جزوه مبحث حد و پیوستگی

درس : ریاضی عمومی 1

تنظیم : محمد رنجبر

حـدهــای $\frac{0}{0}$:

قانون هورنر : برای تجزیه‌ی چند جمله‌ای هایی که درجه‌ی آن‌ها بیشتر از درجه 2 هستند، یا به طور کلی در تجزیه آن‌ها مشکل دارید، بهتر است از « **قانون هورنر** » استفاده کنید.

مثـــال 1 : x^3+4x-5 را تجزیه کنید.

پاسخ : چون $x=1$، عبارت را صفر می‌کند پس یک عامل $x-1$ می‌باشد. برای پیدا کردن عامل‌های دیگر به صورت زیر عمل می‌کنیم :

ضرایب درجه 3	۱	۰	۴	−۵
ریشهٔ عبارت ۱⇐	۰	۱	۱	۵
ضرایب درجه 2	۱	۱	۵	۰

$$x^3+4x-5=(x-1)(x^2+x+5)$$

مثـــال 2 : عبارت x^3-2x^2+3 را تجزیه کنید.

پاسخ : چون $x=-1$، عبارت را صفر می‌کند، پس یک عامل آن $x+1$ می‌باشد.

ضرایب درجه 3	۱	−۲	۰	۳
ریشهٔ عبارت −۱⇐	۰	−۱	۳	−۳
ضرایب درجه 2	۱	−۳	۳	۰

$$x^3-2x^2+3=(x+1)(x^2-3x+3)$$

حـــدهـــای $\frac{0}{0}$: (قسمت اول)

اگر صورت و مخرج چندجمله‌ای بود، باید عامل صفر کننده را به روش تجزیه از بین ببریم.

مثـــال 3 : حاصل حد مقابل را بدست آورید.

$$\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{x^3-2x^2+3}=?$$

پاسخ : $\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{x^3-2x^2+3}=\lim_{x\to -1}\frac{\cancel{x+1}}{\cancel{(x+1)}(x^2-3x+3)}=\lim_{x\to -1}\frac{1}{x^2-3x+3}=\frac{1}{7}$

مثـــال 4 : حاصل حد $\lim_{x\to 1}\frac{x^3+2x^2-3}{x^2-1}$ را بدست آورید.

پاسخ : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+2x^2-3}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+3)}{\cancel{(x-1)}(x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x+3}{x+1}=\dfrac{5}{2}$

مثـال 5 : حاصل هر یک از حدهای زیر را بدست آورید.

الف) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{4x^3+3x^2-3x+14}{x^2-4}=?$

پاسخ : ابتدا $4x^3+3x^2-3x+14$ را تجزیه می‌کنیم :

می‌دانیم $x=-2$ ریشه این عبارت است بنابراین به روش هورنر آن را تجزیه می‌کنیم :

ضرایب درجه 3	۴	۳	-3	۱۴
ریشهٔ عبارت $-2 \Leftarrow$	۰	-8	۱۰	-14
ضرایب درجه 2	۴	-5	۷	۰

$$4x^3+3x^2-3x+14=(x+2)(4x^2-5x+7)$$

$$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{4x^3+3x^2-3x+14}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\cancel{(x+2)}(4x^2-5x+7)}{\cancel{(x+2)}(x-2)}=-\dfrac{33}{4}$$

حـدهـای $\frac{0}{0}$: (قسمت دوم)

یادآوری 1: $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$: اتحـاد مـزدوج

یادآوری 2: $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$: اتحـاد چاق و لاغـر

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

نکتـه : حدهایی که در صورت و مخرج آن‌ها عبارت رادیکالی با فرجه 2 و 3 باشد به ترتیب از اتحاد مزدوج و چاق و لاغر استفاده می‌کنیم.

مثـال 6 : حاصل حدهای زیر را بدست آورید.

