

اعداد مختلط

سیستمهای عددی و توسعه آنها

پیدایش اعداد مختلط

ساختن اعداد مختلط

نمایش هندسی اعداد مختلط

اعمال روی اعداد مختلط و تعبیر هندسی آنها

نمایش قطبی اعداد مختلط و تعبیر هندسی عمل ضرب

ریشه‌های دوم اعداد مختلط

ریشه‌های مراتب بالاتر در اعداد مختلط

اندازه‌گیری با اعداد مختلط

سیستمهای عددی و توسعه آنها

تا امروز با اعداد حقیقی آشنا شده‌اید و از آنها برای محاسبات و اندازه‌گیری‌ها استفاده کرده‌اید. اعداد، مفاهیمی ریاضی هستند که برای اندازه‌گیری کمیت‌های فیزیکی ساخته شده‌اند.

زمانی که انسان‌ها نیازمند دانستن میزان دارایی‌های خود، مثلاً تعداد گوسفندان، بودند نیاز به شمارش پدید آمد و از این طریق مفهوم اعداد طبیعی ساخته شد. از لحاظ تاریخی، مفاهیم ریاضی در راستای حل مسائل عملی انسانها، ساخته شده‌اند. به وجود آمدن اعداد نیز ناشی از نیاز انسان به اندازه‌گیری کمیت‌ها بوده است. ابتدا کمیت‌های گسسته مورد توجه واقع شدند و برای اندازه‌گیری آنها از طریق شمارش، مفهوم اعداد طبیعی ساخته شدند.

در مرحله بعد که به کمیت‌های تقسیم‌پذیر برخورد شد، لازم بود که اعداد طبیعی را بتوان بر هم تقسیم کرد. این عمل در اعداد طبیعی قابل انجام نیست و برای حل این مشکل سیستم اعداد به اعداد کسری یا اعداد گویا توسعه پیدا کرد. پیدایش اعداد منفی نیز ناشی از وجود کمیت‌های جهت‌دار بود. هر جا که جهت برای اندازه‌گیری وجود دارد، اعداد منفی نیز حضور دارند.

تا مدت‌ها اعداد گویا برای رفع نیاز انسان برای اندازه‌گیری کمیت‌ها کافی بود و هیچ نیاز عملی به وجود اعدادی از نوع دیگر نبود. در واقع، از لحاظ تاریخی، ریاضیدان‌ها فرض می‌کردند تنها سیستم اعداد، فقط اعداد گویا هستند. بر همین اساس، برخی استدلال‌های هندسی بر این فرض متکی بود که اندازه یک پاره خط عددی گویا است. اما قضیه فیثاغورس نشان داد که اگر قرار است خط هندسی پیوستگی داشته باشد، طول برخی پاره‌خط‌ها نمی‌تواند عددی گویا باشد. در اینجا بود که وجود سیستم بزرگتری از اعداد گویا مورد توجه قرار گرفت و آن را اعداد حقیقی نامیدند.

اما رسیدن به اعداد حقیقی بسیار مشکلتر از رسیدن به سیستم اعداد گویا است. ما تمام اعداد گویا را می‌شناسیم و می‌توانیم آنها را با نمادهایی نمایش دهیم و قوانین جمع و ضرب آنها را بیان کنیم. اما در مورد سیستم اعداد حقیقی فقط آنها را به عنوان نقاطی روی خط می‌شناسیم و باید پرسید اصلاً چرا آنها را عدد نامیده‌ایم؟ چگونه آنها را با هم جمع کنیم یا در هم ضرب کنیم؟ تنها شناخت شهودی ما از اعداد حقیقی آن است که نقاط یک خط پیوسته هندسی نشان دهنده و نمایشی برای اعداد حقیقی هستند. برخی از این اعداد همان اعداد گویا هستند و بقیه را که فقط نقطه‌ای روی خط هستند، اعداد گنگ نامیده شده‌اند.

ما هیچ شناختی از اعداد گنگ نداریم و حداکثر مکان آنها را روی خط تشخیص می‌دهیم. مهمترین شیوه شناخت ما از یک عدد حقیقی دانستن تقریبات آن از طریق اعداد گویا است. معمولاً هر عدد حقیقی را از طریق تقریبات اعشاری آن می‌شناسند و شناسنامه هر عدد حقیقی همان تقریبات اعشاری آن است. به کمک تقریبات اعشاری، می‌توان جمع و ضرب اعداد حقیقی را تعریف کرد و از این طریق، اعداد حقیقی واقعاً یک سیستم از اعداد خواهند شد. در حل مسائل مربوط به اعداد حقیقی ما هیچوقت به خود اعداد حقیقی دسترسی نداریم و همواره تقریبات اعشاری آنها را به تعداد رقم مورد نیاز به دست می‌آوریم.

پیدایش اعداد مختلط

پس از اعداد حقیقی، چه نیازی به سیستم دیگری از اعداد داریم؟ در ساختن هر سیستم جدیدی از اعداد، قابلیت جدیدی از اعداد به قابلیت‌های قبلی اضافه می‌شود. مثلاً در سیستم اعداد صحیح همه اعداد قرینه دارند که در سیستم اعداد طبیعی این خاصیت برقرار نیست. در سیستم اعداد گویا همه اعداد ناصفر وارون دارند که در سیستم اعداد صحیح این خاصیت برقرار نیست. در سیستم اعداد حقیقی همه اعداد مثبت از هر مرتبه‌ای ریشه دارند که در سیستم اعداد گویا این خاصیت برقرار نیست. البته ویژگی‌های اعداد حقیقی بیشتر از این است و مهمترین

خاصیتش که به خاصیت کمال مشهور است آن است معادل با آن است که هر دنباله صعودی از بالا کراندار آن همگرا است.

در اعداد حقیقی معادله $x^2 + 1 = 0$ جواب ندارد یعنی ۱- در اعداد حقیقی جذر ندارد. اما، ریاضیدان‌ها به این نتیجه رسیدند که اگر ۱- جذر می‌داشت برخی محاسبات را آسانتر می‌توان انجام داد و قبول یک عدد فرضی که توان دوم آن ۱- شود، سهولت‌های بسیاری در محاسبات رادیکالی ایجاد می‌کند. تا مدتها ریاضیدان‌ها با این عدد فرضی کار کردند و به خاطر ماهیت فرضی بودن آن، این دسته از اعداد را اعداد موهومی نامیدند. اما کار ریاضیدان‌ها کار با موهومات و اعداد خیالی نیست و سوال اصلی که مطرح شد آن است که آیا می‌توانیم سیستم اعداد حقیقی را به گونه‌ای توسعه دهیم که ۱- در سیستم جدید، جذر داشته باشد؟ این که چنین سیستمی وجود دارد یا نه، یک مسئله ریاضی است. ابتدا باید توجه کنیم که منظور از سیستم جدید آن است که مجموعه‌ای بزرگتر از اعداد حقیقی داشته باشیم که در آن دو عمل جمع و ضرب برقرار باشند که تعمیمی از دو عمل جمع و ضرب اعداد حقیقی باشند و همان خواص را داشته باشند و در سیستم جدید، عنصری هم داشته باشند که توان دوم آن برابر ۱- باشد.

برای یافتن سرنخ‌هایی برای ساختن این سیستم جدید (در صورت وجود) از استراتژی حل شده فرض کردن مسئله استفاده می‌کنیم. یعنی فرض کنید چنین سیستمی از اعداد جدید در اختیار داشته باشیم که $\mathbb{R}$ را در بردارد و عنصری هم دارد که توان دوم آن ۱- شود. این عنصر را i می‌نامیم، یعنی $i^2 = -1$. اگر a و b دو عدد حقیقی باشند با اعمال جمع و ضرب در سیستم فرضی جدید از اعداد می‌توانیم عددی به صورت $a + ib$ بسازیم. با تکرار عملیات جمع و ضرب روی این گونه اعداد و استفاده از خواص جمع و ضرب که طبق فرض برقرارند و با ساده سازی، باز هم به اعدادی به همین شکل می‌رسیم.

از این بررسی‌ها نتیجه می‌شود که اعداد جدید، همگی باید به شکل $a + ib$ باشند. اما i یک عنصر فرضی بود و ما واقعا عددی به نام i در اختیار نداریم تا بتوانیم با این روش سیستم جدیدی از اعداد بسازیم. برای حل کامل

مسئله کافیت توجه کنیم برای مشخص شدن $a + ib$ کافیت a و b را بشناسیم، یعنی زوج (a, b) به همان خوبی $a + ib$ می تواند عمل کند و یک تناظر دوسویی بین زوجهای مرتب (a, b) از اعداد حقیقی و اعداد نامشخص $a + ib$ وجود دارد.

$$(a, b) \leftrightarrow a + ib$$

تناظر بالا، می تواند مسئله ما را حل کند. اگرچه اعداد به صورت $a + ib$ ، برای ما فرضی و خیالی هستند و در حال حاضر چنین اعدادی را در اختیار نداریم ولی زوجهای مرتب اعداد حقیقی کاملاً واقعی هستند و ما آنها را در اختیار داریم. پس، اگر واقعاً سیستم جدیدی از اعداد با خواص گفته موجود باشند باید بتوانیم آنها را به صورت زوجهای مرتب از اعداد حقیقی بیان کنیم. با این ایده، مجموعه جدید از اعداد همان مجموعه $\mathbb{R}^2$ است که از لحاظ هندسی معادل یک صفحه است. این سیستم جدید از اعداد را اعداد مختلط می نامند و به شکل دقیق به صورت زیر ساخته می شود.

ساختن اعداد مختلط

با توجه به ایده هایی که از بررسی های قبلی خود به دست آوردیم مجموعه $\mathbb{R}^2$ را با روش زیر به یک مجموعه جدید از اعداد تبدیل می کنیم و آن را مجموعه اعداد مختلط می نامیم. در این حالت مجموعه اعداد جدید به دست آمده را با $\mathbb{C}$ نشان می دهند. پس از لحاظ مجموعه ای $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.

جمع اعداد مختلط: هر عدد مختلط یک زوج مرتب از اعداد حقیقی است و باید بگوییم دو زوج مرتب چگونه با هم جمع می شوند و یک زوج مرتب جدید می سازند. این تعریف، دلبخواهی انجام نمی شود و با توجه به ایده هایی که بحث کردیم، تعریف انجام می شود.

دو زوج مرتب $(a . b)$ و $(c . d)$ متناظر دو عدد فرضی $a + ib$ و $c + id$ هستند. اگر قرار باشد این اعداد فرضی را جمع کنیم، به کمک خواصی که برای جمع و ضرب فرض کرده بودیم، نتیجه به شکل زیر در می آید.

$$a + ib + c + id = a + c + ib + id = (a + c) + i(b + d)$$

حاصلجمع به دست آمده در بالا، متناظر زوج $(a + c . b + d)$ است. پس، تعریف جمع روی زوجهای مرتب را به صورت زیر انجام می دهیم.

$$(a . b) + (c . d) = (a + c . b + d)$$

عمل بالا، همان تعریف جمع در سیستم اعداد جدید است و باید بررسی شود که همان خواص اساسی عمل جمع اعداد را دارد. بررسی خواص جابجایی و شرکت پذیری آسان است. زوج $(0 . 0)$ صفر این عمل جمع است و قرینه یک زوج $(a . b)$ ، زوج $(-a . -b)$ است.

ضرب اعداد مختلط: هر عدد مختلط یک زوج مرتب از اعداد حقیقی است و باید بگوییم دو زوج مرتب چگونه در هم ضرب می شوند و یک زوج مرتب جدید می سازند.

