

فصل چہارم

دنبالہ و سری

۴-۱. تعریف دنباله

تعریف: هر تابع از مجموعه اعداد طبیعی به مجموعه اعداد حقیقی را یک دنباله می‌گوییم.

مثال: تابع $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $f(n) = \frac{n}{2n+1}$ یک دنباله است در این دنباله داریم

$$f(1) = \frac{1}{2 \times 1 + 1} = \frac{1}{3}$$

$$f(2) = \frac{2}{2 \times 2 + 1} = \frac{2}{5}$$

$$f(3) = \frac{3}{2 \times 3 + 1} = \frac{3}{7}$$

در دنباله فوق، $f(n)$ را جمله n ام دنباله می‌گوییم مثلاً در دنباله فوق $\frac{3}{7}$ جمله سوم دنباله است زیرا $f(3) = \frac{3}{7}$.

برای نمایش دنباله $f(n)$ از نماد $\{f(n)\}_{n=1}^{\infty}$ استفاده می‌کنیم و معمولاً بجای استفاده از نمادهای f, g, h که در توابع از آنها استفاده می‌کردیم برای دنباله‌ها از حروف a, b, c استفاده می‌کنیم مثلاً دنباله $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ که در این صورت a_n جمله n ام دنباله است.

۴-۲. دنباله صعودی و نزولی

تعریف: دنباله $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ را صعودی می‌گوییم اگر برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $a_{n+1} \geq a_n$.

مثال: دنباله $a_n = \frac{1}{n}$ دنباله صعودی است.

حل: زیرا برای هر $n \in \mathbb{N}$ می‌دانیم $n+1 \geq n$ بنابراین نامساوی $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$ حاصل می‌شود و از آنجا داریم

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \geq \frac{1}{n} = a_n \Rightarrow a_{n+1} \geq a_n$$

مثال: دنباله $b_n = 1 - \frac{2}{n+1}$ دنباله‌ای صعودی است.

حل: زیرا برای هر $n \in \mathbb{N}$ می دانیم $n+2 \geq n+1$ بنابراین $\frac{1}{n+2} \leq \frac{1}{n+1}$ و در نتیجه با ضرب طرفین نامساوی

در عدد دو داریم $\frac{2}{n+2} \leq \frac{2}{n+1}$ حال اگر طرفین نامساوی اخیر را در -1 ضرب کنیم داریم $-\frac{2}{n+2} \geq -\frac{2}{n+1}$

(جهت نامساوی عوض می شود) با اضافه کردن عدد یک به طرفین نامساوی داریم $1 - \frac{2}{n+2} \geq 1 - \frac{2}{n+1}$ بنابراین

$$b_{n+1} = 1 - \frac{2}{n+2} \geq 1 - \frac{2}{n+1} = b_n \Rightarrow b_{n+1} \geq b_n$$

تعریف: دنباله $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ را نزولی گوئیم اگر برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $a_{n+1} \leq a_n$.

مثال: دنباله $a_n = \frac{1}{2^n}$ دنباله نزولی است.

حل: زیرا برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم $n+1 \geq n$ بنابراین $2^{n+1} \geq 2^n$ و از آنجا $\frac{1}{2^{n+1}} \leq \frac{1}{2^n}$ بنابراین داریم

$$a_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}} \leq \frac{1}{2^n} = a_n \Rightarrow a_{n+1} \leq a_n$$

نکته: دنباله $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ را در نظر بگیرید و فرض کنید تابع مشتق پذیر $y = f(x)$ بگونه ای باشد که برای هر n داشته

باشیم $a_n = f(n)$ در این صورت

الف) اگر f' روی $(*, +\infty)$ دارای علامت مثبت باشد آنگاه دنباله a_n صعودی است.

ب) اگر f' روی $(*, +\infty)$ دارای علامت منفی باشد آنگاه دنباله a_n نزولی است.

مثال: صعودی یا نزولی بودن دنباله های زیر را مشخص کنید.

$$a_n = \frac{1}{\ln(n+1)} \quad \text{الف)}$$

حل: فرض می کنیم $f(x) = \frac{1}{\ln(x+1)}$ در این صورت داریم $a_n = f(n)$.

از طرفی داریم

$$f'(x) = \frac{(1)' \ln(x+1) - (\ln(x+1))' \times 1}{(\ln(x+1))^2} = \frac{-\frac{1}{x+1}}{\ln^2(x+1)} = -\frac{1}{(x+1)\ln^2(x+1)}$$

مخرج کسر فوق برای هر x در بازه $(*, +\infty)$ مثبت است بنابراین کل کسر روی بازه فوق منفی است و در نتیجه f' روی $(*, +\infty)$ دارای علامت منفی است و لذا دنباله a_n یک دنباله نزولی است.

$$b_n = \frac{2n+1}{n+1} \quad \text{ب)}$$

$$\text{حل: با فرض } f(x) = \frac{2x+1}{x+1} \text{ داریم}$$

$$f'(x) = \frac{2(x+1) - (2x+1)}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

بوضوح کسر فوق روی $(*, +\infty)$ مثبت و در نتیجه دنباله b_n یک دنباله صعودی است.

تمرین: صعودی یا نزولی بودن دنباله های زیر را بررسی کنید.

$$b_n = \cos \frac{\pi}{n} \quad \text{ب)}$$

$$a_n = \frac{n}{e^n} \quad \text{الف)}$$

$$d_n = \frac{n!}{n^n} \quad \text{ت)}$$

$$c_n = \frac{n!}{2^n} \quad \text{پ)}$$

راهنمایی

ب) دنباله صعودی است.

الف) دنباله نزولی است.

ت) دنباله نزولی است.

پ) دنباله صعودی است.

۳-۴. همگرایی دنباله

دنباله $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ مفروض است اگر حد دنباله فوق وقتی n به سمت $+\infty$ میل می کند موجود باشد (یعنی $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ برابر عدد حقیقی شود) آنگاه دنباله a_n را همگرا می گوئیم. اگر حد فوق موجود نباشد دنباله را واگرا می گوئیم.

مثال: دنباله $a_n = \frac{1}{n}$ دنباله ای همگرا به صفر است. چرا که هر چه n به سمت مثبت بی نهایت نزدیک می شود مقدار دنباله به صفر نزدیک می گردد به جدول زیر توجه کنید.

n	1	2	5	50	100	500	2000	5000000	100000000
a_n	1	0.5	0.2	0.020	0.010	0.0020	0.00050	0.000000200	0.0000000100

قضیه: دنباله $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ را در نظر بگیرید و فرض کنید تابع $y = f(x)$ بگونه‌ای باشد که برای هر n داشته باشیم $a_n = f(n)$.
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$ آنگاه $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$ اگر در این صورت

مثال: حد دنباله های زیر را محاسبه کنید.

$$a_n = \frac{2n+1}{n+1} \quad (\text{الف})$$

$$\text{حل: با فرض } f(x) = \frac{2x+1}{x+1} \text{ داریم}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cancel{x}(2 + \frac{1}{x})}{\cancel{x}(1 + \frac{1}{x})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \cancel{x}}{1 + \cancel{x}} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2 \text{ بنابراین}$$

$$b_n = \frac{-5n^2}{2n^2+1} \quad (\text{ب})$$

$$\text{حل: با فرض } f(x) = \frac{-5x^2}{2x^2+1} \text{ داریم}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5x^2}{2x^2+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}(2 + \frac{1}{x^2})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5}{2 + \frac{1}{\cancel{x^2}}} = -\frac{5}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\frac{5}{2} \text{ بنابراین داریم}$$

$$c_n = n \sin \frac{\pi}{n} \quad (\text{پ})$$

$$\text{حل: با فرض } f(x) = x \sin \frac{\pi}{x} \text{ داریم}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{\pi}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\pi}{x}}{\frac{1}{x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\sin \frac{\pi}{x} \right)'}{\left(\frac{1}{x} \right)'} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{\pi}{x^2} \cos \frac{\pi}{x}}{-\frac{1}{x^2}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \pi \cos \frac{\pi}{x} \\
 &= \pi \times 1 = \pi
 \end{aligned}$$

بنابراین $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \pi$.

تمرین: همگرایی و واگرایی هر یک از دنباله های زیر را بررسی کنید.

$$a_n = \frac{n^2 + 1}{n} [\sin^2 n] \quad \text{ب)}$$

$$d_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{ت)}$$

$$a_n = \frac{n^2 + 2}{n + 1} \quad \text{الف)}$$

$$c_n = \frac{3^{-n+2} + 2^{-n+1}}{3^{-n+1} + 2^{-n}} \quad \text{پ)}$$

راهنمایی:

ب) دنباله فوق دنباله ثابت صفر است و لذا همگرا به صفر است.

الف) دنباله واگرا است.

ت) دنباله به (عدد نپر) همگرا است.

پ) دنباله همگرا به عدد ۲ است.

۴-۴. سریها

۴-۴-۱. نماد سیگما ($\sum$)

از این نماد بر خلاصه نویسی مجموع استفاده می‌شود.

$$\sum_{i=m}^n F(i) = F(m) + F(m+1) + \cdots + F(n-1) + F(n)$$

که m, n دو عدد صحیح هستند و $m \leq n$.

مثال:

(الف)

$$\sum_{i=1}^5 i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$$

(ب)

$$\begin{aligned} \sum_{i=-2}^2 (3i+2) &= (3(-2)+2) + (3(-1)+2) + (3(0)+2) + (3(1)+2) + (3(2)+2) \\ &= (-4) + (-1) + (2) + (5) + (8) \end{aligned}$$

(پ)

$$\sum_{j=1}^n j^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$$

(ت)

$$\sum_{k=3}^8 \frac{1}{k} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}$$

۴-۴-۲. خواص سیگما

(الف) $\sum_{i=1}^n c = nc$ که c عدد ثابت دلخواه است.