الف) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}=?$

پاسخ : $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}\times\frac{\sqrt{x+4}+2}{\sqrt{x+4}+2}=\lim_{x\to 0}\frac{(x+4)-4}{x(\sqrt{x+4}+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(\sqrt{x+4}+2)}=\frac{1}{4}$

ب) $\lim_{x\to 5}\frac{2-\sqrt{x-1}}{\sqrt{2x-1}-3}=?$

پاسخ : $\lim_{x\to 5}\frac{2-\sqrt{x-1}}{\sqrt{2x-1}-3}=\lim_{x\to 5}\frac{2-\sqrt{x-1}}{\sqrt{2x-1}-3}\times\frac{2+\sqrt{x-1}}{2+\sqrt{x-1}}\times\frac{\sqrt{2x-1}+3}{\sqrt{2x-1}+3}$

$$\lim_{x\to 5}\frac{\left(4-(x-1)\right)(\sqrt{2x-1}+3)}{(2+\sqrt{x-1})(2x-1-9)}=\lim_{x\to 5}\frac{(5-x)(\sqrt{2x-1}+3)}{(2+\sqrt{x-1})(2x-10)}=\lim_{x\to 5}\frac{-\cancel{(x-5)}(\sqrt{2x-1}+3)}{(2+\sqrt{x-1})\times 2\times\cancel{(x-5)}}=-\frac{6}{8}=-\frac{3}{4}$$

مثال 7 : حاصل حد $\lim_{x\to 8}\frac{x^2-64}{\sqrt[3]{x}-2}$ را بدست آورید.

$$\lim_{x\to 8}\frac{x^2-64}{\sqrt[3]{x}-2}=\lim_{x\to 8}\frac{(x-8)(x+8)(\sqrt[3]{x^2}+2x+4)}{(\sqrt[3]{x}-2)(\sqrt[3]{x^2}+2x+4)}=\lim_{x\to 8}\frac{\cancel{(x-8)}(x+8)(\sqrt[3]{x^2}+2x+4)}{\cancel{x-8}}=\frac{16\times 24}{1}=384$$

نکته : وقتی $x\to 0$، آن‌گاه حد هر چندجمله‌ای با حد یک جمله‌ای با کم‌ترین توان برابر است.

مثال 8 : حاصل $\lim_{x\to 0}\frac{x^3+2x}{x^2-4x}$ کدام است؟

1) 1 2) -1 3) $-\frac{1}{2}$ 4) صفر

پاسخ : روش تستی :

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3+2x}{x^2-4x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cancel{x}}{-4\cancel{x}}=-\frac{1}{2}$$

روشی تشریحی :

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3+2x}{x^2-4x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}(x^2+2)}{\cancel{x}(x-4)}=\frac{2}{-4}=-\frac{1}{2}$$

گزینه 3 صحیح است .

نکتــه : در برخی موارد برای رفع ابهام و محاسبه‌ی $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ با تغییر متغیر $x-a=t$ می‌توان مسئله را راحت‌تر حل کرد.

مثــال 9 : حاصل حد زیر را به‌دست آورید.

$$\lim_{x\to -۱}\frac{(x+۱)^۲+(x+۱)^۴}{۵(x+۱)^۲+(x+۱)^۳}=?$$

پاسخ : $x+۱=t$ داریم :

$$\lim_{t\to ۰}\frac{t^۲+t^۴}{۵t^۲+t^۳}\ \underset{\text{نکته قبل}}{\overset{\text{استفاده از}}{=\!=\!=}}\ \lim_{t\to ۰}\frac{\cancel{t^۲}}{۵\cancel{t^۲}}=\frac{۱}{۵}$$

حــدهــای $\frac{۰}{۰}$: (قسمت سوم)

حد توابع قدرمطلقی :

نکتــه : در حد توابع شامل قدرمطلق، اگر حاصل حد به صورت $\frac{۰}{۰}$ در آید ابتدا با تعیین علامت عبارت داخل قدرمطلق آن را بدون قدرمطلق می‌نویسیم و ادامه‌ی حد را با توجه به مباحث قبلی گفته شده محاسبه می‌کنیم.

