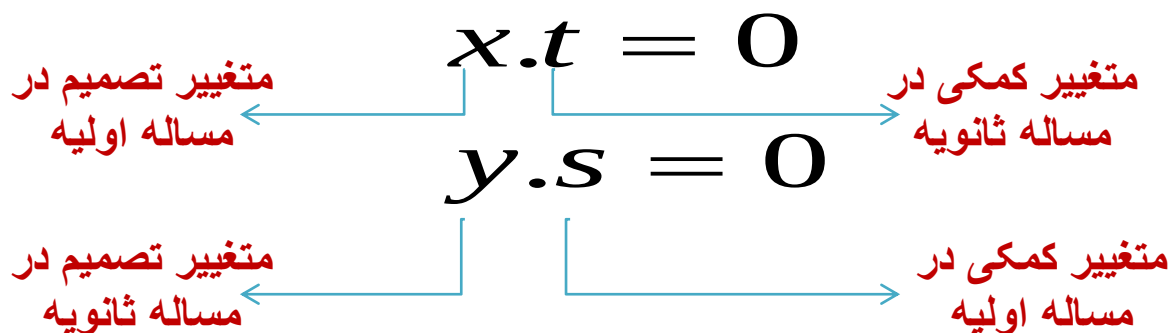
قضایای مساله ثانویه :

- ۱- ثانویه ، مساله ثانویه ، مساله اولیه است .
- ۲- اگر $x_1, x_2, \dots, x_n$ جواب مساله اولیه باشد $y_1, y_2, \dots, y_m$ جواب مساله ثانویه خواهد بود $(z^* \leq y_0)$ است)
- ۳- اگر $X_1, X_2, \dots, X_n$ جواب بهینه مساله اولیه باشد در آن صورت جواب بهینه مساله ثانویه به شکل زیر خواهد بود :
 $y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*$



۴- هر جواب اساسی در مساله اوليه دارای یک جواب اساسی مکمل در مساله ثانويه خواهد بود. يعنی بين متغير های آن یک رابطه لنگی (کمبود) مکمل وجود دارد. بنابراین اگر مساله اوليه دارای m محدودیت و n متغير باشد مساله ثانويه n محدودیت و m متغير خواهد بود و روابط زیر همیشه برقرار است.

	مساله اوليه	مساله ثانويه
محدوديتها	m	n
متغير	n	m



ارتباط بین ناحیه جواب مساله اولیه و مساله ثانویه :

- ۱- اگر مساله اولیه دارای ناحیه جواب محدود باشد مساله ثانویه دارای ناحیه جواب بی کران با گوشه بهینه است .
- ۲- اگر مساله اولی دارای ناحیه بی کران بدون گوشه بهینه باشد مساله ثانویه فاقد ناحیه جواب است .
- ۳- اگر مساله اولیه فاقد ناحیه جواب باشد ، مساله ثانویه به دو صورت زیر است :

الف) فاقد ناحیه جواب

ب) ناحیه جواب بی کران بدون گوشه بهینه است .

بدست آوردن جواب بهینه یک مساله از جواب بهینه مساله دیگر :

1. یکی از این دو مساله را (مساله اوليه يا ثانويه) برای حل انتخاب کرده و جواب بهینه آنرا بدست می آوریم .
2. جواب بهینه مساله دیگر (مساله اوليه يا مساله ثانويه) را می توانیم بدون حل بدست آوریم .
3. جواب بهینه مساله دیگر در سطر تابع هدف جدول نهایی زیر ستون متغیر های شروع مساله قرار دارد .
4. اگر زیر ستون متغیرهای شروع مساله مقدار M وجود دارد آنرا حذف می کنیم .
5. اگر تابع هدف $\min$ است اعداد بدست آمده را در -1 ضرب می کنیم .

سیمپلکس ثانویه :

برای حل چنین مساله ای سه روش حل وجود دارد :

۱- استفاده از تکنیک متغیرهای مصنوعی

۲- تبدیل به مساله ثانویه

۳- سیمپلکس ثانویه

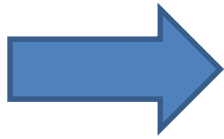
۱- استفاده از تکنیک متغیرهای مصنوعی :

$$\min z = 10x_1 + 5x_2 + 4x_3$$

$$3x_1 + 2x_2 - 3x_3 \geq 3$$

$$4x_1 + 2x_3 \geq 10$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$



$$3x_1 + 2x_2 - 3x_3 - s_1 + R_1 = 3$$

$$4x_1 + 2x_3 - s_2 + R_2 = 10$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2, R_1, R_2 \geq 0$$

$$\min z = 10x_1 + 5x_2 + 4x_3 + MR_1 + MR_2$$

$$\max(-z) = -10x_1 - 5x_2 - 4x_3 - MR_1 - MR_2$$

$$\max(-z) + 10x_1 + 5x_2 + 4x_3 + MR_1 + MR_1 = 0$$

اشکالات این روش :

- الف (مقدار متغیرها افزایش می یابد و به همین دلیل مساله پیچیده می گردد .
ب (حل مساله نسبتاً مشکل است پس بنابراین مورد استفاده قرار نمی گیرد .