مثال:

$$\sum_{i=1}^6 3 = 3 \times 6 = 18$$

ب) $\sum_{i=1}^n cF(i) = c \sum_{i=1}^n F(i)$ که c عدد ثابت دلخواه است.

مثال:

$$\sum_{i=1}^{12} \frac{10}{i} = 10 \sum_{i=1}^{12} \frac{1}{i}$$

$$\sum_{i=1}^n (F(i) + G(i)) = \sum_{i=1}^n F(i) + \sum_{i=1}^n G(i) \quad \text{پ}$$

مثال:

$$\sum_{i=1}^5 (i + 2) = \sum_{i=1}^5 i + \sum_{i=1}^5 2$$

$$\sum_{i=m}^n F(i) = \sum_{i=m+c}^{n+c} F(i-c) \quad \text{ت) برای هر عدد صحیح } c \text{ داریم}$$

مثال:

(الف)

$$\sum_{i=1}^{11} i^2 = \sum_{i=2}^{12} (i-1)^2$$

ب)

$$\sum_{i=2}^{12} \frac{1}{i-1} = \sum_{i=1}^{11} \frac{1}{i}$$

$$\sum_{i=m}^n (F(i) - F(i-1)) = F(n) - F(m-1) \quad \text{ث) که } m, n \text{ دو عدد صحیح هستند و } m \leq n.$$

مثال:

$$\sum_{i=1}^n (4^i - 4^{i-1}) = 4^n - 4^0 = 4^n - 1$$

قضیه: اگر n یک عدد صحیح و مثبت باشد آنگاه

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2} \text{ (الف)}$$

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ (ب)}$$

مثال:

(الف)

$$\sum_{i=1}^{10} 2i = 2 \sum_{i=1}^{10} i = 2 \frac{10 \times (10+1)}{2} = 10 \times 11 = 110$$

(ب)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n i(2i-1) &= \sum_{i=1}^n (2i^2 - i) \\ &= \sum_{i=1}^n 2i^2 + \sum_{i=1}^n (-i) \\ &= 2 \sum_{i=1}^n i^2 - \sum_{i=1}^n i \\ &= 2 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} - \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1) - n(n+1)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n(2n+1) - n)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n^2 + n - n)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n^2 - n)}{6} \\ &= \frac{2n^2 + n - n}{6} \\ &= \frac{2n^2}{6} \end{aligned}$$

۴-۳-۳. تعریف سری

دنباله دلخواه $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ را در نظر گرفته و از روی آن دنباله s_n را به صورت زیر می‌سازیم

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$\vdots$$

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

اگر دنباله s_n همگرا باشد می‌گوییم سری a_n که با نماد $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نشان می‌دهیم همگرا است و اگر دنباله s_n واگرا باشد

یعنی $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ موجود نباشد (عدد حقیقی نباشد) می‌گوییم $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگرا است. در صورت همگرا بودن دنباله s_n مقدار

حد آن را برابر مقدار سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تعریف می‌کنیم. در هر حالت در سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ، a_n را جمله عمومی سری می‌گوییم.

مثال: در هر یک از موارد زیر بررسی کنید سری داده شده همگرا است یا خیر و در صورت همگرا بودن مقدار آن را محاسبه کنید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \quad (\text{الف})$$

حل: در سری داده شده داریم $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$ از طرفی می‌دانیم که

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

بنابراین داریم

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

بنابراین

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 1 - 0 = 1$$

در نتیجه سری همگرا و مقدار آن برابر ۱ است یعنی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n+2} \quad \text{ب)}$$

حل: داریم $a_n = \ln \frac{n+1}{n+2}$ از طرفی می‌دانیم

$$\ln \frac{k+1}{k+2} = \ln(k+1) - \ln(k+2)$$

بنابراین داریم

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n \ln \frac{k+1}{k+2} = \ln \frac{2}{3} + \ln \frac{3}{4} + \ln \frac{4}{5} + \dots + \ln \frac{n+1}{n+2} \\ &= (\ln 2 - \ln 3) + (\ln 3 - \ln 4) + (\ln 4 - \ln 5) + \dots + (\ln(n+1) - \ln(n+2)) \\ &= \ln 2 - \ln(n+2) \\ &= \ln \frac{2}{n+2} \end{aligned}$$

بنابراین داریم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{2}{n+2} = \ln \frac{2}{+\infty} = \ln 0 = -\infty$$

چون دنباله s_n حد ندارد سری $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n+2}$ واگرا است.

۴-۴-۴. آزمونهای همگرایی سریها

۱. آزمون واگرایی: در سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ مخالف صفر باشد آنگاه سری واگرا است.

مثال: همگرایی یا واگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n+1}$ را بررسی کنید.

حل: در سری فوق داریم $a_n = \frac{2n+1}{n+1}$ چون $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n+1} = 2 \neq 0$ لذا بنابر آزمون واگرایی سری داده شده واگرا است.

نکته: در آزمون فوق اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ نمی‌توان در مورد همگرایی یا واگرایی سری نتیجه‌ای گرفت.

مثال: دو سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ و $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ را در نظر بگیرید در هر دو سری حد جمله عمومی برابر صفر است ولی در ادامه می‌بینید که سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ واگرا ولی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ همگرا است.

۲. آزمون سری هندسی: هر سری به فرم $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ را یک سری هندسی با جمله شروع a و قدر نسبت r می‌گوییم. در سری هندسی اگر $|r| < 1$ سری همگرا و اگر $|r| \geq 1$ سری واگرا است. در حالتی که سری همگرا است مقدار آن برابر است با $\frac{a}{1-r}$.

مثال: سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n}$ یک سری هندسی با جمله شروع $a = \frac{3}{2}$ و قدر نسبت $r = \frac{1}{2}$ است چون $|r| = \frac{1}{2} < 1$ بنابراین بنابر آزمون سری هندسی سری فوق همگرا است و مقدار آن برابر است با $\frac{a}{1-r} = \frac{\frac{3}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = 3$ یعنی

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n} = 3$$

۳. آزمون $-p$ سری: هر سری به فرم $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ که p عدد حقیقی مثبت است را یک $-p$ سری می‌گوییم. در یک $-p$ سری اگر $p > 1$ سری همگرا و اگر $0 < p \leq 1$ سری واگرا است.

مثال: سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ یک $-p$ سری با $p = \frac{3}{2} > 1$ است زیرا $\frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{nn^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ در نتیجه $p = \frac{3}{2} > 1$

۴. آزمون نسبت: فرض کنید $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ یک سری با جملات ناصفر باشد (یعنی برای هر $n \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$) باشد و قرار

می‌دهیم $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ در این صورت

الف) اگر $l < 1$ سری همگرا است.

ب) اگر $l > 1$ و یا حد فوق موجود نباشد سری واگرا است.

پ) اگر $l = 1$ آزمون نتیجه ای ندارد.

مثال: همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ را بررسی کنید.

حل: سری فوق یک سری با جملات ناصفر است و داریم

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2^n(n+1)}{2^{n+1}n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{2n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} < 1$$

بنابراین طبق آزمون نسبت سری همگرا است.

تعریف: سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ را یک سری مثبت می‌گوییم اگر همه جملات آن مثبت باشند یعنی برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $a_n > 0$.

۵. آزمون ریشه: فرض کنید $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ یک سری مثبت باشد و قرار می‌دهیم $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ در این صورت

الف) اگر $l < 1$ سری همگرا است.

ب) $l > 1$ و یا حد فوق موجود نباشد سری واگرا است.

پ) اگر $l = 1$ آزمون نتیجه ای ندارد.

مثال: همگرایی سریهای زیر را بررسی کنید

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^n} \quad \text{الف)}$$

حل:

$$\begin{aligned}
 l &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n^n}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{2}{n} \right)^n \right)^{\frac{1}{n}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \\
 &= 0 < 1
 \end{aligned}$$

بنابراین سری همگرا است.

۶. آزمون سری متناوب

فرض کنید دنباله a_n دنباله ای مثبت باشد در این صورت هر سری به فرم $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ و یا $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ را یک سری متناوب می‌گوییم.

در سری متناوب اگر

الف) a_n دنباله نزولی باشد

ب) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

سری همگرا است.

مثال: همگرای سریهای زیر را بررسی کنید.

الف) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

حل: در این سری داریم $a_n = \frac{1}{n}$. اولاً دنباله $a_n = \frac{1}{n}$ نزولی است زیرا با فرض $f(x) = \frac{1}{x}$ داریم $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

که روی بازه $(0, +\infty)$ منفی است. ثانیاً $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ بنابراین سری متناوب فوق همگرا است.

ب) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{n(n+1)}$

حل: در سری متناوب فوق داریم $a_n = \frac{n+2}{n(n+1)}$. اولاً با فرض $f(x) = \frac{x+2}{x(x+1)}$ داریم

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{x(x+1) - (x+1)(x+2)}{x^2(x+1)^2} \\
 &= \frac{x^2 + x - x^2 - 3x - 2}{x^2(x+1)^2} \\
 &= \frac{-x^2 - 2x - 2}{x^2(x+1)^2} \\
 &= -\frac{x^2 + 2x + 2}{x^2(x+1)^2} \\
 &= -\frac{(x+2)^2 - 2}{x^2(x+1)^2}
 \end{aligned}$$

f' روی $(0, +\infty)$ منفی است لذا دنباله a_n نزولی است. ثانياً

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n(n+1)} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n^2+n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \\
 &= \frac{1}{+\infty} = 0
 \end{aligned}$$

بنابراین سری متناوب فوق همگرا است.