مثــال 10 : حاصل حدهای زیر را بدست آورید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{|x|}{x}=?$

پاسخ : $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{|x|}{x}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۰^+}\frac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to ۰^+}\frac{x}{x}=۱\\ \lim\limits_{x\to ۰^-}\frac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to ۰^-}\frac{-x}{x}=-۱\end{cases}$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{|x|}{x}=$ وجود ندارد

ب) $\lim\limits_{x\to ۱^+}\frac{|x^۲+۳x-۴|}{x^۲-x}=?$

پاسخ : ابتدا باید عبارت $x^۲+۳x-۴$ را تعیین علامت کنیم :

$$x^۲+۳x-۴=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۱\\x=-۴\end{cases}$$

	-۴		۱	
+	۰	−	۰	+

عبارت به ازای x های بزرگتر از 1 مثبت است.

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{|x^2+3x-4|}{x^2-x}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+3x-4}{x^2-x}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\cancel{(x-1)}(x+4)}{x\cancel{(x-1)}}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x+4}{x}=\frac{5}{1}=5$$

📖 **مثـال 11 :** حاصل $\lim_{x\to 1^-}\frac{2x^2-5x+3}{\sqrt{x^2-2x+1}}$ کدام است؟

1) -1 2) -2 3) 2 4) 1

پاسخ : $\sqrt{x^2-2x+1}=\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|\xrightarrow{x\to 1^-\Rightarrow x<1}x-1<0$

در نتیجه : $|x-1|=-(x-1)$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{2x^2-5x+3}{-(x-1)}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\cancel{(x-1)}(2x-3)}{-\cancel{(x-1)}}=\frac{-1}{-1}=1$$

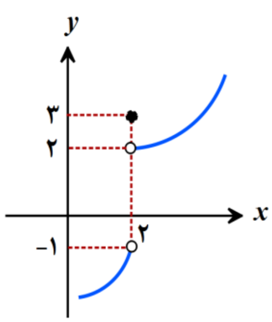
گزینه 4 صحیح است.

حد تابع از روی نمودار :

📖 **مثـال 12 :** شکل مقابل نمودار تابع f است، حاصل عبارت زیر کدام گزینه است؟

$$\lim_{x\to 2^+}f(x)+\lim_{x\to 2^-}f(x)+f(2)=?$$

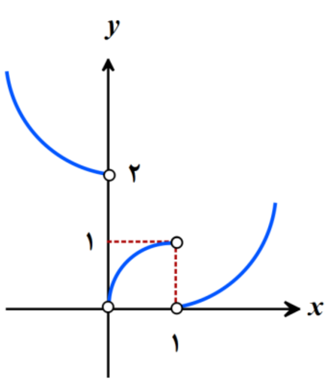
1) -2 2) 2 3) صفر 4) 4



پاسخ : گزینه 4 صحیح است.

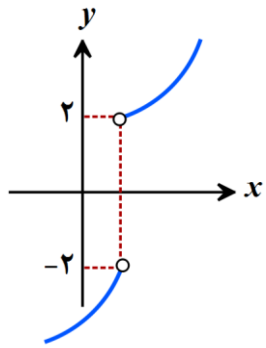
📖 **مثـال 13 :** اگر نمودار تابع $f(x)$ به صورت زیر باشد، حاصل $\lim_{x\to 0^+}f(1-2x)$ کدام است؟

1) صفر 2) 1 3) 2 4) 3



پاسخ : $x\to 0^+\Rightarrow x>0\Rightarrow -2x<0\Rightarrow 1-2x<1\Rightarrow \lim_{A\to 1^-}f(A)=1$

گزینه 2 صحیح است.

