

قضیه ۱ فرض کنید $f: X \rightarrow Y$ و $g: X \rightarrow Y$ دو تابع باشند. در این صورت

$f = g$ ، اگر و تنها اگر برای هر $x \in X$ ، $f(x) = g(x)$.

$$f = g \iff \forall x \in X, f(x) = g(x)$$

proof : $\Rightarrow$ $y = f(x) \equiv (x, y) \in f \xleftrightarrow[\substack{\text{طبق فرض} \\ f=g}}{(x, y) \in g \equiv y = g(x)}$

$$\text{so} \Rightarrow f(x) = g(x)$$

$$\Leftarrow (x, y) \in f \equiv y = f(x) \xleftrightarrow[\substack{\text{طبق فرض} \\ f(x)=g(x)}}{y = g(x) \equiv (x, y) \in g}$$

$$\text{so} \Rightarrow f = g$$

mahyar esmaeilpour

قضیه ۲: فرض کنید $f: A \rightarrow C$ و $g: B \rightarrow D$ دو تابع باشند به طوری که برای هر $x \in A \cap B$ ، $f(x) = g(x)$. در این صورت $h = f \cup g: A \cup B \rightarrow C \cup D$ یک تابع است که در

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & ; x \in A \\ g(x) & ; x \in B \end{cases}$$

آن برای هر $x \in X$ داریم:

proof:

ابتدا ثابت می‌کنیم که $f \cup g$ یک تابع از $A \cup B \rightarrow C \cup D$ است پس $f \cup g \subseteq (A \times C) \cup (B \times D)$

$$\begin{cases} f \subseteq A \times C \\ g \subseteq B \times D \end{cases} \Rightarrow f \cup g \subseteq (A \cup B) \times (C \cup D)$$

بعلاوه: $\text{Dom}(h) = A \cup B$, $\forall (x, y_1), (x, y_2) \in f \cup g \Rightarrow y_1 = y_2$

حالت ۱: $\begin{cases} (x, y_1) \in f \Rightarrow y_1 = f(x) \\ (x, y_2) \in f \Rightarrow y_2 = f(x) \end{cases} \xRightarrow{\text{so}} y_1 = y_2$

حالت ۲: $\begin{cases} (x, y_1) \in g \Rightarrow y_1 = g(x) \\ (x, y_2) \in g \Rightarrow y_2 = g(x) \end{cases} \xRightarrow{\text{so}} y_1 = y_2$

حالت ۳: $\begin{cases} (x, y_1) \in f \Rightarrow y_1 = f(x) \\ (x, y_2) \in g \Rightarrow y_2 = g(x) \end{cases} \xRightarrow[\text{فرض قضیه}]{\forall x \in A \cap B, f(x) = g(x)} y_1 = y_2$

@matheycar



قضیه ۲: فرض کنید $f: X \rightarrow Y$ یک تابع باشد. در این صورت:

الف) $f(\emptyset) = \emptyset$

proof: $f(\emptyset) = \{f(x) \mid \underbrace{x \in \emptyset}_F\} = \emptyset$ ■

ب) $f(\{x\}) = \{f(x)\}$

proof: $f(\{x\}) = \{f(x) \mid \underbrace{x \in \{x\}}_T\} = \{f(x)\}$ ■

ج) $A \subseteq B \subseteq X \Rightarrow f(A) \subseteq f(B)$

proof: $y \in f(A) \equiv \exists x \in A; y = f(x) \xrightarrow[A \subseteq B]{\text{طبق فرض}} \exists x \in B; y = f(x) \equiv y \in f(B)$

$\Rightarrow f(A) \subseteq f(B)$ ■

د) $C \subseteq D \subseteq Y \Rightarrow f^{-1}(C) \subseteq f^{-1}(D)$

proof: $x \in f^{-1}(C) \equiv f(x) \in C \xrightarrow[C \subseteq D]{\text{طبق فرض}} f(x) \in D \equiv x \in f^{-1}(D)$

$\Rightarrow f^{-1}(C) \subseteq f^{-1}(D)$ ■

@mathyar

قضیه ۴: فرض کنید $f: X \rightarrow Y$ یک تابع بوده و $F = \{A_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ خانواده‌ای از