این تعریف نیز دلبخواهی انجام نمی شود و با توجه به ایده هایی که بحث کردیم، تعریف انجام می شود. دو زوج مرتب $(a . b)$ و $(c . d)$ متناظر دو عدد فرضی $a + ib$ و $c + id$ هستند. اگر قرار باشد این اعداد فرضی را ضرب کنیم، به کمک خواصی که برای جمع و ضرب فرض کرده بودیم، نتیجه به شکل زیر در می آید.

$$(a + ib)(c + id) = ac + aid + ibc + ibid$$

$$= ac + iad + ibc - bd = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

حاصلضرب به دست آمده در بالا، متناظر زوج $(ac - bd . ad + bc)$ است. پس، تعریف ضرب روی زوجهای مرتب را به صورت زیر انجام می دهیم.

$$(a . b)(c . d) = (ac - bd . ad + bc)$$

عمل بالا، همان تعریف ضرب در سیستم اعداد جدید است و باید بررسی شود که همان خواص اساسی عمل ضرب اعداد را دارد. بررسی خواص جابجایی و شرکت پذیری و پخشی بودن نسبت به جمع به عنوان تمرین بر عهده خواننده است. زوج (۱.۰) عدد ۱ این عمل ضرب است زیرا:

$$(a.b)(۱.۰) = (a \times ۱ - b \times ۰, a \times ۰ + b \times ۱) = (a.b)$$

و هر زوج ناصفر $(a.b)$ ، وارون دارد. برای به دست آوردن وارون $(a.b)$ فرض کنید $(x.y)$ وارون آن باشد.

پس

$$(a.b)(x.y) = (۱.۰) \Rightarrow (ax - by, ay + bx) = (۱.۰)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ax - by = 1 \\ ay + bx = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{a}{a^2+b^2} \cdot y = \frac{-b}{a^2+b^2}.$$

این محاسبه نشان می دهد که وارون زوج ناصفر $(a.b)$ ، زوج $\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$ است. توجه کنید که شرط ناصفر بودن $(a.b)$ معادل با آن است که $a^2 + b^2 \neq 0$.

تا اینجا سیستمی به دست آورده ایم که دارای دو عمل جمع و ضرب است و این اعمال خواصی مشابه جمع و ضرب اعداد معمولی دارند. مسئله هنوز حل نشده است، این سیستم باید اعداد حقیقی را در خود داشته باشد و عنصری داشته باشد که توان دوم آن ۱- باشد.

اعداد حقیقی به عنوان زیرمجموعه ای از اعداد مختلط، از اعداد به صورت $a + i \times ۰$ تشکیل شده است که متناظر زوجهای مرتب به صورت $(a.۰)$ هستند. بنابراین، می توانیم هر زوج به صورت $(a.۰)$ را به عنوان عدد حقیقی a در نظر بگیریم. با این عمل، مجموعه اعداد حقیقی به عنوان زیرمجموعه ای از مجموعه اعداد مختلط در می آید. فقط باید توجه داشته باشیم که عدد حقیقی a به عنوان یک عدد مختلط، زوج مرتب $(a.۰)$ است.

برای مثال، زوج (0.0) همان 0 و زوج (1.0) همان 1 است، یعنی صفر و یک اعداد مختلط همان صفر و یک اعداد حقیقی است.

قبل از ادامه بحث، باید تحقیق کنیم که جمع و ضرب اعداد مختلط توسعه‌ای از جمع و ضرب اعداد حقیقی است. یعنی جمع و ضرب زوجهای $(a.0)$ و $(b.0)$ به عنوان اعداد مختلط، همان جمع و ضرب دو عدد حقیقی a و b است. تساوی‌های زیر درستی این مطلب را نشان می‌دهند.

$$(a.0) + (b.0) = (a + b.0) \quad (a.0)(b.0) = (ab.0)$$

به این ترتیب $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ و جمع و ضرب $\mathbb{C}$ توسعه‌ای از جمع و ضرب $\mathbb{R}$ است.

اما، توان دوم چه عنصری در $\mathbb{C}$ برابر -1 است؟ عنصر فرضی i متناظر زوج (0.1) است و قاعدتاً توان دوم آن باید -1 شود. این مطلب را بررسی می‌کنیم.

$$(0.1)(0.1) = (0 \times 0 - 1 \times 1.0 \times 1 + 1 \times 0) = (-1.0) = -1$$

اکنون مسئله کاملاً حل شده است و سیستمی جدیدی از اعداد ساخته‌ایم که توسعه‌ای از اعداد حقیقی است و در آن عنصری وجود دارد که توان دوم آن -1 است. اگر عنصر (0.1) را با همان نماد i نمایش دهیم، i دیگر یک عنصر فرضی نیست و عنصر مشخص (0.1) در $\mathbb{R}^2$ (یا $\mathbb{C}$) است. می‌توانیم برای دو عدد حقیقی a و b مقدار $a + ib$ را محاسبه کنیم که دقیقاً همان زوج $(a.b)$ خواهد بود.

$$\begin{aligned} a + ib &= (a.0) + (0.1)(b.0) = (a.0) + (0 \times b - 1 \times 0.0 \times 0 + 1 \times b) \\ &= (a.0) + (0.b) = (a.b) \end{aligned}$$

از این به بعد، اعداد مختلط را می‌توانیم هم به صورت $(a.b)$ و هم به صورت $a + ib$ در نظر بگیریم. فقط توجه داشته باشید که در نمایش اعداد مختلط به صورت $a + ib$ ، a همان $(a.0)$ و b همان $(0.b)$ و i همان (0.1) است.

بنا به قرارداد، وارون یک عدد مختلط Z را با Z^{-1} نشان می‌دهیم و تقسیم دو عدد مختلط Z و W بر هم، به

$$\text{صورت } \frac{Z}{W} = ZW^{-1} \text{ تعریف می‌شود، به ویژه } \frac{1}{W} = W^{-1}.$$

مثال:

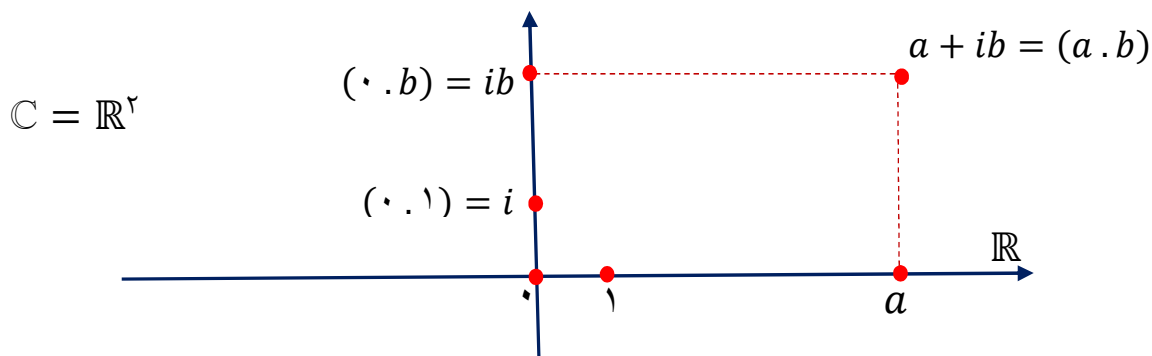
$$\frac{1+i}{1-i} = (1+i)(1-i)^{-1} = \frac{1}{2}(1+i)^2 = i \quad . \quad \frac{1}{1-i} = \frac{1}{2}(1+i) \quad . \quad \frac{1}{i} = i^{-1} = -i$$

نمایش هندسی اعداد مختلط

مجموعه اعداد حقیقی را می‌توان به صورت یک خط هندسی در نظر گرفت که روی آن یک جهت و مبدا و پاره‌خط واحد تعیین کرده باشیم. این عمل یک نمایش هندسی برای اعداد حقیقی ایجاد می‌کند. متناظر هر عدد حقیقی یک نقطه از این خط و متناظر هر نقطه از این خط یک عدد حقیقی در نظر گرفته می‌شود.



مجموعه اعداد مختلط همان $\mathbb{R}^2$ است و اعضای $\mathbb{R}^2$ می‌توانند متناظر نقاط یک صفحه تحلیلی شده که دارای دستگاه مختصات است، قرار بگیرند. بنابراین مجموعه اعداد مختلط را می‌توانیم با یک صفحه دارای دستگاه مختصات، نمایش دهیم. این عمل یک نمایش هندسی از اعداد مختلط ایجاد می‌کند. در این صفحه مکان اعداد 0 و 1 و i و a و ib و $a + ib$ به شکل زیر مشخص می‌شوند.



روی محور افقی، اعداد حقیقی قرار دارند. و به همین دلیل، محور افقی را محور حقیقی می‌نامند. نقاط روی محور افقی، از یک طرف به عنوان عدد حقیقی مثلاً با a نشان داده می‌شوند و از طرف دیگر به عنوان عدد مختلط در صفحه، با زوج $(a, 0)$ نشان داده می‌شوند. صفحه‌ای را که به عنوان نمایش هندسی اعداد مختلط بکار برده می‌شود، صفحه مختلط می‌نامند.

اعداد روی محور عمودی به صورت ib هستند و به این دلیل آن را محور موهومی می‌نامند. موهومی نامی است که از لحاظ تاریخی در اعداد مختلط وارد شده است. در ابتدای پیدایش اعداد مختلط، سیستمی درستی برای آنها پیشنهاد نشده بود و فقط با همان سیستم فرضی از اعداد مختلط کار می‌شد و تا مدتها کسی باور نداشت که چنین اعدادی وجود دارند، به همین دلیل برای آنها از اعداد موهومی یا خیالی استفاده می‌شد و در تعبیر هندسی از این اعداد، محور عمودی را محور موهومی می‌نامیدند. اعداد مختلط روی محور موهومی به صورت ib هستند و آنها را اعداد موهومی محض می‌نامند.

هر عدد مختلط به صورت مجموع یک عدد حقیقی و یک عدد موهومی محض است. فرض کنید عدد مختلط Z به صورت $Z = a + ib$ باشد، در این صورت، a را قسمت حقیقی Z و b را قسمت موهومی Z می‌نامند. قسمت حقیقی Z را با $\text{Re}(Z)$ و قسمت موهومی آن را با $\text{Im}(Z)$ نشان می‌دهند. بنابراین:

$$Z = a + ib \Rightarrow \text{Re}(Z) = a, \text{Im}(Z) = b$$

توجه داشته باشید که قسمت حقیقی و موهومی یک عدد مختلط، هر دو، عدد حقیقی هستند. برای مثال قسمت حقیقی اعداد موهومی محض صفر است و یک عدد مختلط موهومی محض است اگر و فقط اگر قسمت حقیقی آن صفر باشد. همچنین قسمت موهومی اعداد حقیقی صفر است و یک عدد مختلط عدد حقیقی است اگر و فقط اگر قسمت موهومی آن صفر باشد.

مثال: $\text{Re}(1 - 2i) = 1, \text{Im}(1 - 2i) = -2, \text{Re}(35i) = 0, \text{Im}(i^2) = 0, \text{Im}(i^3) = -1$

مسائل

(۱) مکان اعداد مختلط زیر را در صفحه مختلط بیابید و قسمت حقیقی و موهومی آنها را به دست آورید و روی شکل نشان دهید.

$$z_1 = 3 + 4i \quad . \quad z_2 = -1 + i \quad . \quad z_3 = 5 \quad . \quad z_4 = -i$$

$$z_1 + z_2 \quad . \quad z_1 z_2 \quad . \quad z_1 - z_2 z_3 \quad . \quad z_2 z_3 z_4 \quad . \quad z_1^2 \quad . \quad z_2^3 \quad . \quad z_4^{100}$$

(۲) قسمت حقیقی و موهومی عدد مختلط $4 - i^3 + i^4 + i^5$ را به دست آورید.

(۳) خاصیت شرکت پذیری ضرب اعداد مختلط را طبق تعریف داده شده، بررسی کنید.

(۴) خاصیت پخش ضرب نسبت به جمع را در اعداد مختلط طبق تعریف داده شده، بررسی کنید.