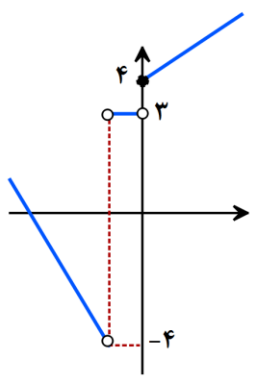


📖 **مثـــال 14 :** با توجه به شکل زیر $\lim\limits_{x \to 1^+} f(\frac{1}{x})$ کدام است؟

1) صفر   2) -2 3) 2   4) موجود نیست

پاسخ : $x \to 1^+ \Rightarrow x > 1 \Rightarrow \frac{1}{x} < 1 \Rightarrow \lim\limits_{A \to 1^-} f(A) = -2$

گزینه 2 صحیح است.



📖 **مثـــال 15 :** با توجه به نمودار تابع f، حاصل $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x^2) + \lim\limits_{x \to (-2)^-} f(4 - x^2)$ کدام است؟

1) صفر   2) 7   3) -1 4) 8

پاسخ : وقتی $x \to 0^- \Leftarrow x^2 \to 0^+$ پس داریم : $\lim\limits_{x^2 \to 0^+} f(x^2) = 4$

وقتی $x \to (-2)^-$ یعنی $x < -2$ پس $x^2 > 4$ پس $4 - x^2 < 0$ بنابراین :

$$\lim_{4 - x^2 \to 0^-} f(4 - x^2) = 3$$

که جواب : 7= 4+3 و گزینه 2 صحیح است.

محاسبهٔ حد در توابع چند ضابطه‌ای :

📖 **مثـــال 16 :** فرض کنید $f(x) = \begin{cases} 1 & x \le 0 \\ -1 & x > 0 \end{cases}$، حاصل $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ کدام است؟ (سراسری تجربی)

1) صفر   2) 1   3) -1 4) صفر

پاسخ : گزینه 2 صحیح است زیرا : $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 1$

📖 **مثـــال 17 :** اگر $f(x) = \begin{cases} ax - 1 & x < 1 \\ x^2 + 2a & x \ge 1 \end{cases}$ و $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) - \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -1$ مقدار a کدام است؟

(سراسری ریاضی – 86)

1) -4 2) -3 3) -2 4) -1

پاسخ :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 1 + 2a \\ \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = a - 1 \end{cases} \Rightarrow 1 + 2a - a + 1 = -1 \Rightarrow a + 2 = -1 \Rightarrow a = -3$$

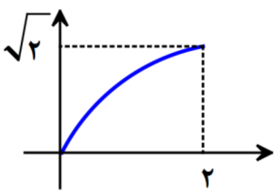
گزینه 2 صحیح است .

حـــد توابع شامل جـــزء صحیح :

📖 **مثـــال 18 :** اگر $f(x)=\left[\frac{x}{2}\right]+\left[\sqrt{x}\right]$ باشد، مجموع حد چپ و راست تابع f در $x=2$ کدام است؟

1) 2   2) 3   3) 4   4) 1

پاسخ : حد چپ و راست تابع $y=\left[\sqrt{x}\right]$ برابر 1 می‌شود. طبق شکل :



از طرفی داریم :
$$x\to 2^{+}\Rightarrow x>2\xrightarrow{x=2/01}\left[\frac{x}{2}\right]=\left[1/00\cdots\right]=1$$

$$\lim_{x\to 2^{+}} f(x)=1+1=2$$

$$x\to 2^{-}\Rightarrow \xrightarrow{x=1/99...9}\left[\frac{x}{2}\right]=\left[0/\ldots\right]=0\Rightarrow \lim_{x\to 2^{-}} f(x)=1+0=1$$

بنابراین جواب : $2+1=3$ و گزینه 2 صحیح است.

📖 **مثـــال 19 :** $\lim\limits_{x\to 0^{-}}\frac{|x|-[x]}{2|x|+[x]}$ کدام است؟ (سراسری ریاضی)

1) -1 2) $-\frac{1}{2}$ 3) $\frac{1}{2}$ 4) 1

پاسخ : $x\to 0^{-}\Rightarrow x<0\Rightarrow \begin{cases}-1<x<0\to [x]=-1\\ |x|=-x\end{cases}$

گزینه 1 صحیح است.
$$\lim_{x\to 0^{-}}\frac{-x+1}{-2x-1}=\frac{1}{-1}=-1$$

📖 **مثـــال 20 :** حاصل $\lim\limits_{x\to 4}\left[\frac{x}{2}\right]+\left[-2x\right]$ کدام است؟

1) -6 2) -7 3) -8 4) حد وجود ندارد

پاسخ : باید حد چپ و راست را جدا در $x=4$ بررسی کنیم.