نکات:

الف) اگر دو سری در تعداد متناهی جمله با هم اختلاف داشته باشند آنگاه هر دو سری از یک نوع هستند یعنی هر دو همگرا و یا هر دو واگرا هستند.

ب) اگر دو سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ همگرا باشند آنگاه مجموع و تفاضل آنها نیز همگرا است و داریم

$$\sum_{n=1}^{\infty} (c_1 a_n \pm c_2 b_n) = c_1 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm c_2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

پ) اگر یک سری همگرا و سری دیگر واگرا باشد مجموع و تفاضل آنها واگرا خواهد بود.

ت) اگر دو سری واگرا باشند در مورد همگرا یا واگرایی مجموع و تفاضل آنها نمی‌توان نظر داد. (ممکن است مجموع و تفاضل آنها همگرا و یا واگرا باشد)

ث) اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگرا باشد برای هر $c \neq 0$ سری $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ نیز واگرا خواهد بود.

تمرین: همگرای و یا واگرای هر یک از سریهای زیر را بررسی کنید.

الف) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$	ب) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n}$
پ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{(n+2)!}$	ت) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!}$
ث) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin n + \frac{1}{2^n} \right)$	ج) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sin n\pi + e^{-n})$

راهنمایی:

الف) سری واگرا است. (آزمون واگرایی و نکات الف و ث)

ب) سری همگرا است. (آزمون سری هندسی)

پ) سری همگرا است. (راهنمایی: آزمون نسبت)

ت) سری همگرا است. (راهنمایی: آزمون نسبت)

ث) سری واگرا است. (راهنمایی: آزمون واگرایی و آزمون سری هندسی و نکته پ)

ج) سری همگرا است (راهنمایی: آزمون سری هندسی. دقت کنید که $\sin n\pi = 0$ برای هر $n \in \mathbb{N}$)

۴-۵. سری توانی

هر سری به فرم $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ را یک سری توانی به مرکز x_0 و ضرائب a_n می‌گوییم در این سری برای برخی از مقادیر $x \in \mathbb{R}$ همگرا و برای برخی دیگر از مقادیر x سری ممکن است واگرا باشد. زیر مجموعه ای از اعداد حقیقی که به ازای کلیه اعضای آن، سری فوق همگرا است را بازه همگرای سری توانی می‌گوییم.

مثال: مرکز و ضرائب a_n را برای هر یک از سریهای توانی زیر مشخص کنید.

الف) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{2n-1}$

حل: اگر سری داده شده را با فرم اصلی سری توانی یعنی $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ مقایسه کنیم داریم

$$x_{\cdot}=\circ$$

$$a_n=\frac{(-1)^n}{2n-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n(\P x-\mathfrak{L})^n}{n+1}\quad (\text{ب})$$

حل:

$$\frac{\ln n(\P x-\mathfrak{L})^n}{n+1}=\frac{\ln n\times \P^n\big(x-\frac{\mathfrak{L}}{\P}\big)^n}{n+1}$$

بنابراین

$$x_{\cdot}=\frac{\mathfrak{L}}{\P}$$

$$a_n=\frac{\P^n\ln n}{n+1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^n(x+\P)^n\quad (\text{پ})$$

حل:

$$n^n(x+\P)^n=n^n(x-(-\P))^n$$

بنابراین

$$x_{\cdot}=-\P$$

$$a_n=n^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\P x+1)^n}{(n+1)\P^n}\quad (\text{ت})$$

حل:

$$\frac{(2x+1)^n}{(n+1)2^n} = \frac{2^n \left(x - \frac{1}{2}\right)^n}{(n+1)2^n} = \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^n}{n+1}$$

بنابراین

$$x_0 = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{n+1}$$

تعریف: در سری توانی $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ مقدار R که از رابطه

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

بدست می آید را شعاع همگرای سری توانی می‌گوییم در این تعریف چنانچه مقدار حد عبارت سمت راست برابر صفر شود R را برابر ∞ و اگر مقدار حد عبارت سمت راست برابر ∞ شود مقدار R را برابر صفر تعریف می‌کنیم.

مثال: شعاع همگرای هر یک از سریهای توانی زیر را محاسبه کنید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(2n-1)} \quad \text{الف)}$$

حل: در سری فوق داریم $a_n = \frac{(-1)^n}{2n-1}$ بنابراین

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1}}{2(n+1)-1}}{\frac{(-1)^n}{2n-1}} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2n+1}}{\frac{1}{2n-1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{2n+1} = 1 \end{aligned}$$

بنابراین

$$\frac{1}{R} = 1 \Rightarrow R = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{(2n)!} \quad \text{ب)}$$

حل: در سری فوق $a_n = \frac{n}{(2n)!}$ بنابراین

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n+1}{(2(n+1))!}}{\frac{n}{(2n)!}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(2n)!}{(2n+2)!n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{(n+1)} \cancel{(2n)!}}{\cancel{2(n+1)} \cancel{(2n+1)} \cancel{(2n)!} n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n(2n+1)} = 0 \end{aligned}$$

بنابراین

$$\frac{1}{R} = 0 \Rightarrow R = \infty$$

قضیه: فرض کنید سری توانی $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ دارای شعاع همگرایی برابر R باشد در این صورت بازه همگرایی سری توانی فوق شامل بازه $(x_0 - R, x_0 + R)$ خواهد بود به عبارت دقیقتر بازه همگرایی همان بازه گفته شده است البته ممکن است نقاط شروع بازه فوق در بازه همگرایی باشد و یا خیر که باید بصورت مستقیم با قرار دادن نقاط شروع و انتهای بازه فوق در سری توانی همگرایی سری را بررسی کنیم.

مثال: بازه همگرایی هر یک از سریهای توانی زیر را محاسبه کنید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(x-2)^n \quad \text{الف)}$$

حل: در سری فوق $x_0 = 2$ و $a_n = n$ بنابراین داریم

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1 \Rightarrow R = 1$$

بنابراین بازه مورد نظر عبارت است از $(1, 3)$ برای نقاط شروع و انتهای بازه داریم

$$x = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n(x-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^n$$

چون $\lim_{n \rightarrow \infty} n(-1)^n \neq 0$ لذا سری در نقطه $x = 1$ واگرا است.

$$x = 3 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n(x-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} n(1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} n$$

چون $\lim_{n \rightarrow \infty} n \neq 0$ لذا سری در نقطه $x = 3$ واگرا است.

بنابراین بازه همگرایی برابر بازه $(1, 3)$ است.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! x^n}{2^n} \quad \text{ب)}$$

حل: در سری فوق داریم $x_0 = 0$ و $a_n = \frac{n!}{2^n}$ بنابراین

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)!}{2^{n+1}}}{\frac{n!}{2^n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n (n+1)!}{2^{n+1} n!} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)n!}{2n!} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2} = \infty \end{aligned}$$

بنابراین

$$\frac{1}{R} = \infty \Rightarrow R = \infty$$

بنابراین سری فوق تنها در نقطه $x = x_c = 0$ همگرا است.

مثال: دامنه تابع $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n (x-1)^n}{n 3^n}$ را بیابید.

حل: باید بازه همگرای سری را محاسبه کنیم. در سری فوق داریم $x_c = 0$ و بنابراین $a_n = \frac{(-1)^{n+1} 2^n}{n 3^n}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{\cancel{(-1)^{n+1}} 2^{n+1}}{(n+1) 3^{n+1}}}{\frac{\cancel{(-1)^{n+1}} 2^n}{n 3^n}} \right| \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n 3^n 2^{n+1}}{(n+1) 3^{n+1} 2^n} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2n}{3(n+1)} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

بنابراین

$$\frac{1}{R} = \frac{2}{3} \Rightarrow R = \frac{3}{2}$$

حال بازه $(1 - \frac{3}{2}, 1 + \frac{3}{2}) = (-\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$ را در نظر می‌گیریم

$$\begin{aligned} x = -\frac{1}{2} &\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n (x-1)^n}{n 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n \left(-\frac{3}{2}\right)^n}{n 3^n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n (-1)^n \frac{3^n}{2^n}}{n 3^n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n+1} \frac{1}{n} \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \end{aligned}$$

بنابراین در $x = -\frac{1}{2}$ سری واگرا است.

$$\begin{aligned}
 x = \frac{5}{2} &\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n (x-1)^n}{n 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n \left(\frac{3}{2}\right)^n}{n 3^n} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n \frac{3^n}{2^n}}{n 3^n} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}
 \end{aligned}$$

سری فوق یک سری متناوب با $a_n = \frac{1}{n}$ است که حد آن برابر صفر بوده و نزولی است لذا همگرا است.

در نتیجه بازه همگرایی سری توانی فوق برابر $\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right]$ است بنابراین $D_f = \left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right]$ این بدین معنی است که برای مقادیر خارج از بازه فوق مقدار f وجود ندارد.

۴-۵-۱. مشتق گیری و انتگرالگیری از سری توانی

می توان از یک سری توانی مشتق و انتگرال گرفت بدون اینکه شعاع همگرایی آن تغییر کند البته ممکن است نقاط شروع و انتهای بازه همگرایی از بازه حذف شوند و یا اضافه شوند که باید بصورت مستقیم با جایگذاری در سری جدید مورد بررسی قرار گیرند.

مثال: فرض کنید f تابعی است که توسط یک سری توانی به صورت زیر تعریف شده است.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$$

دامنه تابع f و f' و $g(x) = \int f(x) dx$ را محاسبه کنید.