(۵) اگر z و w دو عدد مختلط و λ یک عدد حقیقی باشد، درستی تساوی‌های زیر را نشان دهید.

$$\operatorname{Re}(z + w) = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Re}(w).$$

$$\operatorname{Im}(z + w) = \operatorname{Im}(z) + \operatorname{Im}(w)$$

$$\operatorname{Re}(\lambda z) = \lambda \operatorname{Re}(z) \quad . \quad \operatorname{Im}(\lambda z) = \lambda \operatorname{Im}(z).$$

$$\operatorname{Re}(iz) = -\operatorname{Im}(z) \quad . \quad \operatorname{Im}(iz) = \operatorname{Re}(z).$$

(۶) مقادیر زیر را حساب کنید.

$$\frac{1}{i} \quad . \quad \frac{1-2i}{2+i} \quad . \quad \frac{5+3i}{5-3i} \times \frac{2}{i-1} \quad . \quad \frac{i}{3} - \frac{i-4}{2i} \quad . \quad \frac{3+5i}{-2-2i} \times (2-i)$$

(۷) برای هر عدد مختلط z ثابت کنید:

الف) فاصله z و $\bar{z}$ از مبدا با هم مساوی هستند.

ب) دو خط واصل از مبدأ به z و $\bar{z}$ بر هم عمودند.

پ) $\bar{z}$ در صفحه با دوران z حول مبدأ به اندازه زاویه $\frac{\pi}{2}$ به دست می‌آید.

(۸) ثابت کنید معادله $z^2 + 1 = 0$ در اعداد مختلط فقط دارای جواب‌های $z = \pm i$ است.

(۹) به ازای کدام اعداد مختلط z داریم $z^2 \in \mathbb{R}$.

۱۰) درستی اتحادهای زیر را در اعداد مختلط بررسی کنید.

$$(z + w)(z - w) = z^2 - w^2$$

$$z \neq 1 \Rightarrow 1 + z^2 + z^3 + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

آیا همه اتحادهای جبری در اعداد حقیقی در اعداد مختلط هم برقرارند؟ چرا؟

۱۱) آیا می‌توان اعداد مختلط را مرتب کرد؟ آیا می‌توان اعداد مختلط را به گونه‌ای مرتب کرد که دو

خاصیت زیر برقرار شوند؟

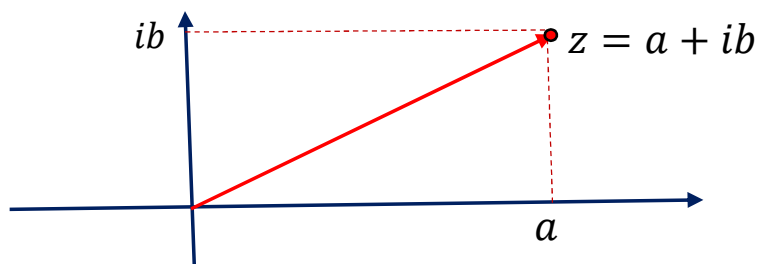
$$z_1 \leq z_2 \Rightarrow w + z_1 \leq w + z_2$$

$$0 \leq w \cdot z_1 \leq z_2 \Rightarrow wz_1 \leq wz_2$$

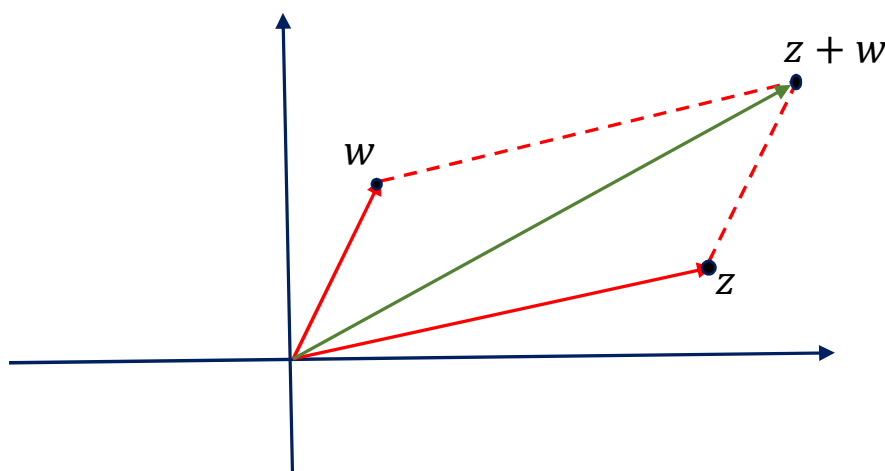
اعمال روی اعداد مختلط و تعبیر هندسی آنها

از آنجا که تعبیر هندسی مجموعه اعداد مختلط یک صفحه تحلیلی است، بین خواص جبری اعداد مختلط و خواص هندسی صفحه رابطه نزدیکی وجود دارد. شناخت این رابطه کمک زیادی به درک اعداد مختلط می‌کند و می‌توان مسائل جبری اعداد مختلط را به مسائل هندسی صفحه تبدیل کرد و برعکس مسائل هندسی صفحه را به کمک اعداد مختلط بررسی کرد.

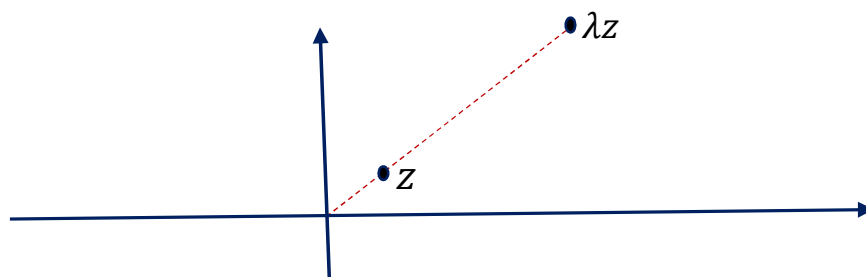
تعبیر هندسی عمل جمع: هر عدد مختلط z که به صورت $z = a + ib$ است برداری را در صفحه به مختصات (a, b) معین می‌کند. مختصات این بردار، همان قسمت‌های حقیقی و موهومی z هستند.



همانطور که می‌دانید، در جمع بردارها، مختصات آنها، مولفه به مولفه با هم جمع می‌شوند. در جمع اعداد مختلط نیز قسمت‌های حقیقی و قسمت‌های موهومی آنها به ترتیب با هم جمع می‌شوند. بنابراین عمل جمع اعداد مختلط، اگر آنها را به عنوان بردار در نظر بگیریم، همان عمل جمع بردارهاست.



تعبیر عمل ضرب اعداد حقیقی در اعداد مختلط: اگر عدد حقیقی λ را در عدد مختلط $Z = a + ib$ ضرب کنیم، حاصل، به صورت $\lambda Z = \lambda a + i\lambda b$ در می‌آید. قسمت حقیقی λZ برابر λa و قسمت موهومی آن برابر λb است. بنابراین، اگر Z را به عنوان بردار در نظر بگیریم، این عمل، همان عمل ضرب عدد حقیقی λ در بردار است. یک تعبیر هندسی این عمل، تجانس است. در واقع λZ متجانس Z با ضریب λ نسبت به مبدأ است.

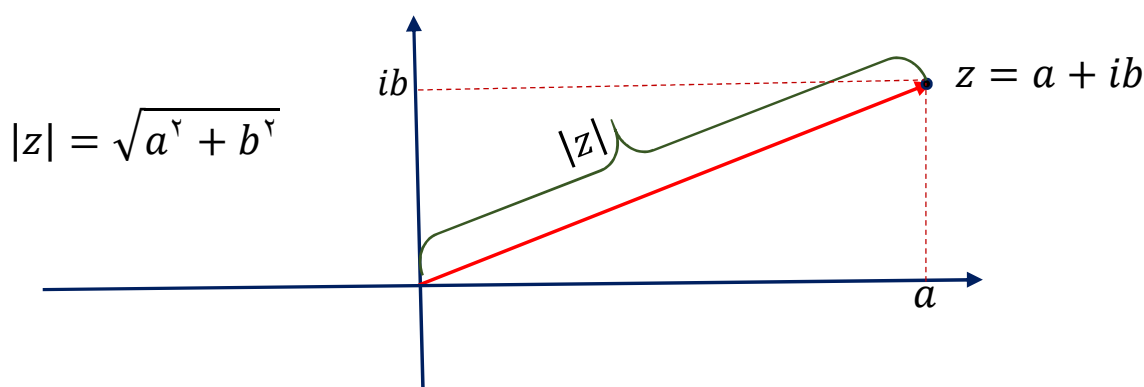


در شکل بالا λ مقدار مثبتی دارد و از ۱ بزرگتر است. اگر λ مثبت و کمتر از ۱ باشد، وضعیت λZ و Z نسبت به هم چگونه است؟ اگر λ منفی باشد، وضعیت λZ و Z نسبت به هم چگونه است؟

طول اعداد مختلط: تا اینجا فقط اعمال جمع و ضرب اعداد حقیقی روی اعداد مختلط توسعه داده شده‌اند، ولی روی اعداد حقیقی اعمال دیگری هم داریم که باید بررسی شود که آیا قابل تعمیم به اعداد مختلط می‌باشند یا نه.

برای مثال، قدر مطلق اعداد حقیقی، عملی است که به هر عدد حقیقی، مقدار یا اندازه آن را نظیر می‌کند. قدر مطلق هر عدد حقیقی یک عدد حقیقی مثبت است و از طریق علامت مثبت یا منفی آن تعیین می‌شود.

آیا قدر مطلق اعداد مختلط نیز قابل تعریف است؟ در اعداد مختلط، مثبت و منفی نداریم و نمی‌توانیم با این روش قدر مطلق اعداد مختلط را تعریف کنیم. اما، اگر از تعبیر قدر مطلق یک عدد به صورت فاصله آن عدد تا مبدأ استفاده کنیم، این مفهوم در اعداد مختلط نیز قابل بکاربردن است. قدر مطلق هر عدد حقیقی برابر است با فاصله آن عدد حقیقی تا مبدأ. در باره اعداد مختلط نیز بنا به تعریف، قدر مطلق هر عدد مختلط برابر است با فاصله آن عدد مختلط تا مبدأ. قدر مطلق عدد مختلط z را با $|z|$ نشان می‌دهیم.



اگر z یک عدد حقیقی باشد، قدر مطلق آن به عنوان عدد مختلط، همان قدر مطلق آن به عنوان یک عدد حقیقی است. اگر z به صورت $z = a + ib$ باشد، روشن است که $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. توجه داشته باشید که قدر مطلق هر عدد مختلط ناصفر، یک عدد حقیقی مثبت است و فقط قدر مطلق صفر، صفر است.