حد راست : $\begin{cases}x\to 4^{+}\Rightarrow \frac{x}{2}\to 2^{+}\\ x\to 4^{+}\Rightarrow -2x\to -8^{-}\end{cases}\Rightarrow$ حد راست $=2+(-9)=-7$

$$\text{حد چپ}: \begin{cases} x \to 4^- \Rightarrow \dfrac{x}{2} \to 2^- \\ x \to 4^- \Rightarrow -2x \to -8^+ \end{cases} \Rightarrow \quad \text{حد چپ} = 1 + (-8) = -7$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x \to 4} f(x) = -7$$

گزینه 2 صحیح است.

مثــال 21 : حاصل $\lim_{x \to 1^-} (x+1)\left[\dfrac{1}{x+1}\right]$ کدام است؟

1) صفر 2) 1 3) -1 4) 2

پاسخ : عدد 1 را داخل براکت جای گذاری می‌کنیم و می‌بینیم که داخل براکت عدد صحیح نمی‌شود، پس اصلاً مشکل حد چپ و راست به وجود نمی‌آید :

$$\lim_{x \to 1^-} (x+1)\left[\frac{1}{x+1}\right] = 2 \times \left[\frac{1}{2}\right] = 0$$

گزینه 1 صحیح است.

مثــال 22 : حاصل $\lim_{x \to 0}\left[1 - x^2\right]$ کدام است؟

1) صفر 2) -1 3) 1 4) حد ندارد

پاسخ : روش اول : داخل براکت به ازای $x = 0$، عدد صحیح می‌باشد پس باید حد چپ و راست را جدا حساب کنیم :

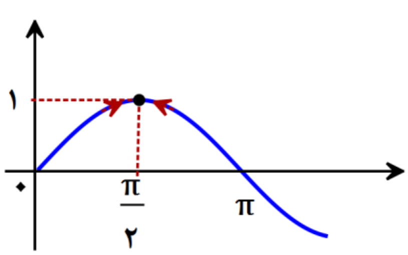
روش دوم : وقتی x چه از سمت راست و چه از سمت چپ به صفر میل می‌کند، x^2 به سمت صفر مثبت میل می‌کند

یعنی : $x^2 > 0$ پس : $1 - x^2 < 1$ و بنابراین $\left[1 - x^2\right] = 0$ پس گزینه 1 صحیح است.

مثــال 23 : حاصل $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}}[\sin x]$ کدام است؟

1) 1 2) صفر 3) -1 4) حد ندارد

پاسخ : وقتی $x \to \frac{\pi}{2}$ حرکت می‌کند، $\sin x$ هم به سمت $\sin\frac{\pi}{2}$، یعنی 1 می‌رود ولی هیچ وقت به یک نمی‌رسد و همواره کم‌تر از 1 است. پس عبارت داخل براکت بسیار نزدیک به 1 ولی کمتر از 1 است. لذا مقدار صحیحش برابر صفر



است . لذا گزینه 2 صحیح است.

📖 **مثــال 24 :** حاصل $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{[\sin x]+x}{[\cos x]+2x}$ کدام است؟