حل:

الف) دامنه f : برای سری فوق داریم $x_0 = 0$ و $a_n = \frac{1}{(n+1)^2}$ بنابراین

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+2)^2}}{\frac{1}{(n+1)^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{(n+2)^2} = 1 \Rightarrow R = 1$$

بازه $(-1, 1)$ را در نظر می‌گیریم

$$x = -1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2}$$

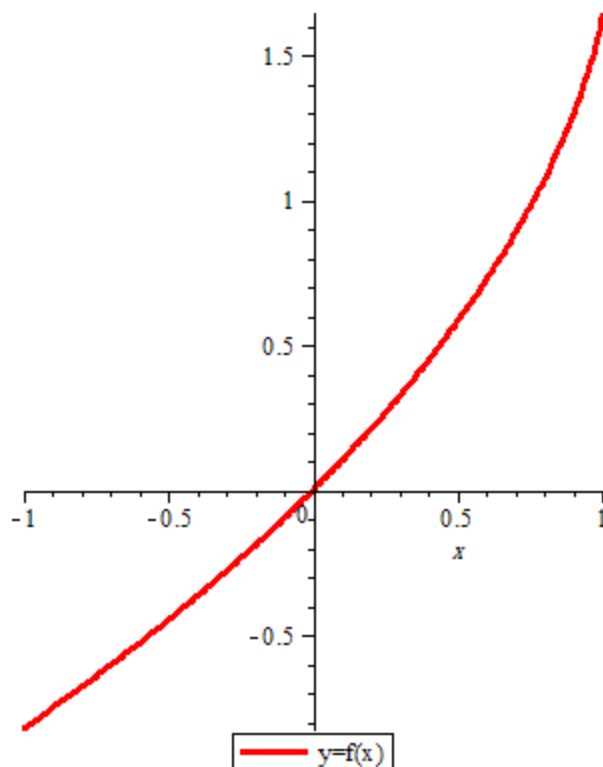
سری فوق یک سری متناوب با جمله عمومی نزولی و حد صفر است لذا سری همگرا است.

$$x = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

سری فوق یک $-p$ سری با $p = 2 > 1$ و لذا همگرا است بنابراین دامنه تابع f عبارت است از

$$D_f = [-1, 1]$$

در زیر نمودار تابع را در دامنه خود می‌بینید.



ب) دامنه f'

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)^r} \Rightarrow f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)x^n}{(n+1)^r} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$$

در سری فوق داریم شعاع همگرایی همچنان برابر $R = 1$ است.

بازه $(-1, 1)$ را در نظر می گیریم

$$x = -1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$$

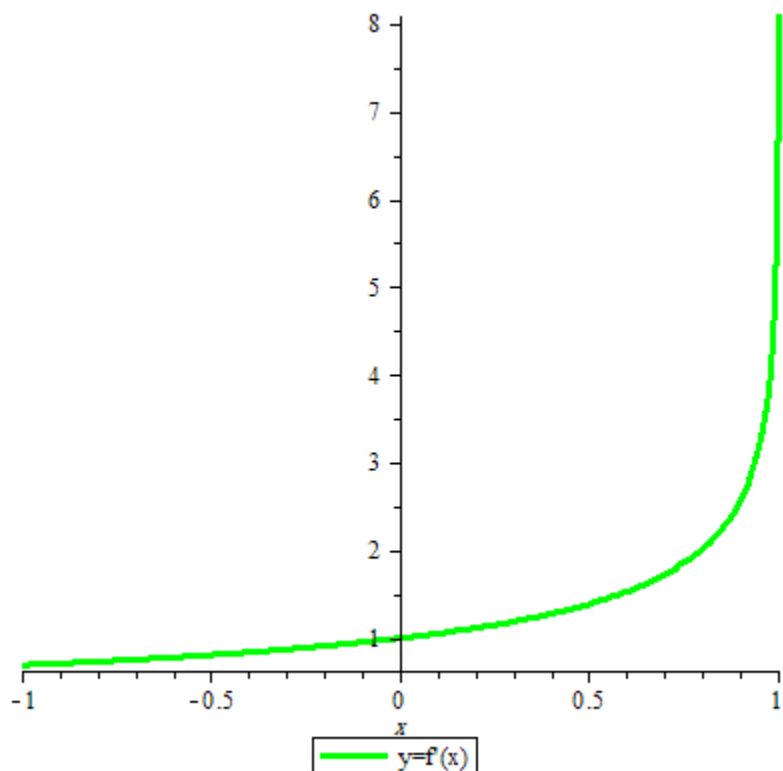
سری فوق یک سری متناوب با جمله عمومی نزولی و حد صفر است لذا سری همگرا است.

$$x = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

سری فوق یک p -سری با $1 \leq p = 1$ ولذا واگرا است بنابراین دامنه تابع f عبارت است از

$$D_{f'} = [-1, 1)$$

نمودار f' را در شکل زیر مشاهده می کنید.



ب) دامنه g

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} \Rightarrow g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+1)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+2)(n+1)^2}$$

در سری فوق داریم شعاع همگرایی همچنان برابر $R = 1$ است.

بازه $(-1, 1)$ را در نظر می گیریم

$$x = -1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+2)(n+1)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+2}}{(n+2)(n+1)^2}$$

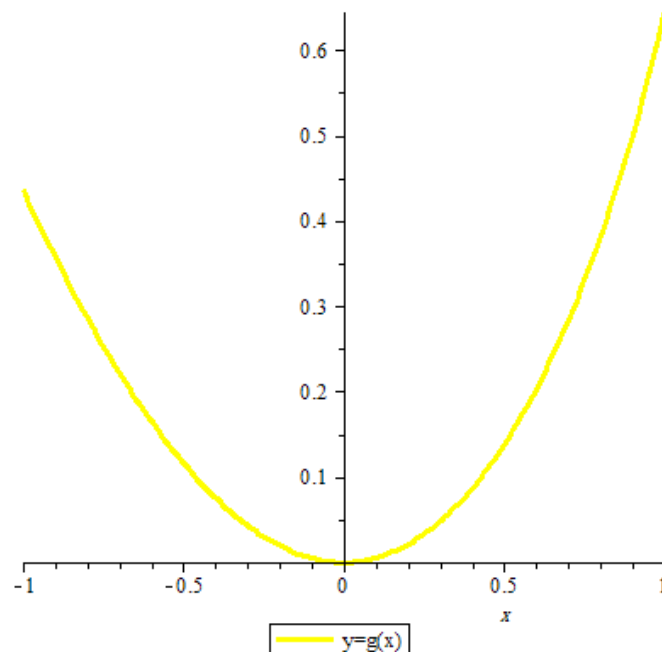
سری فوق یک سری متناوب با جمله عمومی نزولی و حد صفر است لذا سری همگرا است.

$$x = 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+2)(n+1)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+1)^2}$$

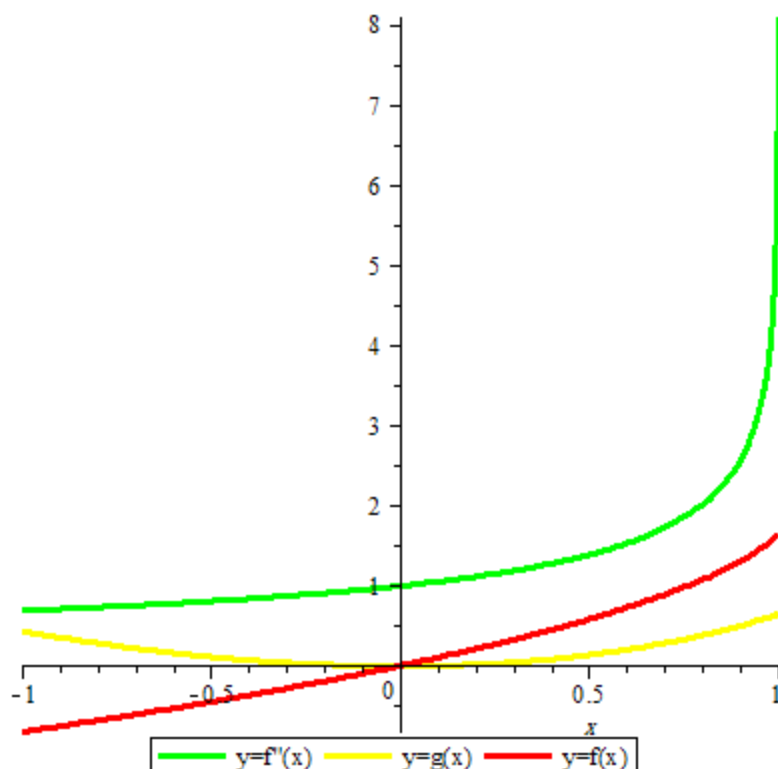
بنا بر آزمون مقایسه سری فوق همگرا است بنابراین

$$D_g = [-1, 1]$$

در زیر نمودار تابع فوق را مشاهده می کنید.



در زیر می توان نمودارهای سه تابع مثال را با یکدیگر مشاهده کرد و آنها را با هم مقایسه کرد.



۴-۶. سری تیلور و مک لورن

فرض کنید تابع $y = f(x)$ و تمام مشتقات آن (مشتق مرتبه اول، مشتق مرتبه دوم و ...) در بازه $(a - r, a + r)$ وجود داشته باشند. (عدد حقیقی باشند) در این صورت دامنه تابع

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n$$

برابر بازه $(a - r, a + r)$ است. سری فوق را سری تیلور تابع f در نقطه $x = a$ می گوئیم. اگر $a = 0$ آنگاه سری حاصل را سری مک لورن می گوئیم.

مثال: سری تیلور توابع زیر را بدست آورید.