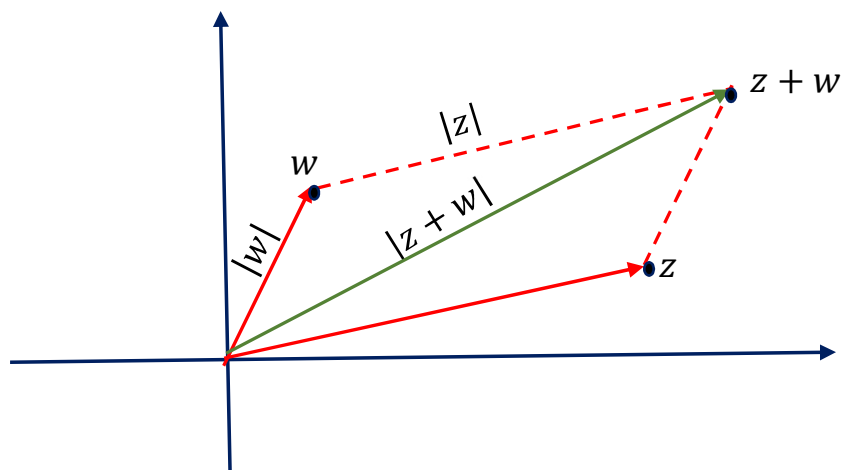
قدر مطلق هر عدد مختلط همان طول بردار متناظر آن عدد است. به همین دلیل قدر مطلق یک عدد مختلط را طول آن عدد نیز می‌نامند. خواص قدر مطلق اعداد مختلط، کاملاً مشابه خواص قدر مطلق در اعداد حقیقی است. سه خاصیت اصلی عمل قدر مطلق به شکل زیر برای هر دو عدد مختلط z و w برقرارند.

$$|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0 \quad (1)$$

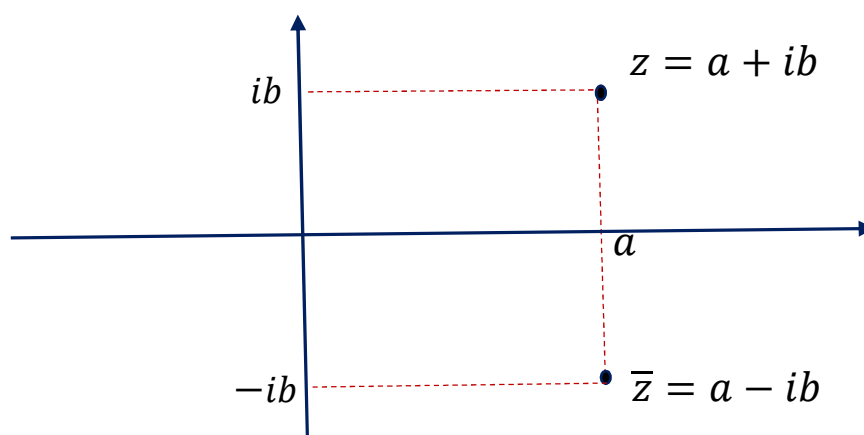
$$|zw| = |z||w| \quad (2)$$

$$|z + w| \leq |z| + |w| \quad (3)$$

خاصیت سوم را نامساوی مثلث می‌نامند، زیرا برقراری این نامساوی دقیقاً معادل با آن است که در هر مثلث طول هر ضلع، کوچکتر از مجموع طول دو ضلع دیگر است.



مزدوج اعداد مختلط: اگر قسمت موهومی یک عدد مختلط را قرینه سازیم، عدد به دست آمده را مزدوج آن عدد مختلط می‌نامند. بنابراین مزدوج عدد مختلط $a + ib$ عدد $a - ib$ است. مزدوج هر عدد مختلط مانند z را با $\bar{z}$ نشان می‌دهند. بنابراین، اگر $z = a + ib$ آنگاه $\bar{z} = a - ib$. از لحاظ هندسی، $\bar{z}$ همان تقارن آینه‌ای z نسبت به محور حقیقی است.



روشن است که دوبار مزدوج‌گیری از یک عدد، مجدداً همان عدد را ایجاد می‌کند، یعنی $\bar{\bar{z}} = z$. عمل مزدوج‌گیری خواص جالب توجه بسیاری دارد که کمک بسیاری به محاسبات با اعداد مختلط می‌کند. در زیر به عنوان مثال، برخی از این خواص آورده شده است.

نکته (۱): آیا ممکن است مزدوج یک عدد مختلط خودش باشد؟

بله، اگر قسمت موهومی یک عدد مختلط صفر باشد، قرینه شدن قسمت موهومی تغییری در عدد مختلط ایجاد نمی‌کند. اعدادی که قسمت موهومی آنها صفر است، همان اعداد حقیقی هستند، پس مزدوج اعداد حقیقی خودشان هستند. این موضوع دو طرفه است و هر عدد مختلطی که برابر مزدوج خودش باشد، عدد حقیقی است. بنابراین: عدد مختلط z یک عدد حقیقی است اگر و فقط اگر $\bar{z} = z$.

نکته (۲): آیا ممکن است مزدوج یک عدد مختلط برابر قرینه خود عدد باشد؟

بله، کافیه قسمت حقیقی عدد مختلط صفر باشد و فقط قسمت موهومی داشته باشد تا با قرینه شدن قسمت موهومی کل عدد قرینه شود. اعدادی که قسمت حقیقی آنها صفر است، اعداد موهومی محض هستند، پس مزدوج اعداد موهومی محض، قرینه آنها است. این موضوع دوطرفه است و اگر مزدوج یک عدد مختلط برابر قرینه آن باشد، حتما موهومی محض است. بنابراین: عدد مختلط z موهومی محض است اگر و فقط اگر $\bar{z} = -z$.

نکته (۳): در اعداد حقیقی، توان دوم هر عدد، همان توان دوم قدرمطلق آن است. اما در اعداد مختلط این مطلب درست نیست. در اعداد مختلط، ضرب هر عدد مختلط در مزدوج آن می‌تواند توان دوم قدرمطلق آن را ایجاد کند. محاسبه زیر نشان می‌دهد که برای هر عدد مختلط $z = a + ib$ داریم $z\bar{z} = |z|^2$.

$$z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$$

نکته (۴): هر عدد مختلط ناصفر وارون دارد و با استفاده از حل دستگاه معادلات در اعداد حقیقی، وارون یک عدد مختلط ناصفر را حساب کردیم. در اینجا به کمک عمل مزدوج گیری راه دیگری را برای محاسبه وارون یک عدد مختلط به دست می‌آوریم. فرض کنید $z = a + ib$ یک عدد مختلط ناصفر باشد، یعنی $|z| \neq 0$.

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} + i \frac{-b}{a^2+b^2}$$

تساوی بالا همچنین نشان می‌دهد که وارون هر عدد مختلط ناصفر همراستا با مزدوج آن است.

نکته (۵): عمل مزدوج گیری و اعمال جمع و ضرب اعداد مختلط به شکلی طبیعی به هم مرتبطاند و روابط زیر برای هر دو عدد مختلط Z و W برقرار است.

$$\overline{Z + W} = \bar{Z} + \bar{W} \quad . \quad \overline{ZW} = \bar{Z} \bar{W}$$

مسائل

(۱) ثابت کنید برای هر عدد مختلط Z داریم:

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \quad . \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

(۲) برای هر عدد مختلط Z ثابت کنید $|\bar{Z}| = |-Z| = |iZ| = |Z|$. وضعیت این اعداد را در صفحه مختلط نسبت به هم مشخص کنید.

(۳) کلیه اعداد مختلطی مانند Z را مشخص کنید که در تساوی $\bar{Z} = iZ$ صدق می کنند و این اعداد را در صفحه مختلط مشخص کنید.

(۴) طول عدد مختلط $Z = (1 + i)(1 + i\sqrt{2}) \cdots (1 + i\sqrt{n})$ را حساب کنید.

(۵) اگر W یک عدد مختلط به طول ۱ باشد، کلیه اعداد مختلطی مانند Z را مشخص کنید که در تساوی $\bar{Z} = WZ$ صدق می کنند و این اعداد را در صفحه مختلط مشخص کنید.

(۶) برای هر عدد مختلط Z ثابت کنید $\operatorname{Re}(z) \leq |z|$.

(۷) تساوی های نکته (۵) را ثابت کنید. به کمک این تساوی ها ثابت کنید $\overline{\left(\frac{Z}{W}\right)} = \frac{\bar{Z}}{\bar{W}}$. به ویژه نتیجه

$$\overline{Z^{-1}} = \bar{Z}^{-1} \quad \text{بگیرید:}$$

(۸) به کمک نکته (۵) تساوی $|zw| = |z||w|$ را ثابت کنید.

(۹) به ازای هر عدد صحیح m ثابت کنید $|z^m| = |z|^m$.

۱۰) نامساوی مثلث ، $|z + w| \leq |z| + |w|$ ، را به کمک نکته (۳) و سایر مطالبی که تا کنون به دست آورده‌اید، ثابت کنید.

۱۱) به کمک نامساوی مثلث، نامساوی زیر را که به نامساوی تفاضل مشهور است، ثابت کنید.

$$|z| - |w| \leq |z - w|$$

۱۲) با استفاده از نکته (۳) ثابت کنید وارون یک عدد مختلط ناصفر برابر مزدوج آن است اگر و فقط اگر آن عدد مختلط طول ۱ داشته باشد. مجموعه اعداد مختلط به طول ۱ را در صفحه مختلط مشخص کنید و وارون هر کدام از آنها را روی شکل مشخص کنید.

۱۳) با استفاده از نکته (۴) وضعیت وارون یک عدد مختلط ناصفر z را نسبت به z و $\bar{z}$ ، در حالات $|z| > 1$ و $|z| = 1$ و $|z| < 1$ مشخص کنید.

۱۴) اگر دو عدد مختلط z و w را به عنوان دو بردار در نظر بگیریم ثابت کنید ضرب داخلی z و w برابر است با $Re(z\bar{w})$. ثابت کنید z و w به عنوان دو بردار بر هم عمودند اگر و فقط اگر $z\bar{w} + \bar{z}w = 0$.
۱۵) اگر c یک عدد حقیقی و w یک عدد مختلط ناصفر داده شده باشند، مکان z هایی را مشخص کنید که در تساوی $Re(wz) = c$ صدق می‌کنند.

۱۶) اگر z و w دو عدد مختلط باشند، $|z - w|$ از لحاظ هندسی چه معنایی دارد؟

۱۷) مجموعه z هایی در صفحه مختلط که در رابطه $|z - i| = 4$ صدق می‌کنند، مشخص کنید.

۱۸) مجموعه z هایی در صفحه مختلط که در رابطه $|z - i| + |z + 2i| = 8$ صدق می‌کنند، مشخص کنید.

۱۹) ثابت کنید عدد مختلط z یک عدد حقیقی است اگر و فقط اگر $|z - i| = |z + i|$.

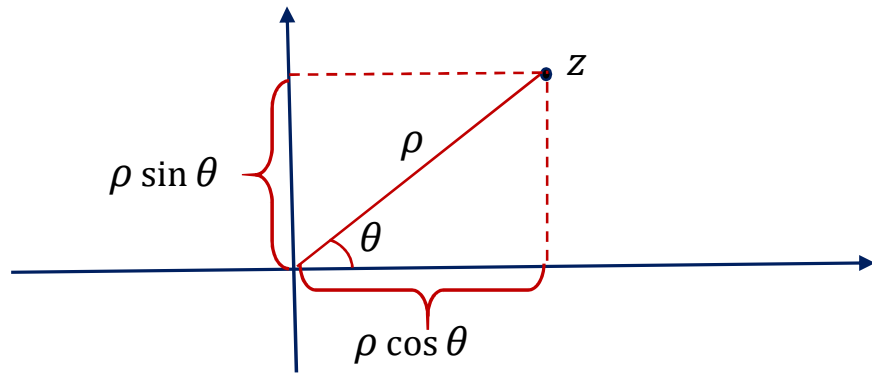
۲۰) ثابت کنید هیچ عدد مختلطی در تساوی $|z| - z = i$ صدق نمی‌کند.

۲۱) مکان اعداد مختلطی که در تساوی $|z + 3i| = 2|z|$ صدق می‌کنند، بیابید.

(۲۲) مکان اعداد مختلطی را بیابید که در نامساوی $1 < \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right)$ صدق می‌کنند.

نمایش قطبی اعداد مختلط و تعبیر هندسی عمل ضرب

هر نقطه از یک صفحه تحلیلی شده را می‌توان از طریق فاصله آن تا مبدأ و زاویه بین پاره خط واصل بین آن نقطه و مبدأ با محور حقیقی مشخص کرد. فاصله نقطه تا مبدأ را با ρ و زاویه را با θ نشان می‌دهیم.



اگر صفحه تحلیلی شده را به عنوان صفحه مختلط در نظر بگیریم زوج (ρ, θ) را مختصات قطبی عدد z می‌نامند. روشن است که در این صورت قسمت‌های حقیقی و موهومی z به ترتیب مقادیر $\rho \cos \theta$ و $\rho \sin \theta$ هستند و داریم:

$$z = \rho \cos \theta + i \rho \sin \theta = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$$

هر عدد مختلط را می‌توان به شکل بالا نوشت و این شیوه نوشتن یک عدد مختلط را **نمایش قطبی** آن عدد می‌نامند. نمایش اعداد مختلط به صورت $z = a + ib$ را نمایش کارترین می‌نامیم.