1) $\dfrac{1}{2}$ 2) $\dfrac{3}{4}$ 3) -1 4) $\dfrac{2}{3}$

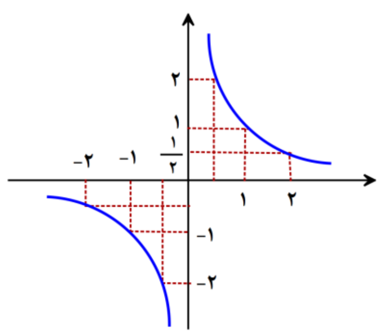
پاسخ : وقتی که x به سمت 2 میل کند، باید ببینیم که $[\sin x]$ و $[\cos x]$ چه اعدادی می‌شوند. 2 رادیان تقریباً 120° یعنی در ربع دوم قرار دارد. در این ربع، سینوس یک مقدار مثبت کوچکتر از 1 واحد خواهد بود پس : $[\sin 2]=0$ و کسینوس در اینجا عددی است بین 1- و 0 پس $[\cos 2]=-1$ بنابراین داریم :

$$\lim_{x\to 2}\frac{[\sin x]+x}{[\cos x]+2x}=\frac{[\sin 2]+2}{[\cos 2]+2(2)}=\frac{0+2}{-1+4}=\frac{2}{3}$$

گزینه 4 صحیح است .

بحث بدست آوردن حد براکت از روی نمودار :

📖 **مثــال 25 :** بررسی $\lim\limits_{x\to -2^+}\left[\dfrac{1}{x}\right]$:



پاسخ : همان‌طور که در شکل ملاحظه می‌کنید وقتی x به سمت -2^+ میل می‌کند، (یعنی از سمت راست وقتی به 2- نزدیک می‌شویم $\dfrac{1}{x}$ عددی است بین 1- و $-\dfrac{1}{2}$ بنابراین $\left[\dfrac{1}{x}\right]=-1$ خواهد بود بنابراین :

$$\lim_{x\to -2^+}\left[\frac{1}{x}\right]=-1$$

حــد در توابع رادیکــالی :

در تابع رادیکالی اگر $\lim\limits_{x\to c}(ax+b)=L$ و $L>0$ آن‌گاه : $\lim\limits_{x\to c}\sqrt{ax+b}=\sqrt{L}$

📖 **مثــال 26 :** $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{5x+1}$ را بدست آورید.

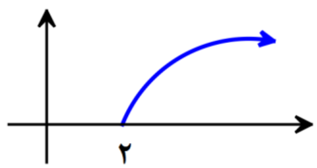
پاسخ : چون عبارت زیر رادیکال به ازای $x=2$ مثبت است بنابراین داریم :

$$\lim_{x\to 2}\sqrt{5x+1}=\sqrt{5(2)+1}=\sqrt{11}$$

📖 **مثـــال 27 :** $\lim\limits_{x\to ۲}\sqrt{x-۲}$ را بدست آورید.

پاسخ : چون عبارت زیر رادیکال به ازای $x=۲$ صفر شده است، بنابراین $\lim\limits_{x\to ۲}\sqrt{x-۲}$ وجود ندارد.

به نمودار دقت کنید :



همانطور که روی نمودار می‌بینید برای عدد 2، همسایگی چپ تعریف نشده است و این یعنی حد چپ ندارد، بنابراین حد ندارد.

پیوستـــگی :

پیوسته بودن یک نمودار : تا وقتی که روی نمودار بدون برداشتن دست حرکتی کنید نمودار پیوسته است.

پیوستگی در یک نقطه : تابع f در $x=a$ پیوسته است اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

مواردی که تابع f در $x=a$ پیوسته نیست:

1) $a\notin D_f$

2) دستِ کم یکی از دو حد چپ یا راست موجود نباشد.

3) تابع در $x=a$ حد داشته باشد ولی حد مخالف مقدارِ تابع باشد.

📖 **مثـــال 28 :** پیوستگی توابع زیر را در نقاط داده شده بررسی کنید.

الف) $f(x)=\dfrac{x+۲}{x-۱}\qquad x=۱$

ب) $f(x)=\sqrt{x-۳}\qquad x=۳$

پ) $f(x)=[x]\qquad x=۵$

📖 **مثـــال 29 :** تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x^۲+x-۲|}{x-۱} & x\neq ۱\\ a & x=۱\end{cases}$ به ازای کدام مقدار a بر R پیوسته است؟

1) هر مقدار a 2) هیچ مقدار a 3) -3 4) 3

پاسخ : در توابع چند ضابطه‌ای برای تعیین پیوستگی از نقاط مرزی استفاده می‌کنیم.