الف) $y = e^x$ در نقطه $x = 0$

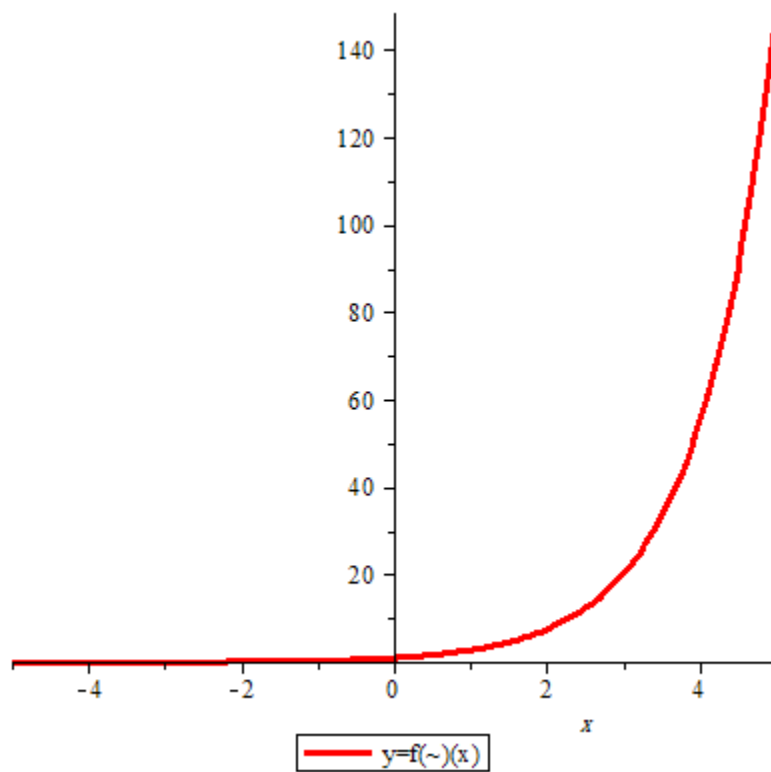
حل:

$$\begin{aligned}
 f(x) = e^x &\Rightarrow f'(x) = e^x \\
 &\Rightarrow f''(x) = e^x \\
 &\Rightarrow f'''(x) = e^x \\
 &\Rightarrow f^{(n)}(x) = e^x
 \end{aligned}$$

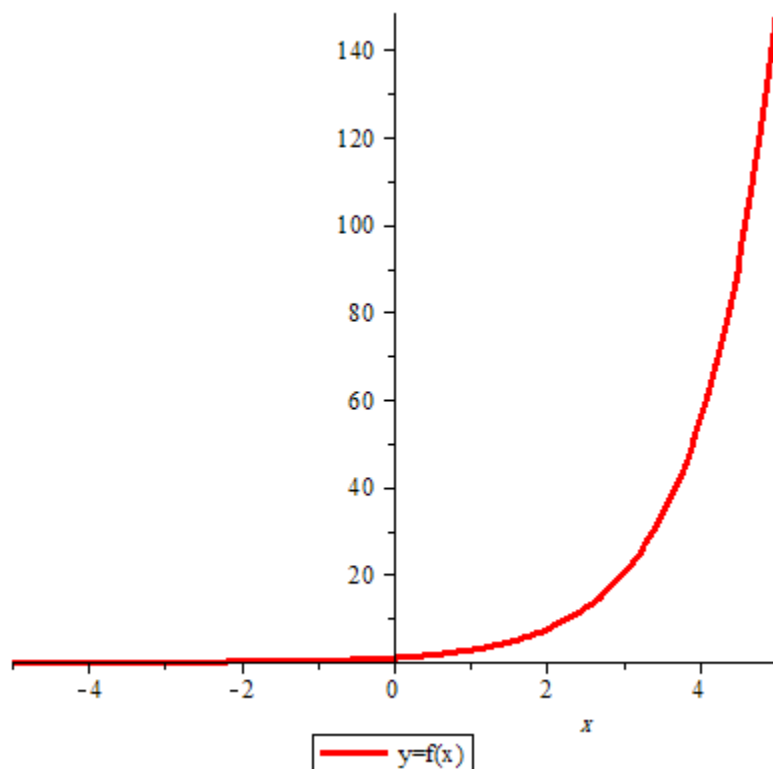
بنابراین داریم

$$\begin{aligned}
 \tilde{f}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} (x-0)^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^0}{n!} x^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}
 \end{aligned}$$

دامنه این تابع برابر $\mathbb{R}$ است و نمودار این سری را در زیر می بینید.



اگر نمودار خود تابع $y = f(x)$ رسم شود به صورت زیر است



همانطور که می بینید این دو نمودار دقیقا مانند هم هستند.

ب) $y = \frac{1}{1-x}$ در $x = 0$

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

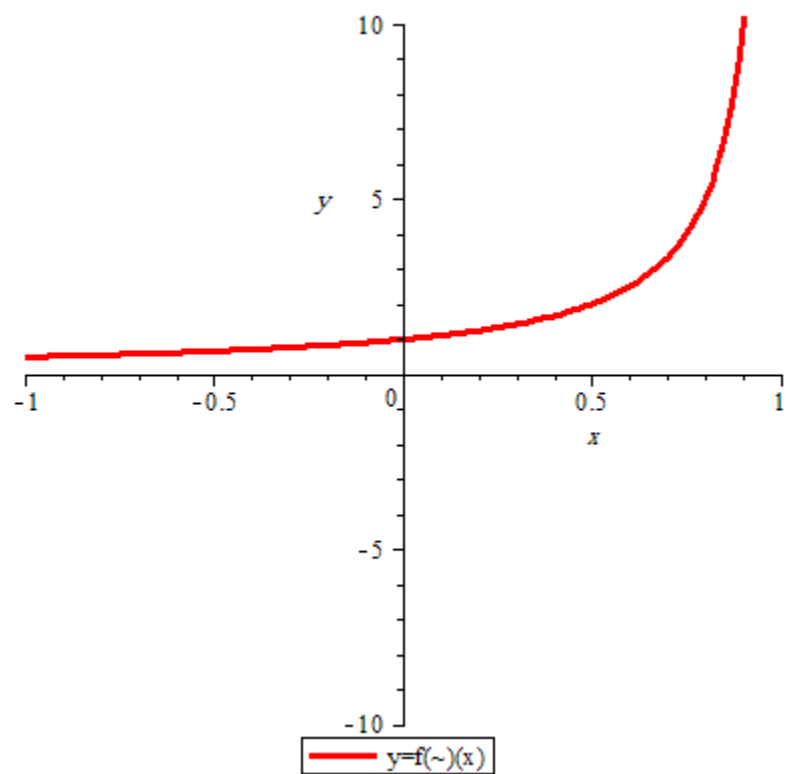
$$\Rightarrow f''(x) = \frac{2(1-x)}{(1-x)^3} = \frac{2}{(1-x)^2}$$

$$\Rightarrow f'''(x) = \frac{6}{(1-x)^3} \qquad \Rightarrow f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^n}$$

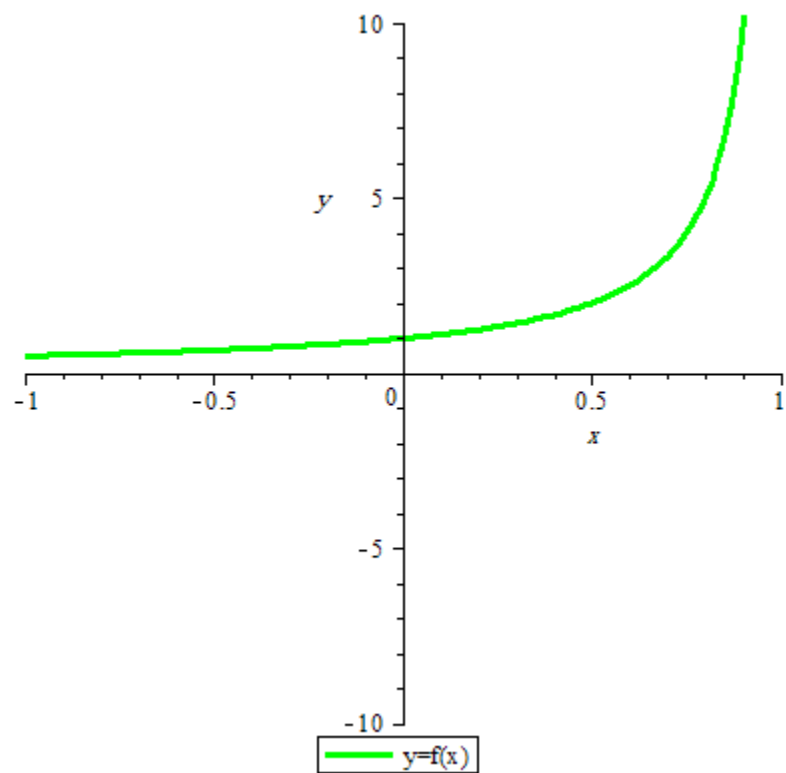
بنابراین داریم

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} (x-0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-0)^n}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

دامنه تابع فوق بازه بازه $(-1, 1)$ است. نمودار تابع در دامنه آن در زیر ترسیم شده است.



حال اگر نمودار خود تابع را رسم کنیم بصورت زیر است.



همانطور که ملاحظه می کنید سری تیلور تابع f با خود تابع f در این مثال یکسان هستند.

فرض کنید $x \in (a-r, a+r)$ و قرار دهیم $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$ اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ آنگاه سری تیلور تابع f در نقطه $x = a$ با خود تابع f برابر است. در این حالت می‌گوییم سری تیلور تابع f ، به f همگرا است.

سریهای توانی توابع زیر را بخاطر بسپارید.