در نمایش قطبی z ، مقدار ρ همان $|z|$ یعنی طول z است. θ را زاویه یا آرگومان z می‌نامند. مقدار θ به طور یکتا تعیین نمی‌شود و هر مضرب صحیحی از 2π (زاویه را بر حسب رادیان در نظر گرفته‌ایم) را می‌توانیم به آن اضافه یا از آن کم کنیم و باز هم به عنوان زاویه عدد قابل قبول است.

برای عدد صفر داریم $\rho = 0$ ولی زاویه آن را هر مقداری می‌توان در نظر گرفت، زیرا برای هر زاویه θ

$$\text{داریم: } 0 = 0 \times (\cos \theta + i \sin \theta)$$

با داشتن نمایش قطبی یک عدد مختلط به راحتی نمایش کارتزین آن عدد قابل نوشتن است. زیرا،

$$z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta) \Rightarrow z = \rho \cos \theta + i \rho \sin \theta$$

اما با داشتن نمایش کارتزین $z = a + ib$ داریم $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ ، اما تعیین زاویه z کمی مشکلتر است. اگر z موهومی محض نباشد و زاویه آن θ باشد داریم $\tan \theta = \frac{b}{a}$. اگر z در ربع اول یا چهارم باشد می توانیم بنویسیم: $\theta = \tan^{-1} \frac{b}{a}$. اما اگر z در ربع دوم یا سوم باشد می توانیم بنویسیم:

$$\theta = \tan^{-1} \frac{b}{a} + \pi$$

از طریق $\cos \theta$ و $\sin \theta$ نیز می توان مقدار θ را به دست آورد، زیرا

$$\sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} , \cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

البته باز هم باید بدانیم z در کدام ربع واقع شده است.

مثال: نمایش قطبی $z = -1 - i$ را بنویسید.

داریم $\rho = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ و $\tan \theta = \frac{-1}{-1} = 1$. چون z در ربع سوم واقع شده

است، $\theta = \frac{\pi}{4} + \pi$ قابل قبول است. پس: $z = -1 - i = \sqrt{2}(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4})$

مثال: نمایش قطبی اعداد 2 و -3 و i و $1 + i$ و $-1 + \sqrt{3}i$ و $-5i$ را بنویسید.

$$2 = 2(\cos 0 + i \sin 0) \quad . \quad -3 = 3(\cos \pi + i \sin \pi)$$

$$i = 1 \times \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) \quad . \quad 1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$-1 + \sqrt{3}i = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) \quad . \quad -5i = 5 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right)$$

زاویه اعداد حقیقی مثبت می تواند صفر در نظر گرفته شود. زاویه اعداد حقیقی منفی می تواند π در

نظر گرفته شود. زاویه اعداد موهومی محض که قسمت موهومی آنها مثبت است می تواند $\frac{\pi}{2}$ در نظر گرفته

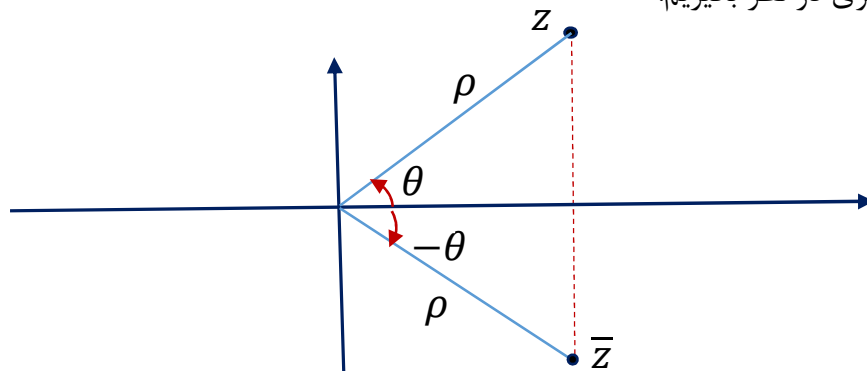
شود. زاویه اعداد موهومی محض که قسمت موهومی آنها منفی است می تواند $\frac{3\pi}{2}$ یا $-\frac{\pi}{2}$ در نظر گرفته

شود.

نکته: نمایش قطبی یک عدد مختلط z با نمایش قطبی مزدوج آن $\bar{z}$ چه رابطه‌ای دارد؟

از وضعیت هندسی این دو عدد در صفحه مختلط می‌توان دید که فاصله آنها تا مبدأ مساوی است و می‌توان حدس زد که هر زاویه‌ای که برای یکی از آنها در نظر بگیریم، می‌توانیم قرینه آن زاویه را برای

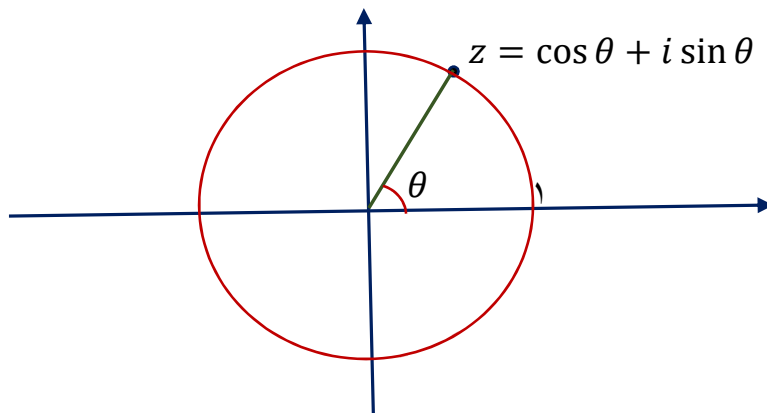
دیگری در نظر بگیریم.



در واقع نمایش قطبی عدد $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ با تبدیل θ به $-\theta$ تبدیل به نمایش قطبی $\bar{z}$ می‌شود.

$$z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta) \Rightarrow \bar{z} = \rho(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))$$

اعداد مختلط به طول ۱، با زاویه خود مشخص می‌شوند و به صورت $z = \cos \theta + i \sin \theta$ نوشته می‌شوند.



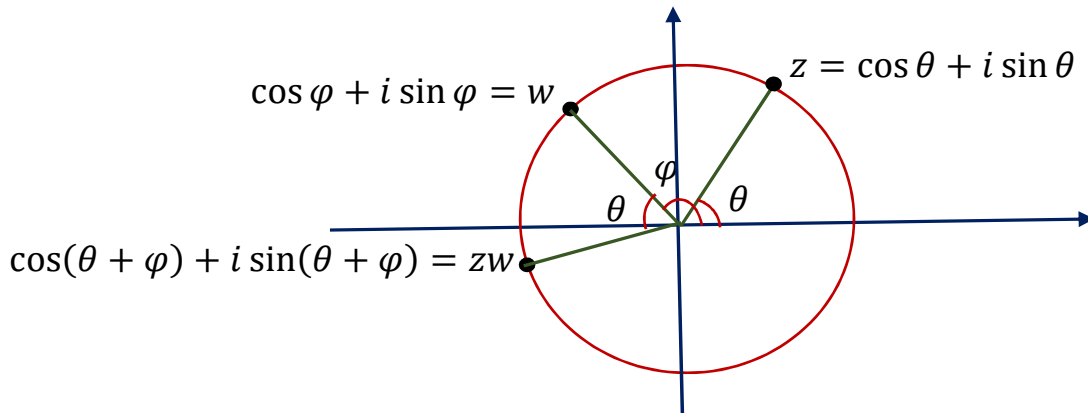
می‌دانیم حاصلضرب دو عدد مختلط به طول ۱ مجدداً عدد مختلطی به طول ۱ است. یک سوال جالب توجه آن است که: زاویه حاصلضرب دو عدد مختلط به طول ۱ بر حسب زاویه دو عددی که در هم ضرب شده‌اند چقدر است؟ یک محاسبه ساده، جواب این سوال را مشخص می‌سازد.

فرض کنید $z = \cos \theta + i \sin \theta$ و $w = \cos \varphi + i \sin \varphi$ دو عدد مختلط به طول ۱ باشند.

$$\begin{aligned}
 zw &= (\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \varphi + i \sin \varphi) \\
 &= \cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi + i(\cos \theta \sin \varphi + \sin \theta \cos \varphi) \\
 &= \cos(\theta + \varphi) + i \sin(\theta + \varphi)
 \end{aligned}$$

محاسبه بالا نشان می‌دهد که: زاویه حاصلضرب دو عدد مختلط به طول ۱ برابر است با مجموع دو زاویه آنها. تعبیر

هندسی این نتیجه آن است که برای ضرب آنها کافی است هر کدام را به اندازه زاویه دیگری دوران دهیم.



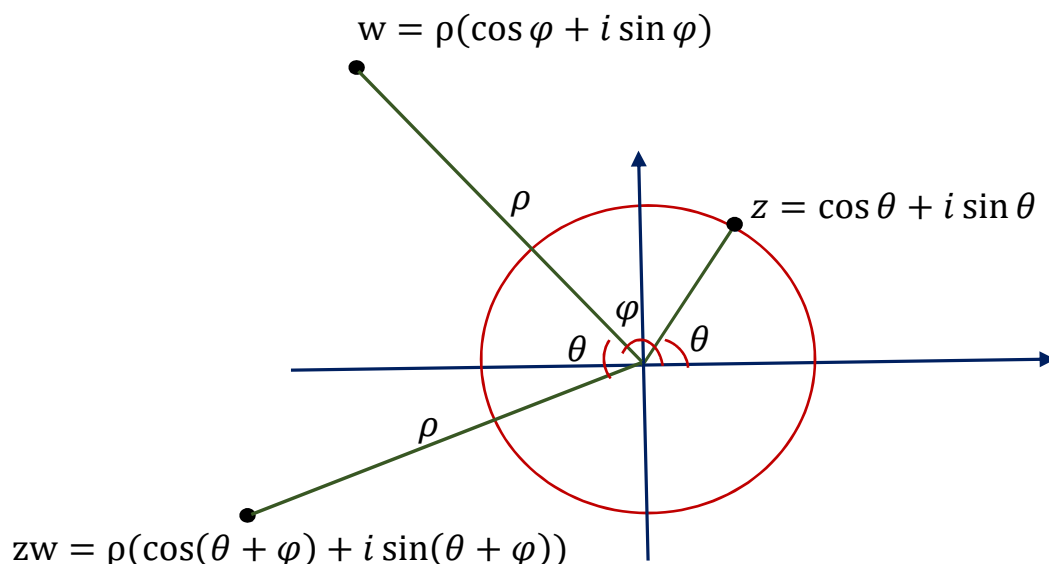
این مشاهده نشان می‌دهد که عمل ضرب اعداد مختلط از لحاظ هندسی، در ارتباط با دوران حول مبدأ است.

فرض کنید $z = \cos \theta + i \sin \theta$ یک عدد مختلط به طول ۱ است و می‌خواهیم ضرب آن را در یک عدد

مختلط دلخواه w با نمایش قطبی $w = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ به دست آوریم.

$$zw = (\cos \theta + i \sin \theta)\rho(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \rho(\cos(\theta + \varphi) + i \sin(\theta + \varphi))$$

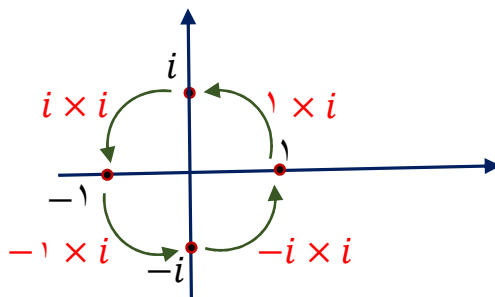
نمایش قطبی zw نشان می‌دهد که zw همان دوران یافته w به اندازه زاویه z است.