زیرمجموعه‌های X باشد. در این صورت:

$$f\left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma\right) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} f(A_\gamma)$$

proof: $\Rightarrow$ فرض $y \in f\left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma\right) \equiv \exists x \in \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma ; y = f(x) \equiv x \in \{x \mid \exists \gamma (\gamma \in \Gamma \wedge x \in A_\gamma)\}$

$$\equiv \exists \gamma (\gamma \in \Gamma \wedge x \in A_\gamma) \Rightarrow f(x) \in f(A_\gamma) \Rightarrow y \in f(A_\gamma) \Rightarrow y \in \bigcup_{\gamma \in \Gamma} f(A_\gamma)$$

$$\text{so } \Rightarrow f\left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma\right) \subseteq \bigcup_{\gamma \in \Gamma} f(A_\gamma)$$

$\Leftarrow$ فرض $y \in \bigcup_{\gamma \in \Gamma} f(A_\gamma) \equiv y \in \{y \mid \exists \gamma (\gamma \in \Gamma \wedge y \in f(A_\gamma))\} \Rightarrow y \in f(A_\gamma) \equiv \exists x \in A_\gamma ; y = f(x)$

$$\Rightarrow x \in \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma \Rightarrow f(x) \in f\left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma\right) \Rightarrow y \in f\left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma\right)$$

$$\text{so } \Rightarrow \bigcup_{\gamma \in \Gamma} f(A_\gamma) \subseteq f\left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma\right)$$

$$\Rightarrow f\left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma\right) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} f(A_\gamma) \quad \square$$

@mathyar

قضیه ۵: فرض کنید $f: X \rightarrow Y$ یک تابع بوده و $\mathcal{F} = \{A_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های X باشد. در این صورت:

$$f\left(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma\right) \subseteq \bigcap_{\gamma \in \Gamma} f(A_\gamma)$$

proof: $y \in f\left(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma\right) \equiv \exists x \in \bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma ; y = f(x) \Rightarrow x \in \{x \mid \forall \gamma (\gamma \in \Gamma \Rightarrow x \in A_\gamma)\}$

$$\Rightarrow \forall \gamma (\gamma \in \Gamma \Rightarrow x \in A_\gamma) \xRightarrow{\forall \gamma \in \Gamma} f(x) \in f(A_\gamma) \equiv y \in f(A_\gamma)$$

$$\forall \gamma (\gamma \in \Gamma \Rightarrow y \in f(A_\gamma)) \equiv \bigcap_{\gamma \in \Gamma} f(A_\gamma) \Rightarrow y \in \bigcap_{\gamma \in \Gamma} f(A_\gamma)$$

$$\Rightarrow f\left(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma\right) \subseteq \bigcap_{\gamma \in \Gamma} f(A_\gamma) \quad \blacksquare$$

@mathyar

قضیه ۶: فرض کنید $f: X \rightarrow Y$ یک تابع بوده و $\mathcal{F} = \{B_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ خانواده‌ای از

زیرمجموعه‌های X باشد. در این صورت:

$$f^{-1}\left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma\right) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} f^{-1}(B_\gamma)$$

proof: $\Rightarrow x \in f^{-1}\left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma\right) \equiv f(x) \in \bigcup_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma \Rightarrow f(x) \in \{f(x) \mid \exists \gamma (\gamma \in \Gamma \wedge f(x) \in B_\gamma)\}$

$$\Rightarrow \exists \gamma (\gamma \in \Gamma \wedge f(x) \in B_\gamma) \Rightarrow x \in f^{-1}(B_\gamma) \Rightarrow x \in \bigcup_{\gamma \in \Gamma} f^{-1}(B_\gamma)$$

$$\stackrel{\text{so}}{\Rightarrow} f^{-1}\left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma\right) \subseteq \bigcup_{\gamma \in \Gamma} f^{-1}(B_\gamma)$$

$$\Leftarrow x \in \bigcup_{\gamma \in \Gamma} f^{-1}(B_\gamma) \equiv x \in \{x \mid \exists \gamma (\gamma \in \Gamma \wedge x \in f^{-1}(B_\gamma))\} \Rightarrow f(x) \in B_\gamma \Rightarrow f(x) \in \bigcup_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma$$

$$\Rightarrow x \in f^{-1}\left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma\right) \stackrel{\text{so}}{\Rightarrow} \bigcup_{\gamma \in \Gamma} f^{-1}(B_\gamma) \subseteq f^{-1}\left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma\right)$$

$$\Rightarrow f^{-1}\left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma\right) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} f^{-1}(B_\gamma)$$