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (-1 < x < 1) \quad (2)$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \quad (4)$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (3)$$

مثال: سری تیلور هر یک از توابع زیر را محاسبه کنید.

$$f(x) = \frac{1}{1+x} \quad (\text{الف})$$

حل:

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{1}{1+x} &= \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n \quad (-1 < -x < 1) \quad \left(\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (-1 < x < 1) \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad (-1 < x < 1) \\ \Rightarrow f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad (-1 < x < 1) \end{aligned}$$

$$g(x) = \ln(1+x) \quad (\text{ب})$$

$$g(x) = \ln(1+x) = \int \frac{1}{1+x} dx$$

با توجه به قسمت قبل داریم

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad (-1 < x < 1)$$

بنابراین با انتگرالگیری از سری توانی فوق داریم

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$$

نقاط ابتدا و انتهای بازه $(-1, 1)$ را باید بصورت جداگانه بررسی کرد.

$$x = -1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (-1)^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{n+1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

سری فوق $-p$ سری با $1 \leq p$ است و لذا واگرا است.

$$x = 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (1)^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

سری فوق سری متناوب با جمله عمومی نزولی و حد صفر است لذا سری همگرا است بنابراین داریم

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \quad (-1 < x \leq 1)$$

$$h(x) = 2 \sin(2x) \quad (\text{ب})$$

حل:

$$\begin{aligned} h(x) &= 2 \sin 2x & \left(\sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad x \in \mathbb{R} \right) \\ &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= 2^{2n+2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} & x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$k(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad (\text{ت})$$

حل:

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=\bullet}^{\infty} (-1)^n x^n \qquad (-1 < x < 1)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+x^{\P}} = \sum_{n=\bullet}^{\infty} (-1)^n (x^{\P})^n \qquad (-1 < x^{\P} < 1)$$

$$= \sum_{n=\bullet}^{\infty} (-1)^n x^{\P n} \qquad (\bullet \leq x^{\P} < 1)$$

$$= \sum_{n=\bullet}^{\infty} (-1)^n x^{\P n} \qquad (-1 < x < 1)$$

پ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5-2x)^n}{3^n(n+1)}$ جواب: $R = \frac{3}{2}$ و بازه همگرایی $=(1, 4]$

۵. مقدار هر یک از سریهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^n}$ جواب: برابر $\frac{5}{6}$ است.

ب) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n e^{-2}}{(n-2)!}$ جواب: برابر ۴ است.

۶. سری مک لورن توابع زیر را بدست آورید.

الف) $f(x) = \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$ جواب: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{2n+1}}{2n+1} \quad (-1 < x < 1)$

ب) $f(x) = \frac{1}{(x^2-1)(2x^2+1)}$ جواب: $f(x) = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (1+(-1)^n 2^{n+1}) x^{2n} \quad \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

مسائل:

۱. صعودی و نزولی بودن دنباله های زیر را بررسی کنید.

الف) $a_n = \frac{3^n + 2}{2 \times 3^n + 3}$ جواب: دنباله صعودی است.

ب) $a_n = \frac{5^n}{n!}$ جواب: دنباله نه صعودی و نه نزولی است.

۲. همگرایی دنباله های زیر را بررسی کنید.

الف) $a_n = n \arctan\left(\frac{1}{n}\right)$ جواب: دنباله همگرا به ۱ است.

ب) $b_n = \sqrt{n^2 + n} - n$ جواب: دنباله به ۲ همگرا است.

پ) $c_n = \frac{5^n + 7^n + 9^n}{9^n}$ جواب: دنباله به ۱ همگرا است.

ت) $d_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ جواب: دنباله به $\frac{1}{e}$ (عدد نپر است) همگرا است.

۳. همگرایی یا واگرایی سریهای زیر را بررسی کنید.

الف) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n^2}}{n^{\frac{5}{2}}}$ جواب: سری همگرا است. (راهنمایی: آزمون $-p$ سری با $p = \frac{11}{6}$)

ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$ جواب: واگرا است. (راهنمایی: آزمون واگرایی)

۴. شعاع و بازه همگرایی هر یک از سریهای زیر را بدست آورید.

الف) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+3^n}{2^n} x^n$ جواب: $R = \frac{2}{3}$ و بازه همگرایی $\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

ب) $\sum_{n=1}^{\infty} n(x-2)^n$ جواب: $R = 1$ و بازه همگرایی $(1, 3)$

۵-۱. توابع متناوب

تابع $y = f(x)$ را متناوب با دوره تناوب T گوئیم هرگاه برای هر $x \in D_f$ ، $f(x+T) = f(x)$.

مثال:

الف) توابع $f(x) = \sin x$ و $g(x) = \cos x$ توابعی متناوب با دوره تناوب 2π هستند.

ب) توابع $f(x) = \tan x$ و $g(x) = \cot x$ توابع متناوب با دوره تناوب π هستند.

نکته: اگر $f_1, \dots, f_n$ توابعی متناوب با دوره تناوب T باشند آنگاه $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ تابع $f(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \dots + a_n f_n(x)$ تابعی متناوب با دوره تناوب T خواهد بود.

مثال: تابع $f(x) = 2\sin x + 3\cos x$ تابعی متناوب با دوره تناوب 2π است.

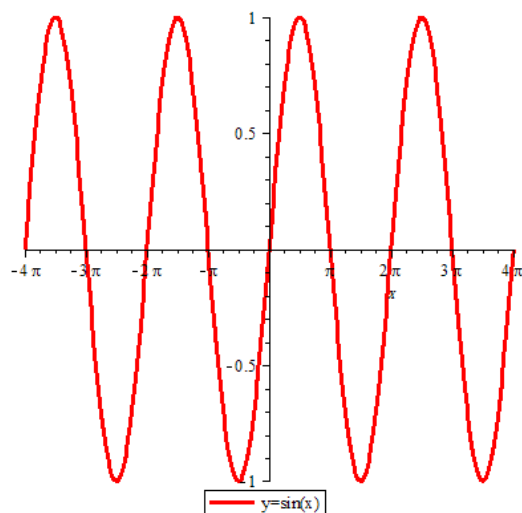
نمودار توابع متناوب

اگر تابع $y = f(x)$ متناوب با دوره تناوب $T > 0$ باشد نمودار تابع در فاصله های

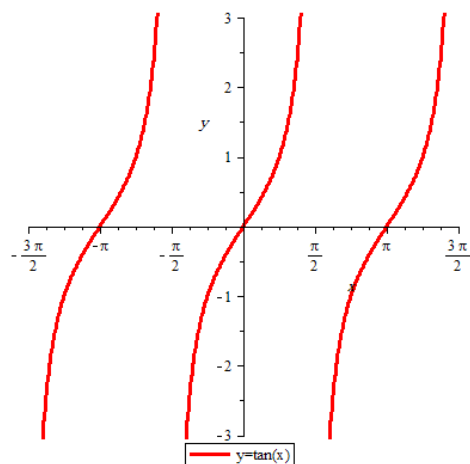
$$\dots, [-(n-1)T, -nT], \dots, [-T, 0], [0, T], [T, 2T], \dots, [nT, (n+1)T], \dots$$

دقیقا یکسان است.

مثال: نمودار تابع $f(x) = \sin x$ در فاصله های $\dots, [-2\pi, 0], [0, 2\pi], \dots$ یکسان است.



مثال: نمودار تابع $f(x) = \tan x$ در فاصله های $\dots, [-\pi, \pi], [\pi, 3\pi], \dots$ یکسان است.



۵-۲. سری فوریه

فرض کنید تابع $y = f(x)$ در فاصله $(-l, l)$ ($l \in \mathbb{R}^{>}$) تعریف شده است و برای هر x داریم $f(x + 2l) = f(x)$ در این صورت سری فوریه تابع f بصورت زیر تعریف می شود

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right)$$

که در آن a_n و b_n ضرایب سری فوریه نامیده می شوند و عبارتند از

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

مثال: سری فوریه تابع $f(x) = 1 + x$ با دوره تناوب 2π را در بازه $(-\pi, \pi)$ محاسبه کنید.

حل:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1+x) \cos \frac{n\pi x}{\pi} dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1+x) \cos nx \, dx \end{aligned}$$

اگر $n = 0$ داریم

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1+x) \cos 0 \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1+x) \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left(x + \frac{1}{2} x^2 \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\left(\pi + \frac{1}{2} \pi^2 \right) - \left(-\pi + \frac{1}{2} \pi^2 \right) \right) \\ &= \frac{1}{\pi} (2\pi) \\ &= 2 \end{aligned}$$

برای $n > 0$ داریم

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1+x) \cos nx \, dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx \, dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{n} \sin nx \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} \\
 &= \frac{1}{n\pi} (\sin n\pi - \sin(-n\pi)) \\
 &= \frac{1}{n\pi} (\sin n\pi + \sin n\pi) \\
 &= \frac{1}{n\pi} (2 \sin n\pi) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

در نتیجه داریم

$$a_n = \begin{cases} 2 & n = 0 \\ 0 & n > 0 \end{cases}$$

همچنین داریم

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1+x) \sin \frac{n\pi x}{\pi} dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1+x) \sin nx \, dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx \, dx \quad \left(\int x \sin nx \, dx = \frac{1}{n} \sin nx - \frac{x}{n} \cos nx \right) \\
&= \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{n} \sin nx - \frac{x}{n} \cos nx \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{\pi} \left(\left(\frac{1}{n} \sin n\pi - \frac{\pi}{n} \cos n\pi \right) - \left(\frac{1}{n} \sin(-n\pi) - \frac{-\pi}{n} \cos(-n\pi) \right) \right) \\
&= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{\pi}{n} \cos n\pi - \frac{\pi}{n} \cos n\pi \right) \\
&= \frac{-2\pi}{\pi n} \cos n\pi \\
&= \frac{-2(-1)^n}{n} \\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{n}
\end{aligned}$$

بنابراین داریم

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\pi}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\pi}\right) \right) \\
&= \frac{2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 \times \cos nx + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx \right) \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx \right) \\
&= 1 + \sin(x) - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \frac{1}{4} \sin 4x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots
\end{aligned}$$

مثال: فرض کنید $f(x) = \begin{cases} 1 & -\pi < x < 0 \\ 0 & 0 \leq x < \pi \end{cases}$ باشد سری فوری تابع f را بیابید.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} dx = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = 0$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx \\ &= -\frac{1}{n\pi} \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= -\frac{1}{n\pi} ((-1)^n - 1) \end{aligned}$$

بنابراین $b_n = 0$ و $b_{n-1} = \frac{2}{\pi(2n-1)}$ در نتیجه

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$$

سری فوریه لزوماً به خود تابع f همگرا نیست بلکه شرایطی برای این منظور باید فراهم باشد.