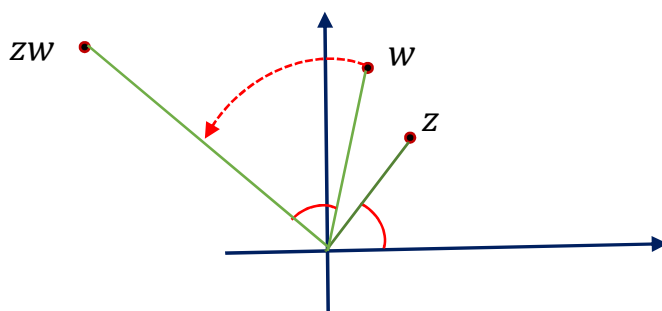
مثال: وضعیت عدد مختلط w و iw نسبت به هم چگونه است؟

i یک عدد مختلط به طول ۱ با زاویه $\frac{\pi}{2}$ است. پس iw همان دوران w به اندازه $\frac{\pi}{2}$ در جهت مثلثاتی است.

در شکل زیر توانهای i به صورت شروع دوران از i و هر بار به اندازه $\frac{\pi}{2}$ نشان داده شده است.



اکنون می‌توانیم تعبیر هندسی ضرب دو عدد مختلط دلخواه را بیابیم. فرض کنید Z یک عدد مختلط دلخواه با نمایش قطبی $Z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ باشد و w عدد مختلط دیگری باشد. محاسبه Zw را می‌توانیم در دو مرحله انجام دهیم. ابتدا ضرب $(\cos \theta + i \sin \theta)w$ را انجام می‌دهیم که حاصل آن از لحاظ هندسی، دوران w به اندازه زاویه θ است، بعد حاصل را در ρ ضرب می‌کنیم که نتیجه آن از لحاظ هندسی تجانس به مرکز مبدأ با ضریب ρ است. نهایتاً مقدار Zw با دوران w به اندازه زاویه Z و سپس تجانس با ضریب طول Z به دست می‌آید.



ترتیب بین دوران و تجانس مهم نیست و می‌توان اول متجانس w را با ضریب طول Z به دست آورد و بعد حاصل را به اندازه زاویه Z دوران داد. همچنین به دلیل خاصیت جابجایی عمل ضرب برای محاسبه Zw می‌توان Z را به اندازه زاویه w دوران داد و متجانس حاصل را با ضریب طول w به دست آورد.

مثال: مقدار $(1 + i)^2$ را از طریق تعبیر هندسی عمل ضرب به دست آورید.

زاویه $1 + i$ برابر $\frac{\pi}{4}$ است و طول آن $\sqrt{2}$ است. چون $1 + i$ در خودش ضرب شده است، به اندازه زاویه خودش دوران می‌کند و روی قسمت مثبت محور موهومی قرار می‌گیرد. طولش نیز در طول خودش ضرب می‌شود و برابر ۲ می‌شود. بنابراین حاصل $(1 + i)^2$ برابر $2i$ است.

به دلیل این ویژگی هندسی ضرب اعداد مختلط، می‌توانیم به ازای هر عدد طبیعی n تساوی زیر را نتیجه بگیریم.

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

این تساوی را فرمول دوموآور می‌نامند. توجه کنید که سمت چپ را می‌توانیم طبق دستور دوجمله‌ای نیوتن نیز بسط دهیم و از این طریق برخی اتحادهای مثلثاتی به دست می‌آیند. برای مثال:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^2 = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta + 2i \sin \theta \cos \theta$$

از طرف دیگر طبق فرمول دوموآور داریم:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^2 = \cos(2\theta) + i \sin(2\theta)$$

بنابراین تساوی‌های زیر برقرارند.

$$\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \quad \sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta$$

تساوی‌های بالا از اتحادهای مشهور مثلثاتی هستند. با محاسبات توانهای دیگر و انواع دیگری از محاسبات روی اعداد مختلط، می‌توان اتحادهای مثلثاتی دیگری نیز به دست آورد.

مثال: اتحادهای مثلثاتی زیر را ثابت کنید.

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(k\theta) = 2^n \cos^n \frac{\theta}{2} \cos \frac{n\theta}{2}$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(k\theta) = 2^n \cos^n \frac{\theta}{2} \sin \frac{n\theta}{2}$$

تساوی‌های بالا اتحادهایی مثلثاتی در اعداد حقیقی هستند و ظاهراً ارتباطی با اعداد مختلط ندارند. اما با توجه به عواملی که در این اتحادها دیده می‌شوند، می‌توان از روی آنها اعداد مختلطی ساخت و روی آنها محاسباتی انجام

داد. هر تساوی در اعداد مختلط معادل دو تساوی در اعداد حقیقی است. پس با به دست آوردن یک تساوی در اعداد مختلط ممکن است بتوانیم هر دو اتحاد را همزمان ثابت کنیم. سمت‌های چپ این تساوی‌ها دو عدد حقیقی هستند و می‌توانند قسمت‌های حقیقی و موهومی یک عدد مختلط را تشکیل دهند. قرار می‌دهیم:

$$A = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(k\theta) \quad . \quad B = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(k\theta)$$

عدد مختلط $Z = A + iB$ را می‌سازیم و آن را محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(k\theta) + i \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(k\theta) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\cos(k\theta) + i \sin(k\theta)) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\cos \theta + i \sin \theta)^k \times 1^{n-k} = (\cos \theta + i \sin \theta + 1)^n \\ &= \left(2 \cos \frac{\theta}{2} + i 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \right)^n = \left(2 \cos \frac{\theta}{2} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right) \right)^n \\ &= 2^n \cos^n \frac{\theta}{2} \left(\cos \frac{n\theta}{2} + i \sin \frac{n\theta}{2} \right) \end{aligned}$$

با مساوی قرار دادن قسمت‌های حقیقی و موهومی طرفین تساوی بالا، دو اتحاد مورد نظر به دست می‌آیند. اعداد مختلط به طول ۱ به صورت $\cos \theta + i \sin \theta$ هستند و در محاسبات بسیار رخ می‌دهند. برای سادگی محاسبات، این اعداد را به طور خلاصه با $e^{i\theta}$ نشان می‌دهیم. این شیوه نمایش دلایلی دارد که در اینجا وارد آن نمی‌شویم. ویژگی‌های اساسی توان رسانی برای آن برقرار است. برای مثال، تساوی‌های زیر برقرارند و در محاسبات قابل استفاده‌اند.

$$e^{i\theta} e^{i\varphi} = e^{i(\theta+\varphi)} \quad . \quad (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

این تساوی‌ها همان قانون ضرب اعداد مختلط به طول ۱ و همان فرمول دوماور هستند.

مسائل

(۱) مقدار $(3 + 3i)^{10}$ را محاسبه کنید.

(۲) ثابت کنید زاویه بین دو عدد مختلط Z و W (یعنی زاویه بین دو پاره خط واصل از مبدأ به Z و W) برابر است با قدرمطلق زاویه $Z\overline{W}$.

(۳) ثابت کنید زاویه بین دو عدد مختلط Z و W قائمه است اگر و فقط اگر $Z\overline{W} + \overline{Z}W = 0$.

(۴) ثابت کنید زاویه بین دو عدد مختلط Z و W قائمه است اگر و فقط اگر $|Z - W| = |Z + W|$. تعبیر هندسی این مسئله را بیان کنید.

(۵) برای هر عدد مختلط ناصفر Z ثابت کنید $\frac{Z}{|Z|} = e^{i\theta}$ که θ زاویه Z است.

(۶) عدد مختلط Z دارای چه ویژگی باید باشد تا به ازای یک عدد طبیعی n ، Z^n یک عدد حقیقی باشد؟

(۷) اگر Z و W دو عدد مختلط باشند، ثابت کنید مساحت مثلث به رئوس 0 و Z و W برابر است با

$$\frac{1}{2} |Im(Z\overline{W})| \cdot \text{مساحت یک مثلث دلخواه با رئوس } Z_1 \text{ و } Z_2 \text{ و } Z_3 \text{ را بر حسب } Z_1 \text{ و } Z_2 \text{ و } Z_3 \text{ بنویسید.}$$

(۸) اگر Z_1 و Z_2 و Z_3 سه عدد مختلط به طول ۱ باشند که $Z_1 + Z_2 + Z_3 = 0$ ثابت کنید:

$$\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} = 0 \quad . \quad Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 = 0$$

(۹) اگر Z_1 و Z_2 و Z_3 سه عدد مختلط به طول ۱ باشند ثابت کنید:

$$|Z_1 + Z_2 + Z_3| = |Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3|$$

(۱۰) آیا فرمول دوموآور برای اعداد صحیح منفی نیز درست است؟

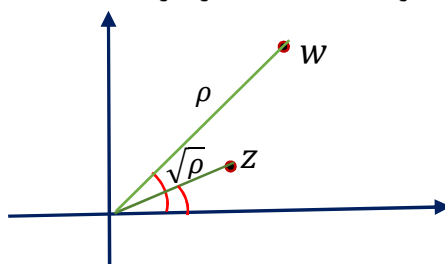
(۱۱) به کمک اعداد مختلط، اتحادهای مثلثاتی زیر را ثابت کنید. $(x \neq 2k\pi)$

$$1 + \cos x + \cdots + \cos nx = \frac{\sin \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}} \cos \frac{nx}{2}$$

$$\sin x + \cdots + \sin nx = \frac{\sin \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}} \sin \frac{nx}{2}$$

ریشه‌های دوم اعداد مختلط

مهمترین دلیل پیدایش اعداد مختلط، یافتن امکان جذرگیری از -1 بود. آیا در $\mathbb{C}$ همه اعداد جذر دارند؟ برای یک عدد مختلط داده شده w ، آیا عدد مختلط z موجود است که $z^2 = w$ ؟ در این حالت، z را یک جذر یا یک ریشه دوم w می‌نامند. با توجه به تعبیر هندسی عمل ضرب و توان رسانی، z آن چنان عددی است که زاویه آن دو برابر می‌شود و برابر زاویه w می‌شود و طول z به توان 2 می‌رسد و برابر طول w می‌شود. بنابراین، اگر $w = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ می‌توانیم z را به صورت $z = \sqrt{\rho} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right)$ انتخاب کنیم. همین مشاهده ساده، نتیجه می‌دهد که هر عدد مختلط جذر دارد.



با استفاده از نماد $e^{i\theta}$ می‌توانیم بگوییم یک جذر عدد $\rho e^{i\theta}$ که ρ یک عدد حقیقی مثبت است، برابر است با

$$\sqrt{\rho} e^{i\frac{\theta}{2}}$$

مثال: یک جذر i را به دست آورید.

می‌توان i به صورت $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ نوشت. پس یک جذر آن برابر است با $e^{i\frac{\pi}{4}}$. توجه داشته باشید که

$$e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

مثال: یک جذر -1 را به دست آورید.

عدد -1 به صورت $-1 = e^{i\pi}$ نوشته می‌شود، پس یک جذر آن برابر است با $e^{i\frac{\pi}{2}}$ که همان i است.

مثال: یک جذر $w = -1 + i$ را بیابید.

ابتدا باید نمایش قطبی w را می‌نویسیم. $w = \sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}}$ پس $z = \sqrt[4]{2} e^{i\frac{3\pi}{8}}$ یک ریشه دوم w است.