@mathyar

قضیه ۷: فرض کنید $f: X \rightarrow Y$ یک تابع بوده و $\mathcal{F} = \{B_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ خانواده‌ای از

$$f^{-1}\left(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma\right) = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} f^{-1}(B_\gamma)$$

زیر مجموعه‌های X باشد. در این صورت:

proof: $\Rightarrow x \in f^{-1}\left(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma\right) \equiv f(x) \in \bigcap_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma \Rightarrow f(x) \in \{f(x) \mid \forall \gamma (\gamma \in \Gamma \Rightarrow f(x) \in B_\gamma)\}$

$$\Rightarrow x \in f^{-1}(B_\gamma) \Rightarrow \{x \mid \forall \gamma (\gamma \in \Gamma \wedge x \in f^{-1}(B_\gamma))\} \equiv \bigcap_{\gamma \in \Gamma} f^{-1}(B_\gamma) \Rightarrow x \in \bigcap_{\gamma \in \Gamma} f^{-1}(B_\gamma)$$

$$\stackrel{\text{so}}{\Rightarrow} f^{-1}\left(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma\right) \subseteq \bigcap_{\gamma \in \Gamma} f^{-1}(B_\gamma)$$

$$\Leftarrow x \in \bigcap_{\gamma \in \Gamma} f^{-1}(B_\gamma) \equiv x \in \{x \mid \forall \gamma (\gamma \in \Gamma \Rightarrow x \in f^{-1}(B_\gamma))\} \Rightarrow f(x) \in \{f(x) \mid \forall \gamma (\gamma \in \Gamma \Rightarrow f(x) \in B_\gamma)\}$$

$$\Rightarrow f(x) \in \bigcap_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma \Rightarrow x \in f^{-1}\left(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma\right) \stackrel{\text{so}}{\Rightarrow} \bigcap_{\gamma \in \Gamma} f^{-1}(B_\gamma) \subseteq f^{-1}\left(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma\right)$$

$$\Rightarrow f^{-1}\left(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma\right) = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} f^{-1}(B_\gamma)$$

@mathyar



قضیه ۸: فرض کنید $f: X \rightarrow Y$ یک تابع بوده و $B, C \subseteq Y$. در این صورت:

$$f^{-1}(B - C) = f^{-1}(B) - f^{-1}(C)$$

proof: $\Rightarrow x \in f^{-1}(B - C) \equiv f(x) \in B - C \Rightarrow f(x) \in B \wedge f(x) \notin C$

$$\Rightarrow x \in f^{-1}(B) \wedge x \notin f^{-1}(C) \Rightarrow x \in f^{-1}(B) - f^{-1}(C) \quad \text{so } f^{-1}(B - C) \subseteq f^{-1}(B) - f^{-1}(C)$$

$$\Leftarrow x \in f^{-1}(B) - f^{-1}(C) \Rightarrow x \in f^{-1}(B) \wedge x \notin f^{-1}(C) \Rightarrow f(x) \in B \wedge f(x) \notin C$$

$$f(x) \in B - C \Rightarrow x \in f^{-1}(B - C) \quad \text{so } f^{-1}(B) - f^{-1}(C) \subseteq f^{-1}(B - C)$$

$$\Rightarrow f^{-1}(B - C) = f^{-1}(B) - f^{-1}(C) \quad \blacksquare$$

@mathyar

قضیه ۹: فرض کنید $f: X \rightarrow Y$ یک تابع یک به یک بوده و $\mathcal{F} = \{A_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ خانواده‌ای از

زیر مجموعه‌های X باشد. در این صورت:

$$f\left(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma\right) = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} f(A_\gamma)$$

proof: $\Rightarrow$ $y \in f\left(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma\right) \equiv \exists x \in \bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma ; y = f(x) \Rightarrow x \in \{x \mid \forall \gamma (\gamma \in \Gamma \Rightarrow x \in A_\gamma)\}$

$$\Rightarrow \forall \gamma (\gamma \in \Gamma \Rightarrow x \in A_\gamma) \Rightarrow f(x) \in f(A_\gamma) \stackrel{\forall \gamma \in \Gamma}{\Rightarrow} f(x) \in \bigcap_{\gamma \in \Gamma} f(A_\gamma) \Rightarrow y \in \bigcap_{\gamma \in \Gamma} f(A_\gamma)$$

$$\stackrel{\text{so}}{\Rightarrow} f\left(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma\right) \subseteq \bigcap_{\gamma \in \Gamma} f(A_\gamma)$$