بهتر است عبارت داخل قدرمطلق تعیین علامت شود.

$$x^2+x-2=0 \to (x+2)(x-1)=0 \to \begin{cases} x=-2 \\ x=1 \end{cases}$$

	-2		1	
$+$	$\circ$	$-$	$\circ$	$+$

طبق جدول یا با عدد گذاری می‌فهمیم که عبارت داخل قدر مطلق به ازای اعداد بزرگتر از 1 مثبت و به ازای اعداد کوچکتر از 1 منفی خواهد بود.

$$\lim_{x\to 1}\frac{|x^2+x-2|}{x-1}=\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2+x-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(x+2)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}}=3 \\ \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-(x^2+x-2)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-(x+2)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}}=-3 \end{cases}$$

حد وجود ندارد لذا پیوسته نیست، لذا گزینه 2 صحیح است.

📖 **مثـال 30 :** تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} 2x+1 & |x|>2 \\ x^2+1 & |x|\le 2 \end{cases}$، از نظر پیوستگی در دو نقطه به طول‌های 2 و 2- چگونه است؟

1) در 2- ناپیوسته، در 2 ناپیوسته

2) در 2- ناپیوسته، در 2 پیوسته

3) در 2- پیوسته، در 2 ناپیوسته

4) در 2- پیوسته، در 2 پیوسته

پاسخ : تابع f را می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$f(x)=\begin{cases} 2x+1 & x>2 \text{ یا } x<-2 \\ x^2+1 & -2\le x\le 2 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=5 \ , \ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=5 \ , \ f(2)=5 \to$ f در <u>2</u> پیوسته است

$\lim\limits_{x\to (-2)^+} f(x)=5 \ , \ \lim\limits_{x\to (-2)^-} f(x)=-3 \ , \ f(-2)=5 \to$ f در <u>2-</u> ناپیوسته است

گزینه 2 صحیح است .

📖 **مثال 31 :** در تابع $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-1}{|x^2-1|} & x\neq 1 \\ k & x=1 \end{cases}$ اگر تابع در نقطه‌ی $x=1$ پیوستگی چپ داشته باشد، آن‌گاه k کدام است؟

1) $-\frac{1}{2}$ 2) $\frac{1}{2}$ 3) 2   4) -2

پاسخ : برای تعیین حد چپ، ابتدا باید عبارت قدرمطلق‌دار، بدون قدرمطلق نوشته شود. وقتی $x\to 1^-$ یعنی $x<1$ و $x^2-1<0$ بنابراین : $|x^2-1|=-(x^2-1)$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{\cancel{x-1}}{-\cancel{(x-1)}(x+1)}=\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{-(x+1)}=-\frac{1}{2}$$

$$f(1)=k \to k=-\frac{1}{2}$$

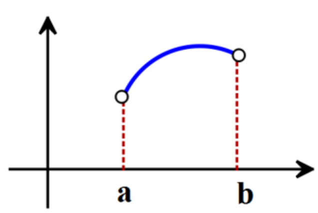
گزینه 1 صحیح است.

پیوستــگی در بــازه :

تعاریف :

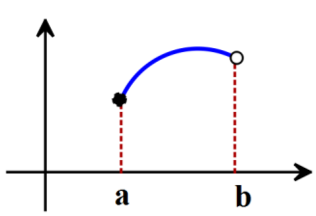
1) تابع f در (a,b) پیوسته است :

اگر در تک تک نقاط درون بازه پیوسته باشد.



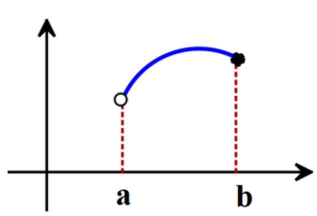
2) تابع f در $[a,b)$ پیوسته است :

اگر اولاً در تک تک نقاط درون بازه پیوسته باشد و ثانیاً در $x=a$ پیوستگی راست داشته باشد.