به سادگی دیده می‌شود که اگر Z یک ریشه دوم W باشد، آنگاه $-Z$ نیز یک ریشه دوم دیگر W است. می‌توان ثابت کرد که هر عدد مختلط ناصفر دقیقاً دو ریشه دوم دارد که قرینه یکدیگرند. صفر فقط یک ریشه دوم دارد که خودش است. در واقع، قرینه صفر مجدداً صفر است و ریشه دیگر صفر، مجدداً همان صفر است. در اعداد حقیقی تابعی به نام $\sqrt{x}$ تعریف می‌شود که فقط روی اعداد حقیقی مثبت تعریف می‌شود و به هر عدد حقیقی مثبت یا صفر x آن ریشه دوم x را که مثبت یا صفر است نظیر می‌سازد. آیا در اعداد مختلط می‌توان تابع مشابهی را تعریف کرد؟

ریشه‌های دوم یک عدد مختلط Z به صورت دو عدد قرینه یکدیگرند. باید از بین این دو عدد قرینه، یکی را انتخاب کنیم و $\sqrt{Z}$ بنامیم. اگر ریشه‌های دوم Z قسمت حقیقی ناصفر داشته باشند، می‌توانیم آن ریشه دوم را انتخاب کنیم که قسمت حقیقی مثبت داشته باشد. برای مثال اگر $-\pi < \theta < \pi$ داریم:

$$\sqrt{\rho e^{i\theta}} = \sqrt{\rho} e^{i\frac{\theta}{2}}$$

اما، اگر قسمت حقیقی ریشه‌های دوم Z صفر باشند و ریشه‌های دوم، موهومی محض باشند، باید ملاک دیگری برای انتخاب بین دو ریشه در نظر بگیریم. این وضعیت برای اعداد حقیقی منفی رخ می‌دهد که ریشه‌های دوم آنها موهومی محض هستند. در این حالت می‌توان به مثبت یا منفی بودن قسمت موهومی توجه کرد. مثلاً در این حالت که قسمت حقیقی ریشه‌های دوم صفر هستند، آن ریشه دوم را انتخاب می‌کنیم که قسمت موهومی آن مثبت باشد. مثلاً برای -1 که دو ریشه دوم $\pm i$ دارد i را به عنوان $\sqrt{-1}$ انتخاب می‌کنیم. برای صفر نیز تکلیف روشن است چون فقط یک ریشه دوم دارد که خودش است.

به این ترتیب روی اعداد مختلط نیز تابعی با نمادگذاری $\sqrt{Z}$ تعریف کرده‌ایم که $\sqrt{Z}$ یکی از ریشه‌های دوم Z است که با روش بالا انتخاب کرده‌ایم. البته خواص این تابع لزوماً مشابه خواص تابع $\sqrt{x}$ در اعداد حقیقی نیست. مثلاً دامنه تابع $\sqrt{Z}$ تمام $\mathbb{C}$ است و خاصیت $\sqrt{ZW} = \sqrt{Z}\sqrt{W}$ برای همه اعداد مختلط برقرار نیست. بنابراین در بکارگیری این تابع باید دقت کرد و هر گونه خاصیتی را برای آن در نظر نگرفت.

به خاطر وجود ریشه دوم برای همه اعداد مختلط، هر معادله درجه دومی در اعداد مختلط جواب دارد. همان روشی که با آن معادلات درجه دوم حقیقی حل می‌شوند، معادلات درجه دوم مختلط نیز حل می‌شوند. زیرا آن روش مبتنی بر عملیات ضرب و تقسیم و جمع و تفریق اعداد حقیقی است که در اعداد مختلط نیز برقرارند. فرض کنید $Az^2 + Bz + C = 0$ یک معادله درجه دوم مختلط است که A و B و C اعداد مختلط دلخواهی هستند و $A \neq 0$. با مجذور کامل کردن، این معادله به صورت زیر در می‌آید.

$$\left(z + \frac{B}{2A}\right)^2 = \frac{B^2 - 4AC}{4A^2}$$

اگر جذر طرف دوم را حساب کنیم، یکی از جذرهای آن $\frac{\sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$ است. پس دو جواب زیر را برای z به دست می‌آوریم:

$$z = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

مثال: جواب‌های معادله $z^2 - z + 1 + i = 0$ را به دست آورید.

ابتدا مقدار $B^2 - 4AC$ را محاسبه می‌کنیم.

$$B^2 - 4AC = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (1 + i) = -3 - 4i = \sqrt{5} e^{i\theta} \quad \cos \theta = \frac{-3}{\sqrt{5}} \quad -\pi < \theta < 0$$

بنابراین $\sqrt{B^2 - 4AC} = \sqrt{5} e^{i\frac{\theta}{2}}$. برای یافتن قسمت‌های حقیقی و موهومی این عدد، لازم است $\cos \frac{\theta}{2}$ و

$\sin \frac{\theta}{2}$ را حساب کنیم.

با توجه به محدوده θ داریم:

$$\begin{aligned} \cos^2 \frac{\theta}{2} &= \frac{1 + \cos \theta}{2} = \frac{1 - \frac{3}{\sqrt{5}}}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos \frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} \\ \sin^2 \frac{\theta}{2} &= \frac{1 - \cos \theta}{2} = \frac{1 + \frac{3}{\sqrt{5}}}{2} = \frac{4}{5} \Rightarrow \sin \frac{\theta}{2} = -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

بنابراین،

$$\sqrt{B^2 - 4AC} = \sqrt{5} e^{i\frac{\theta}{2}} = \sqrt{5} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right) = \sqrt{5} \left(\frac{\sqrt{5}}{2} - i \frac{2}{\sqrt{5}} \right) = 5 - 2i$$

به این ترتیب جواب‌های معادله $z^2 - z + 1 + i = 0$ عبارتند از:

$$z = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{1 \pm (1 - 2i)}{2} = 1 - i, i$$

مسائل

(۱) ریشه‌های دوم $1 + i\sqrt{3}$ را به دست آورید.

(۲) ریشه‌های دوم $-i$ را به دست آورید.

(۳) جواب‌های معادله $z^2 - (4 + i)z + 5 - i = 0$ را به دست آورید.

(۴) جواب‌های معادله $z^4 = 2iz^2 + 2$ را به دست آورید. این معادله چند جواب دارد؟

(۵) دو عدد مختلط z و w ارائه کنید که $\sqrt{zw} \neq \sqrt{z}\sqrt{w}$ و دو عدد مختلط z و w ارائه کنید که

$$\sqrt{zw} = \sqrt{z}\sqrt{w}.$$

(۶) مقدارهای زیر را به دست آورید.

$$\sqrt{9e^{i\frac{5\pi}{4}}} \cdot \sqrt{12e^{-5i\pi}}$$

(۷) در معادله درجه دوم $Az^2 + Bz + C = 0$ ، اگر ضرایب A و B و C عدد حقیقی باشند و z یک

جواب آن باشد، آنگاه $\bar{z}$ نیز یک جواب آن است. اگر این معادله جواب حقیقی نداشته باشد، جواب‌های

آن به صورت دو عدد مختلط ناصفر z و $\bar{z}$ است که $B = 2\operatorname{Re}(z)$ و $C = |z|^2$.

(۸) اگر α و β جواب‌های معادله $z^2 - 2z + 4 = 0$ باشند، به ازای هر عدد طبیعی n مقادیر زیر را

محاسبه کنید.

$$\alpha^n + \alpha^{-n} \cdot \beta^n + \beta^{-n} \cdot \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n$$

(۹) اگر z_1 و z_2 و z_3 رئوس یک مثلث باشند، ثابت کنید این مثلث متساوی‌الاضلاع است اگر و فقط اگر

$$(z_1 - z_2)^2 + (z_2 - z_3)^2 + (z_3 - z_1)^2 = 0.$$

ریشه‌های مراتب بالاتر در اعداد مختلط

تعریف ریشه‌های مراتب بالاتر در اعداد مختلط مانند تعریف ریشه‌گیری در اعداد حقیقی است. برای یک عدد

مختلط Z و عدد طبیعی n ، گوییم w یک ریشه n ام Z است، هرگاه $w^n = Z$.

برای مثال داریم $i^3 = -i$ ، پس i یک ریشه سوم $-i$ است. همچنین داریم $i^4 = 1$ ، پس i یک ریشه چهارم

۱ است. همچنین صفر فقط یک ریشه n ام دارد که همان صفر است (چرا؟).

آیا هر عدد مختلط، ریشه n ام دارد؟ اگر $w = \rho_1 e^{i\varphi}$ بخواهد ریشه n ام $Z = \rho e^{i\theta}$ باشد، باید داشته باشیم:

$$\rho e^{i\theta} = (\rho_1 e^{i\varphi})^n = \rho_1^n e^{in\varphi}$$

پس به ازای $\varphi = \frac{\theta}{n}$ و $\rho_1 = \sqrt[n]{\rho}$ ، w یک ریشه n ام Z است.

این مشاهده ساده نشان می‌دهد که هر عدد مختلط $\rho e^{i\theta}$ به ازای هر عدد طبیعی n حداقل یک ریشه n ام دارد،

و $\sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta}{n}}$ یک ریشه n ام آن است. در مورد ریشه‌های دوم یک عدد مختلط دیدیم که هر عدد مختلط ناصفر

دقیقا دو ریشه دوم دارد. تعداد ریشه‌های n ام اعداد مختلط ناصفر چند تا است و چگونه به دست می‌آیند؟

می‌دانیم که به ازای هر عدد صحیح k داریم $Z = \rho e^{i\theta} = \rho e^{i(\theta + 2k\pi)}$. پس اعداد $\sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$ نیز

همچنان ریشه n ام Z هستند. با این روش چند ریشه n ام برای Z می‌توان به دست آورد؟

به ازای $k = 0, 1, \dots, n-1$ اعدادی با زاویه‌های مختلف ساخته می‌شوند که با هم متمایزند، پس حداقل n ریشه

n ام برای Z به دست می‌آید. می‌توان ثابت کرد تمام ریشه‌های n ام Z همین‌ها هستند.

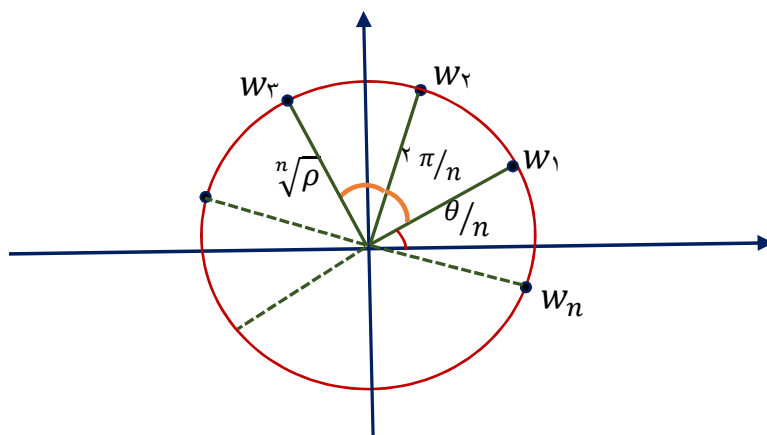
پس، هر عدد مختلط ناصفر $Z = \rho e^{i\theta}$ دارای n ریشه n ام است که عبارتند از:

$$w_1 = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta}{n}} \quad w_2 = \sqrt[n]{\rho} e^{i\left(\frac{\theta + 2\pi}{n}\right)} \quad \dots \quad w_n = \sqrt[n]{\rho} e^{i\left(\frac{\theta + 2(n-1)\pi}{n}\right)}$$

مقدارهای بالا را می‌توانیم به شکل زیر بنویسیم.

$$w_1 = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta}{n}} \quad w_2 = \sqrt[n]{\rho} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}\right)} \quad \dots \quad w_n = \sqrt[n]{\rho} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + (n-1)\frac{2\pi}{n}\right)}$$

تمام این ریشه‌ها طول یکسان $\sqrt[n]{\rho}$ دارند و روی یک دایره به مرکز مبدأ به شعاع $\sqrt[n]{\rho}$ قرار دارند.

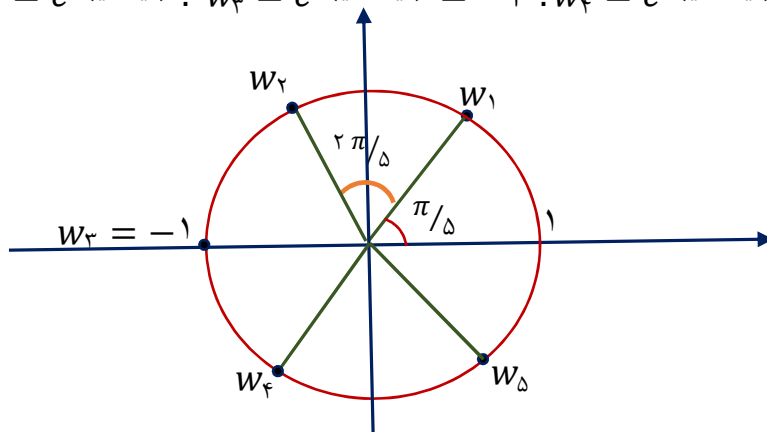


ریشه‌های n ام یک عدد مختلط ناصفر z رئوس یک n ضلعی منتظم را تشکیل می‌دهند که شعاع دایره محیطی آن $\sqrt[n]{|z|}$ است.