$$\Leftarrow y \in \bigcap_{\gamma \in \Gamma} f(A_\gamma) \equiv y \in \{y \mid \forall \gamma (\gamma \in \Gamma \Rightarrow y \in f(A_\gamma))\} \Rightarrow y \in f(A_\gamma) \equiv \exists x \in A_\gamma ; y = f(x)$$

$$\stackrel{\text{فکری}}{\Rightarrow} \exists x \in A_\gamma ; y = f(x_\gamma) \Rightarrow f(x_{\gamma_1}) = f(x_{\gamma_2}) \Rightarrow x_{\gamma_1} = x_{\gamma_2} \stackrel{\text{all}}{\Rightarrow} x_\gamma \in A_\gamma$$

$$\Rightarrow x \in \bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma \Rightarrow f(x) \in f\left(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma\right) \Rightarrow y \in f\left(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma\right) \stackrel{\text{so}}{\Rightarrow} \bigcap_{\gamma \in \Gamma} f(A_\gamma) \subseteq f\left(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma\right)$$

$$\Rightarrow f\left(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma\right) = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} f(A_\gamma)$$

mathyar

قضیه ۱۵: فرض کنید $f: X \rightarrow Y$ تابعی دوسویی باشد. در این صورت $f^{-1}: Y \rightarrow X$

بیز تابعی صعودی است.

proof: $f: X \rightarrow Y$ تابع است $\begin{cases} \text{Dom}(f) = X \\ \forall (x, y_1), (x, y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2 \end{cases}$
 $f \subseteq X \times Y$

$f^{-1}: Y \rightarrow X$ تابع است $\begin{cases} \text{Dom}(f^{-1}) = Y = \text{Im}(f) \\ \forall (y, x_1), (y, x_2) \in f^{-1} \Rightarrow x_1 = x_2 \end{cases}$
 $f^{-1} \subseteq Y \times X$

چون f یک به یک است
 پس f^{-1} تابع است

$f^{-1} \circ f: X \rightarrow X$: $f(X) = Y = \text{Im}(f) \Rightarrow \text{Dom}(f^{-1}) = Y$

$f^{-1} \circ f^{-1}: Y \rightarrow Y$: $(y, x_1), (y, x_2) \in f^{-1} \Rightarrow x_1 = x_2$

$f \circ f^{-1}: Y \rightarrow Y$: $f^{-1}(Y) = X = \text{Dom}(f) = \text{Im}(f^{-1}) = X$



قضیه ۱۱: فرض کنید $f: X \rightarrow Y$ ، $g: Y \rightarrow Z$ و $h: Z \rightarrow W$ سه تابع باشند.

در این صورت $g \circ f: X \rightarrow Z$ و $h \circ g: Z \rightarrow W$ به علاوه:

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

proof:

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} W$$

$$X \xrightarrow{g \circ f} Z \xrightarrow{h} W : h \circ (g \circ f)$$

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{h \circ g} W : (h \circ g) \circ f$$

$$h \circ (g \circ f): X \rightarrow W$$

$$(h \circ g) \circ f: X \rightarrow W$$

$$\Rightarrow (h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

قضیه ۱۲: فرض کنید $f: X \rightarrow Y$ یک تابع باشد. اگر f دارای وارون چپ باشد
آنگاه f یک به یک است.

proof:

هانی $g: Y \rightarrow X \Rightarrow g \circ f: X \rightarrow X$ وارون چپ f

$$\forall x \in X \quad ; \quad g \circ f(x) = I_X(x) = x$$

اثبات یک به یک بودن f : $f(x_1) = f(x_2) \xrightarrow{g \circ} g(f(x_1)) = g(f(x_2))$

$$\Rightarrow I_X(x_1) = I_X(x_2) = x \Rightarrow x_1 = x_2$$

f یک به یک است



@mathyar

قضیه ۱۳: فرض کنید $f: X \rightarrow Y$ یک تابع باشد. اگر f دارای وارون راست باشد
آنگاه f پوشا است.

proof:

$$f \text{ وارون راست} : h: Y \rightarrow X \Rightarrow f \circ h(y): Y \rightarrow Y$$

$$\forall y \in Y ; f \circ h(y) = I_Y(y) = y$$

$$f(X) = Y \equiv \forall y \in Y \exists x \in X ; y = f(x) \quad \text{برای اثبات پوشا بودن } f$$

$$\text{فرض } x = h(y) \xrightarrow{f \circ} f(x) = f \circ h(y) = y$$

■ f پوشا است

@mathyar