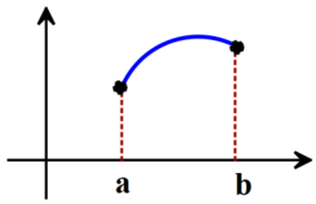


3) تابع f در $(a,b]$ پیوسته است :

اگر اولاً در تک تک نقاط درون بازه پیوسته باشد و ثانیاً در $x=b$ پیوستگی چپ داشته باشد.



4) تابع f در $[a,b]$ پیوسته است :



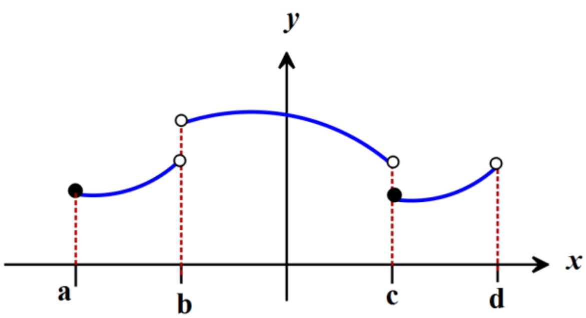
اگر اولاً در تک تک نقاط درون بازه پیوسته باشد و ثانیاً در $x=a$ پیوستگی راست و در $x=b$ پیوستگی چپ داشته باشد.

نکته : اگر تابع f در $[a,b]$ پیوسته باشد آن‌گاه :

1) در $[a,b)$ پیوسته است. 2) در $(a,b]$ پیوسته است. 3) در (a,b) پیوسته است.

❑ **سؤال :** اگر تابع f در $[a,b]$ پیوسته باشد، آیا میتوان گفت در هر نقطه از آن هم پیوسته است؟

پاسخ : خیر، مثلاً a و b یک نقطه از این بازه است اما نه در a و نه در b پیوسته نیست. چون همسایگی چپ a و همسایگی راست b وجود ندارد.



📖 **مثال 32 :** در شکل مقابل تابع f در چه بازه‌هایی پیوسته است؟

پاسخ : در بازه‌های $[a,b)$ و (b,c) و $[c,d)$ تابع پیوسته است.

📖 **مثال 33 :** تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} ۲x+۴ & -۳<x\leq -۱ \\ x^{۲}-۱ & -۱<x<۲ \\ -x+۵ & ۲\leq x<۵ \end{cases}$ در بازهٔ (a,b) پیوسته است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

2 (1 3 (2 6 (3 8 (4

پاسخ : ضابطه‌های تابع، همگی چندجمله‌ای هستند. پس تنها جاهایی که ممکن است پیوستگی را خراب کنند، نقاط $x=-۱$ و $x=۲$ هستند. در آن‌ها پیوستگی را بررسی می‌کنیم.

$$x=-۱\rightarrow\begin{cases} \text{مقدار} = \text{حد چپ} = ۲(-۱)+۴=۲ \\ \text{حد راست} =(-۱)^{۲}-۱=۰ \end{cases}\Rightarrow ۲\neq ۰\Rightarrow \quad \text{ناپیوسته}$$

$$x=۲\rightarrow\begin{cases} \text{حد چپ} =(۲)^{۲}-۱=۳ \\ \text{مقدار} = \text{حد راست} =-(۲)+۵=۳ \end{cases}\Rightarrow ۳=۳\Rightarrow \quad \text{پیوسته}$$

پس در بازه‌ی $(-۳,۵)$ که تابع تعریف شده است از $(-۳,-۱]$ تابع پیوسته و در $x=-۱$ ناپیوسته و از $(-۱,۵)$ تابع

باز هم پیوسته است پس $[-3,-1)$ یا $(a,b)=(-1,5)$ در نتیجه بیشترین مقدار $b-a$ می‌شود : $5-(-1)=6$

پس گزینه 3 صحیح است.