مثال: ریشه‌های پنجم -1 را به دست آورید.

داریم $-1 = e^{i\pi}$ ، پس ریشه‌های پنجم -1 عبارتند از:

$$w_1 = e^{i\frac{\pi}{5}} \cdot w_2 = e^{i(\frac{\pi}{5} + \frac{2\pi}{5})} \cdot w_3 = e^{i(\frac{\pi}{5} + \frac{4\pi}{5})} = -1 \cdot w_4 = e^{i(\frac{\pi}{5} + \frac{6\pi}{5})} \cdot w_5 = e^{i(\frac{\pi}{5} + \frac{8\pi}{5})}$$

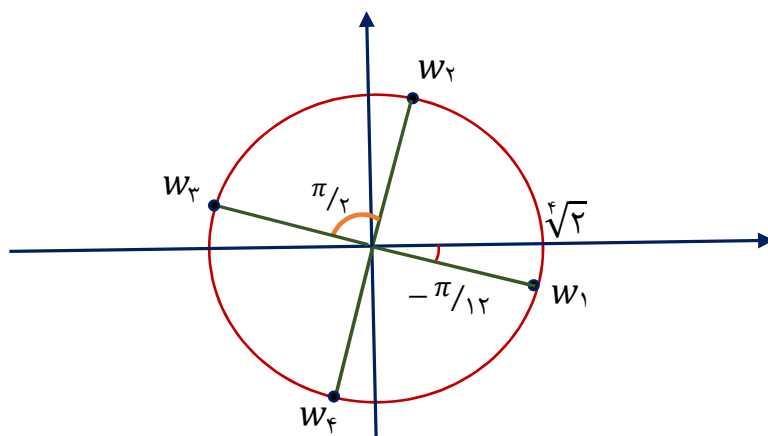


مثال: ریشه‌های چهارم $1 - i\sqrt{3}$ را به دست آورید.

$$1 - i\sqrt{3} = 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right) = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

بنابراین ریشه‌های چهارم آن به شکل زیرند.

$$w_1 = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{-\pi}{12}} \cdot w_2 = \sqrt[4]{2}e^{i(\frac{-\pi}{12} + \frac{\pi}{2})} \cdot w_3 = \sqrt[4]{2}e^{i(\frac{-\pi}{12} + \frac{2\pi}{2})} \cdot w_4 = \sqrt[4]{2}e^{i(\frac{-\pi}{12} + \frac{3\pi}{2})}$$



ریشه‌های n ام واحد: از آنجا که هر عدد مختلط ناصفر n ریشه n ام دارد، عدد ۱ نیز n ریشه n ام دارد که خواص جالب توجهی دارند و آنها را ریشه‌های n ام واحد می‌نامند. اگر ریشه‌های n ام واحد را $\omega_1, \dots, \omega_n$ بنامیم داریم:

$$\omega_k = e^{i \frac{k\pi}{n}} \quad k = 1, \dots, n$$

خود ۱ نیز ریشه n ام خود است و با شماره‌بندی بالا، $\omega_n = 1$.

مثال: ریشه‌های چهارم واحد عبارتند از ± 1 و $\pm i$.

با توجه به شکل کلی ریشه‌های n ام یک عدد مختلط Z مشاهده می‌کنیم که اگر w یکی از ریشه‌های n ام Z باشد، تمام ریشه‌های n ام Z به صورت زیر هستند.

$$\omega_1 w, \omega_2 w, \dots, \omega_n w$$

مثال: تمام ریشه‌های دهم $Z = ve^{i\pi/6}$ را به دست آورید.

یکی از ریشه‌های دهم Z برابر است با $\sqrt[10]{v}e^{i\pi/6}$. ریشه‌های دهم واحد نیز عبارتند از $e^{ik\pi/10}$ ($k = 1, \dots, 10$).

پس، همه ریشه‌های دهم Z عبارتند از: $\sqrt[10]{v}e^{i\pi/6}e^{ik\pi/10}$ ($k = 1, \dots, 10$).

مثال: جواب‌های معادله $(1 - z)^3 = (1 + z)^3$ را بیابید.

اگر طرفین را بسط دهیم یک معادله درجه ۳ به دست می‌آید که حل آن مشکل است. اما، می‌توانیم با تقسیم

طرفین بر عامل $(1-z)^3$ به یک معادله بهتر برسیم. البته در انجام عمل تقسیم باید مطمئن باشیم عامل $(1-z)^3$ صفر نیست. این عامل به ازای $z=1$ صفر است و به سادگی دیده می‌شود $z=1$ جوابی از این معادله نیست. معادله جدید به شکل زیر است.

$$\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^3 = 1$$

شرط لازم کافی برای آن که z یک جواب این معادله باشد آن است که $\frac{1+z}{1-z}$ یک ریشه سوم واحد باشد. پس

باید معادلات $\frac{1+z}{1-z} = \omega_k = e^{ik\frac{2\pi}{3}}$ را به ازای $k=1,2,3$ حل کنیم. این معادلات درجه ۱ هستند و به

آسانی با طرفین وسطین حل می‌شوند. جواب‌های این معادلات عبارتند از: $(k=1,2,3) \quad z = \frac{\omega_k - 1}{\omega_k + 1}$.

مثال: اگر $\omega_1, \dots, \omega_n$ ریشه‌های n ام واحد باشند ثابت کنید $\omega_1 + \dots + \omega_n = 0$.

برای حالت n زوج این مطلب بدیهی است، زیرا در این حالت، هر عددی ریشه n ام واحد باشد، قرینه آن نیز ریشه n ام واحد است. پس، در جمع کردن ریشه‌های n ام واحد، دو به دو، جمع آنها صفر است. ولی برای n فرد استدلال دیگری لازم است.

یکی از نکات قابل توجه در مورد ریشه‌های n ام واحد آن است که اگر $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ آنگاه بقیه ریشه‌های n ام واحد به صورت توان‌های ω است (چرا؟). یعنی ریشه‌های n ام واحد عبارتند از $\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^n$. بنابراین:

$$\omega_1 + \dots + \omega_n = \omega + \omega^2 + \dots + \omega^n = \omega \frac{1-\omega^n}{1-\omega} = \omega \frac{1-1}{1-\omega} = 0$$

استدلال بالا به ازای هر مقدار n درست است و نیازی به تفکیک حالت زوج و فرد برای n نداریم.

نکته: یکی از ویژگی‌های مهم اعداد مختلط آن است که هر معادله چندجمله‌ای در آن، دارای جواب است. یعنی معادلات به صورت $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$ که در آن $a_n, \dots, a_0$ اعداد مختلط داده شده‌ای هستند دارای جواب است. از این نکته می‌توان نتیجه گرفت هر معادله درجه n در اعداد مختلط دارای n جواب است که البته برخی جواب‌ها ممکن است تکراری باشند.

برای مثال معادله $z^n = 1$ دارای n جواب متمایز است که همان ریشه‌های n ام واحد هستند. اما معادله $z^n = 0$ فقط دارای جواب صفر است که صفر n بار تکرار شده است. به کمک تقسیم چندجمله‌ای می‌توان نتیجه گرفت که برای هر چندجمله‌ای $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a$ اعداد $z_1, \dots, z_n$ موجودند که $P(z) = a_n (z - z_1) \dots (z - z_n)$. اعداد $z_1, \dots, z_n$ همان جواب‌های معادله $P(z) = 0$ هستند که ریشه‌های چندجمله‌ای $P(z)$ نامیده می‌شوند. اصطلاح **ریشه** مخصوص چندجمله‌ای‌ها است و برای معادلات از اصطلاح **جواب** استفاده می‌شود.

مسائل

- (۱) جواب‌های معادله $i z^6 + 2 z^3 - 2 i = 0$ را به دست آورید.
- (۲) تمام جواب‌های معادله $z^3 + z^5 + z^7 + z^9 = z^4 + z^6 + z^8$ را به دست آورید.
- (۳) تمام جواب‌های معادله $(1 + iz)^n = i(i + z)^n$ را به دست آورید.
- (۴) با استفاده از تعریف ریشه n ام اعداد مختلط، بدون رجوع به فرمول ریشه n ام، ثابت کنید که اگر w یک ریشه n ام، z باشد و $\omega_1, \dots, \omega_n$ ریشه‌های n ام واحد باشند، آنگاه همه ریشه‌های n ام، z عبارتند از: $\omega_1 w, \omega_2 w, \dots, \omega_n w$
- اگر $P(z)$ یک چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی باشد، ثابت کنید $\overline{P(z)} = P(\overline{z})$. نتیجه بگیرید که اگر w یک ریشه $P(z)$ باشد، $\overline{w}$ نیز یک ریشه $P(z)$ است.
- (۵) ثابت کنید که هر چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی را می‌توان به حاصلضربی از چندجمله‌ای‌های حقیقی از درجه ۲ و ۱ تجزیه کرد.
- (۶) چندجمله‌ای $x^8 - 1$ را به حاصلضرب چندجمله‌ای‌های حقیقی درجه ۱ و ۲ تجزیه کنید.
- (۷) اگر ω یک ریشه n ام واحد باشد و $\omega \neq 1$ ، تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

$$1 + \omega + \omega^2 + \dots + \omega^{n-1} = 0$$

$$1 + 2\omega + 3\omega^2 + \dots + n\omega^{n-1} = \frac{n}{\omega-1}$$

(۸) در یک پنج ضلعی منتظم به ضلع a و قطر b ثابت کنید:

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} = 3$$

اندازه‌گیری با اعداد مختلط

کاربرد اعداد مختلط برای اندازه‌گیری کمیت‌های فیزیکی، همانند کاربرد اعداد حقیقی است. از آنجا که اعداد مختلط با یک زوج از اعداد حقیقی مشخص می‌شوند، هر جا که کمیتی با دو عدد حقیقی مشخص شود، می‌توان گفت آن کمیت با اعداد مختلط قابل اندازه‌گیری است.

در واقع اعداد مختلط ماهیتی برداری دارند و همانند برداری در صفحه هستند. بنابراین تمام کمیت‌های که به صورت برداری در صفحه هستند با یک عدد مختلط نشان داده می‌شوند. این مطلب باعث می‌شود که تمام مسائلی که در صفحه طرح می‌شوند از طریق اعداد مختلط قابل پیگیری باشند.

نمونه دیگر آن در الکترونیک است که با ولتاژها و جریان‌های متناوب سر و کار دارند. در این زمینه تابعی به صورت $f(t) = A \sin(\omega t + \theta)$ حضور دارند که با دو عدد A و θ مشخص می‌شوند (مقدار ω ثابت فرض می‌شود). این دو عدد می‌توانند نمایش قطبی یک عدد مختلط را نشان دهند و هر چنین تابعی با یک عدد مختلط به صورت $Ae^{i\theta}$ معادل است، یعنی چنین تابعی یک عدد مختلط معین می‌کند و هر عدد مختلطی چنین تابعی را معین می‌کند. البته روابط بین کمیت‌هایی که با اعداد مختلط نمایش داده می‌شوند باید با عملیات جبری بین اعداد مختلط سازگار باشند تا چنین اندازه‌گیری‌هایی مفید باشند و اعداد مختلط محاسبات بین این کمیت‌ها را آسان سازد. در الکترونیک مقاومت‌های الکتریکی و خازن و سلف نیز با اعداد مختلط قابل اندازه‌گیری هستند و روابط بین ولتاژ و جریان‌های متناوب و تاثیرات سلف و خازن و مقاومت با روابط جبری بین اعداد مختلط قابل بیان است. به همین دلیل اندازه‌گیری با اعداد مختلط در الکترونیک محاسبات را بسیار آسان می‌سازد.