۲- روش تبدیل به مساله ثانویه و حل آن :

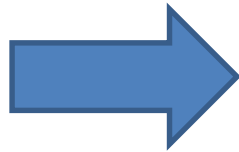
$$\max y_0 = 3y_1 + 10y_2$$

$$3y_1 + 4y_2 \leq 10$$

$$2y_1 \leq 5$$

$$-3y_1 + 2y_2 \leq 4$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$



$$\max y_0 - 3y_1 - 10y_2 = 0$$

$$3y_1 + 4y_2 + t_1 = 10$$

$$2y_1 + t_2 = 5$$

$$-3y_1 + 2y_2 + t_3 = 4$$

$$y_1, y_2, t_1, t_2, t_3 \geq 0$$

اشکالات این روش :

این روش را به دلیل آنکه شکل مساله عوض گردیده قابل قبول نیست بنابراین مورد استفاده قرار نمی گیرد .

۳- روش سیمپلکس ثانویه :

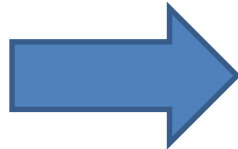
اگر بخواهیم پیچیدگی استفاده از تکنیک متغیرهای مصنوعی و تغییر شکل که با استفاده از مساله ثانویه بوجود می آید را نداشته باشیم از سیمپلکس ثانویه استفاده می کنیم که در آن همیشه بایستی تابع هدف Max و محدودیتهای کوچکتر ($\leq$) مساوی باشد .

$$\max(-z) = 10x_1 - 5x_2 - 4x_3$$

$$-3x_1 - 2x_2 + 3x_3 \leq -3$$

$$-4x_1 - 2x_3 \leq -10$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$



$$\max(-z) + 10x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 5$$

$$-3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + S_1 = -3$$

$$-4x_1 - 2x_3 + S_2 = -10$$

$$x_1, x_2, x_3, S_1, S_2 \geq 0$$

سیمپلکس ثانویه با استفاده از روش اولیه و مفهوم مساله ثانویه نسبت به حل مدل می پردازد و مراحل حل آن به شرح زیر است :

- ۱- مساله را به فرم استاندارد تبدیل می کنیم یعنی تابع هدف Max و محدودیتها کوچکتر مساوی شود .
- ۲- نامعادلات را به معادله تبدیل نموده و با اضافه کردن متغیر کمکی S+ و تابع هدف را به سمت چپ منتقل می کنیم .
- ۳- اولین جدول سیمپلکس را تشکیل دهید و در آن ضرایب متغیرها را بنویسید .
- ۴- متغیر خروجی را تعیین کنید و آنرا سطر لولا (سطر خروجی) بنامید .
نکته : منفی ترین عدد در ستون سمت راست یا منابع را به عنوان متغیر خروجی انتخاب می کنیم .
- ۵- متغیر ورودی را تعیین کنید و آنرا ستون لولا یا ستون ورودی بنامید .
نکته : اعداد سطر تابع هدف را بر ضرایب منفی سطر خروجی تقسیم نموده و حداقل قدر مطلق آنرا به عنوان متغیر ورودی انتخاب کنید .

$$\min \left| \left(\frac{Z}{\text{سطر خروجی} -} \right) \right|$$

- ۶- عدد لولا را تعیین کنید .
نکته : محل تقاطع سطر خروجی و ستون ورودی را عدد لولا می نامیم و این عدد همواره منفی می باشد .

۷- دومین جدول سیمپلکس را تشکیل می دهیم که در آن ورودی به جای خروجی قرار می گیرد و سطر لولا جدید را بدست آورید .

$$\text{سطر لولای جدید} = \frac{\text{سطر لولای قدیم}}{\text{سطر لولای قدیم}}$$

۸- سایر سطرها را با استفاده از رابطه زیر بنویسید .

$$\text{سطر قدیم} = \text{سطر جدید} - \begin{pmatrix} \text{ضرایب} & \text{ضرایب} \\ \text{ستون} & \text{ستون} \\ \text{لولا جدول} & \text{لولا جدول} \\ \text{قدیم} & \text{جدید} \end{pmatrix}$$

نکته : هدف این است که اعداد ستون لولا به جز عدد لولا که یک است ، به صفر تبدیل شود .

۹- آیا دو شرط زیر برقرار است :

شرط موجه بودن : یعنی غیر منفی بودن اعداد ستون منابع یا اعداد سمت راست .

شرط بهنیه گی : یعنی غیر منفی بودن اعداد سطر تابع هدف .

برای اینکه این دو شرط برقرار گردد باید به گام چهارم برگردیم و مساله را آنقدر تکرار کنیم تا هر دو شرط محقق گردد .

$$\min z = 10x_1 + 5x_2 + 4x_3$$

$$3x_1 + 2x_2 - 3x_3 \geq 3$$

$$4x_1 + 2x_3 \geq 10$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$



$$\max(-z) = 10x_1 - 5x_2 - 4x_3$$

$$3x_1 - 2x_2 + 3x_3 \leq -3$$

$$-4x_1 - 2x_3 \leq -10$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

مثال :



$$\max(-z) - 10x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 0$$

$$-3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + S_1 = -3$$

$$-4x_1 - 2x_3 + S_2 = -10$$

$$x_1, x_2, x_3, S_1, S_2 \geq 0$$

	X1	X2	X3	S1	S2	b
S1	-3	-2	3	1	0	-3
S2	-4	0	-2	0	1	-1
-z	10	5	4	0	0	0
	10/-3	-	4/-2	-	-	-
S1	-9	-2	0	1	3/2	-18
X3	2	0	1	0	-1/2	5
-z	2	5	0	0	2	-20
ورودی	2/-9	5/-2	-	-	-	-
X1	1	2/9	0	-1/9	-1/6	2
X3	0	-4/9	1	2/9	-1/6	1
-z	0	41/9	0	2/9	7/3	-24