قضیه: فرض کنید تابع $y = f(x)$ در فاصله $(-l, l)$ تعریف شده و دارای دوره تناوب $2l$ باشد همچنین $f(x)$ و $f'(x)$ در $(-l, l)$ بطور قطعه ای پیوسته باشند در این صورت

الف) اگر f در x پیوسته باشد سری فوریه به $f(x)$ همگرا است.

ب) اگر f در x پیوسته نباشد سری فوریه به $\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$ همگرا است.

مثال: سری فوریه تابع $f(x) = \begin{cases} -k & -\pi < x < 0 \\ k & 0 < x < \pi \end{cases}$ را برای فاصله $(-\pi, \pi)$ بنویسید.

حل

$$\begin{aligned}
 a_{\bullet} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\bullet} -k dx + \int_{\bullet}^{\pi} k dx \right) \\
 &= \frac{1}{\pi} \left((-kx) \Big|_{-\pi}^{\bullet} + (kx) \Big|_{\bullet}^{\pi} \right) \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(-k(\bullet + \pi) + k(\pi - \bullet) \right) \\
 &= \frac{1}{\pi} (-k\pi + k\pi) = \bullet
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\bullet} -k \cos nx dx + \int_{\bullet}^{\pi} k \cos nx dx \right) \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(-k \int_{-\pi}^{\bullet} \cos nx dx + k \int_{\bullet}^{\pi} \cos nx dx \right) \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{-k}{n} \sin nx \Big|_{-\pi}^{\bullet} + \frac{k}{n} \sin nx \Big|_{\bullet}^{\pi} \right) \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{-k}{n} \sin nx \Big|_{-\pi}^{\bullet} + \frac{k}{n} \sin nx \Big|_{\bullet}^{\pi} \right) \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{-k}{n} (\sin \bullet - \sin(-n\pi)) + \frac{k}{n} (\sin n\pi - \sin \bullet) \right) \\
 &= \frac{1}{\pi} (\bullet + \bullet) \\
 &= \bullet
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \\
&= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\cdot} -k \sin nx dx + \int_{\cdot}^{\pi} k \sin nx dx \right) \\
&= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\cdot} -k \sin nx dx + \int_{\cdot}^{\pi} k \sin nx dx \right) \\
&= \frac{1}{\pi} \left(-k \int_{-\pi}^{\cdot} \sin nx dx + k \int_{\cdot}^{\pi} \sin nx dx \right) \\
&= \frac{1}{\pi} \left(\frac{k}{n} \cos nx \Big|_{-\pi}^{\cdot} - \frac{k}{n} \cos nx \Big|_{\cdot}^{\pi} \right) \\
&= \frac{1}{\pi} \left(\frac{k}{n} (\cos \bullet - \cos(-n\pi)) - \frac{k}{n} (\cos n\pi - \cos \bullet) \right) \\
&= \frac{k}{\pi n} (1 - \P \cos n\pi + 1) \\
&= \frac{\P k}{\pi n} (1 - \cos n\pi) \\
&= \frac{\P k}{\pi n} (1 - (-1)^n)
\end{aligned}$$

بنابراین برای n زوج داریم $b_n = \bullet$ و برای n های فرد داریم $\frac{\P k}{\pi n}$ در نتیجه می توانیم بنویسیم

$$b_{\P n} = \bullet, \quad b_{\P n+1} = \frac{\P k}{\pi n}$$

با جایگذاری داریم

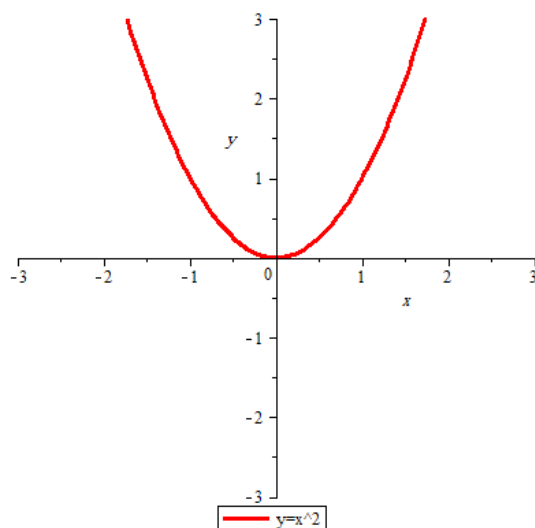
$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{a_{\cdot}}{\P} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\pi}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\pi}\right) \right) \\
&= \frac{\cdot}{\P} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\bullet \times \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) \\
&= \sum_{n=\bullet}^{\infty} \frac{\P k}{(\P n + 1)\pi} \sin((\P n + 1)x) \\
&= \frac{\P k}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{\P} \sin \P x + \frac{1}{\circ} \sin \circ x + \dots \right)
\end{aligned}$$

در مثال بالا اگر k را برابر $\frac{\pi}{4}$ انتخاب کنیم آنگاه داریم $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{4}$ با جایگذاری $x = \frac{\pi}{2}$ و $k = \frac{\pi}{4}$ در سری فویه فوق داریم

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4} &= \frac{\frac{\pi}{4}}{\pi} \left(\sin \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3} \sin 3 \frac{\pi}{2} + \frac{1}{5} \sin 5 \frac{\pi}{2} + \dots \right) \\ \Rightarrow \frac{\pi}{4} &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots\end{aligned}$$

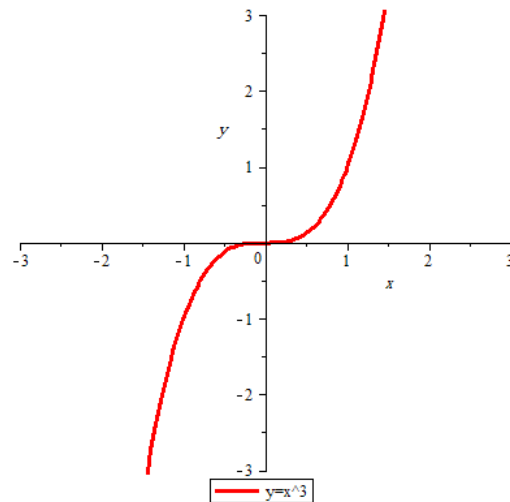
تعریف: تابع $y = f(x)$ را زوج گوئیم هرگاه برای هر $x \in D_f$ ، $f(-x) = f(x)$ محور y ها محور تقارن برای نمودار توابع زوج است.

مثال: تابع $f(x) = x^2$ تابعی زوج است.



تعریف: تابع $y = f(x)$ را فرد گوئیم هرگاه برای هر $x \in D_f$ ، $f(-x) = -f(x)$ مرکز مختصات مرکز تقارن برای نمودار توابع فرد است.

مثال: تابع $f(x) = x^3$ تابعی فرد است.



نکته: اگر تابع $y = f(x)$ در فاصله $[-l, l]$ پیوسته باشد آنگاه

$$\int_{-l}^l f(x) dx = 2 \int_0^l f(x) dx \quad \text{الف اگر } f \text{ زوج باشد آنگاه}$$

$$\int_{-l}^l f(x) dx = 0 \quad \text{ب اگر } f \text{ فرد باشد آنگاه}$$

نتیجه اگر تابع f بر بازه $(-l, l)$ فرد باشد آنگاه برای $n \geq 1$ داریم $a_n = 0$ و اگر f زوج باشد آنگاه برای $n \geq 1$ داریم $b_n = 0$

مثال:

الف) سری فوریه تابع $f(x) = x^2$ بر بازه $(-l, l)$ را بنویسید.

ب) مقدار سری $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n^2} \right)$ را بدست آورید.

حل:

الف) چون تابع فوق زوج است لذا داریم $b_n = 0$ برای هر $n \geq 1$.

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx \\
&= \frac{1}{l} \int_{-l}^l x^r dx \\
&= \frac{1}{l} \frac{1}{r+1} x^{r+1} \Big|_{-l}^l \\
&= \frac{1}{r+1} (l^{r+1} - (-l)^{r+1}) \\
&= \frac{r!}{r!} = \frac{r!}{r!}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \\
&= \frac{1}{l} \int_{-l}^l x^r \cos \frac{n\pi x}{l} dx \\
&= \frac{r!}{l} \int_{-l}^l x^r \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad \left(\int x^r \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{lx^r}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{l} - \frac{r!}{n^r \pi^r} \sin \frac{n\pi x}{l} + \frac{r!x}{n^r \pi^r} \cos \frac{n\pi x}{l} \right) \\
&= \frac{r!}{l} \left(\frac{lx^r}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{l} - \frac{r!}{n^r \pi^r} \sin \frac{n\pi x}{l} + \frac{r!x}{n^r \pi^r} \cos \frac{n\pi x}{l} \right) \Big|_{-l}^l \\
&= \frac{r!}{nl\pi} \left(x^r \sin \frac{n\pi x}{l} - \frac{r!}{n^r \pi^r} \sin \frac{n\pi x}{l} + \frac{r!x}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{l} \right) \Big|_{-l}^l \\
&= \frac{r!}{n\pi} \left((l^r \sin \frac{n\pi l}{l} - \frac{r!}{n^r \pi^r} \sin \frac{n\pi l}{l} + \frac{r! \times l}{n\pi} \cos \frac{n\pi l}{l}) - (-l^r \sin \frac{n\pi \bullet}{l} - \frac{r!}{n^r \pi^r} \sin \frac{n\pi \bullet}{l} + \frac{r! \bullet}{n\pi} \cos \frac{n\pi \bullet}{l}) \right) \\
&= \frac{r!}{n\pi} \left((l^r \sin n\pi - \frac{r!}{n^r \pi^r} \sin n\pi + \frac{r! \times l}{n\pi} \cos n\pi) \right) \\
&= \frac{r!}{n\pi} \left(\frac{r! \times l}{n\pi} \cos n\pi \right) \\
&= \frac{r!}{n^r \pi^r} (-1)^n
\end{aligned}$$

بنابراین داریم

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{a}{\text{۲}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\pi}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\pi}\right) \right) \\
 &= \frac{\text{۲}l^{\text{۲}}}{\text{۳}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\text{۴}l^{\text{۲}}(-)^n}{n^{\text{۲}}\pi^{\text{۲}}} \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + \bullet \times \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right) \\
 &= \frac{l^{\text{۲}}}{\text{۳}} + \frac{\text{۴}l^{\text{۲}}}{\pi^{\text{۲}}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-)^n}{n^{\text{۲}}} \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right)
 \end{aligned}$$

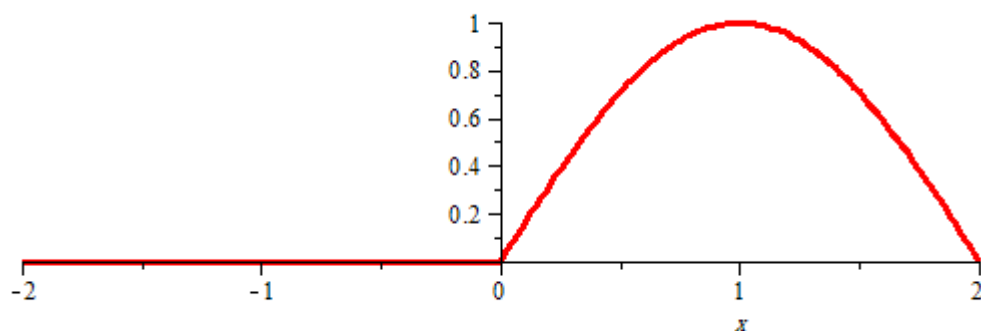
ب) اگر بجای x مقدار صفر قرار دهیم داریم

$$\begin{aligned}
 f(\bullet) &= \frac{l^{\text{۲}}}{\text{۳}} + \frac{\text{۴}l^{\text{۲}}}{\pi^{\text{۲}}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-)^n}{n^{\text{۲}}\pi^{\text{۲}}} \cos\left(\frac{n\pi \times \bullet}{l}\right) \right) \\
 &= \frac{l^{\text{۲}}}{\text{۳}} + \frac{\text{۴}l^{\text{۲}}}{\pi^{\text{۲}}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-)^n}{n^{\text{۲}}} \right)
 \end{aligned}$$

چون $f(\bullet) = \bullet$ با قرار دادن $l = 1$ داریم

$$\frac{\text{۱}^{\text{۲}}}{\text{۳}} + \frac{\text{۴} \times \text{۱}^{\text{۲}}}{\pi^{\text{۲}}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n^{\text{۲}}} \right) = \bullet \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n^{\text{۲}}} \right) = -\frac{\pi^{\text{۲}}}{\text{۱۲}}$$

$$\text{مثال: سری فوریه تابع سینوسی یکسو شده نیم موج} \quad f(x) = \begin{cases} \bullet & -\text{۲} < x < \bullet \\ \sin \frac{\pi}{\text{۲}} x & \bullet \leq x \leq \text{۲} \end{cases} \text{ را بیابید.}$$



$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\sqrt{\pi}}^{\sqrt{\pi}} f(x) dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\sqrt{\pi}}^{\sqrt{\pi}} \sin \frac{\pi}{\sqrt{\pi}} x \, dx \\
&= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\pi}{\pi} \cos \frac{\pi}{\sqrt{\pi}} x \Big|_{-\sqrt{\pi}}^{\sqrt{\pi}} \\
&= -\frac{1}{\pi} (\cos \pi - \cos 0) \\
&= -\frac{1}{\pi} (-1 - 1) \\
&= -\frac{1}{\pi} \times (-2) \\
&= \frac{2}{\pi}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\mathfrak{r}} \int_{-\mathfrak{r}}^{\mathfrak{r}} f(x) \cos \frac{n\pi x}{\mathfrak{r}} dx \\
&= \frac{1}{\mathfrak{r}} \int_{-\mathfrak{r}}^{\mathfrak{r}} f(x) \cos \frac{n\pi x}{\mathfrak{r}} dx \\
&= \frac{1}{\mathfrak{r}} \int_{-\mathfrak{r}}^{\mathfrak{r}} \sin \frac{\pi}{\mathfrak{r}} x \cos \frac{n\pi x}{\mathfrak{r}} dx \quad \left(\sin x \cos y = \frac{1}{2} (\sin(x+y) + \sin(x-y)) \right) \\
&= \frac{1}{\mathfrak{r}} \int_{-\mathfrak{r}}^{\mathfrak{r}} \frac{1}{\mathfrak{r}} \left(\sin \left(\frac{\pi}{\mathfrak{r}} x + \frac{n\pi x}{\mathfrak{r}} \right) + \sin \left(\frac{\pi}{\mathfrak{r}} x - \frac{n\pi x}{\mathfrak{r}} \right) \right) dx \\
&= \frac{1}{\mathfrak{z}} \int_{-\mathfrak{r}}^{\mathfrak{r}} \sin \left(\frac{\pi}{\mathfrak{r}} x + \frac{n\pi x}{\mathfrak{r}} \right) dx + \frac{1}{\mathfrak{z}} \int_{-\mathfrak{r}}^{\mathfrak{r}} \sin \left(\frac{\pi}{\mathfrak{r}} x - \frac{n\pi x}{\mathfrak{r}} \right) dx \\
&= \frac{1}{\mathfrak{z}} \int_{-\mathfrak{r}}^{\mathfrak{r}} \sin \left(\frac{\pi}{\mathfrak{r}} x (1+n) \right) dx + \frac{1}{\mathfrak{z}} \int_{-\mathfrak{r}}^{\mathfrak{r}} \sin \left(\frac{\pi}{\mathfrak{r}} x (1-n) \right) dx \quad (n > 1) \\
&= \frac{1}{\mathfrak{z}} \left(-\frac{\mathfrak{r}}{\pi(1+n)} \cos \left(\frac{\pi}{\mathfrak{r}} x (1+n) \right) \right) \Big|_{-\mathfrak{r}}^{\mathfrak{r}} + \frac{1}{\mathfrak{z}} \left(-\frac{\mathfrak{r}}{\pi(1-n)} \cos \left(\frac{\pi}{\mathfrak{r}} x (1-n) \right) \right) \Big|_{-\mathfrak{r}}^{\mathfrak{r}} \\
&= -\frac{1}{\mathfrak{r}\pi(1+n)} (\cos(\pi(n+1)) - \cos \bullet) - \frac{1}{\mathfrak{r}\pi(1-n)} (\cos(\pi(1-n)) - \cos \bullet) \\
&= -\frac{1}{\mathfrak{r}\pi(1+n)} ((-1)^{n+1} - 1) - \frac{1}{\mathfrak{r}\pi(1-n)} ((-1)^{n+1} - 1) \\
&= -\frac{1}{\mathfrak{r}\pi} ((-1)^{n+1} - 1) \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(1-n)} \right) \\
&= -\frac{1}{\mathfrak{r}\pi} ((-1)^{n+1} - 1) \left(\frac{\mathfrak{r}}{1-n^{\mathfrak{r}}} \right) \\
&= \frac{(-1)^{n+1} - 1}{\pi(1-n^{\mathfrak{r}})}
\end{aligned}$$

بنابراین اگر $n > 1$ داریم

$$a_{n=\mathfrak{r}k} = \frac{-\mathfrak{r}}{\pi(1-n^{\mathfrak{r}})}$$

9

$$a_{n=\mathfrak{r}k+1} = \bullet$$

برای $n = 1$ داریم

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} f(x) \cos \frac{\pi x}{\sqrt{2}} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sin \frac{\pi}{\sqrt{2}} x \cos \frac{\pi x}{\sqrt{2}} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} x + \frac{\pi x}{\sqrt{2}}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} x - \frac{\pi x}{\sqrt{2}}\right) \right) dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sin(\pi x) dx \\
&= \frac{1}{2} \frac{-1}{\pi} \cos \pi x \Big|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \\
&= -\frac{1}{2\pi} (\cos \sqrt{2}\pi - \cos 0) \Big|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin \frac{n\pi}{\sqrt{2}} x dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sin \frac{\pi x}{\sqrt{2}} \sin \frac{n\pi}{\sqrt{2}} x dx \quad \left(\sin x \sin y = -\frac{1}{2} (\cos(x+y) - \cos(x-y)) \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} -\frac{1}{2} \left(\cos\left(\frac{\pi x}{\sqrt{2}} + \frac{n\pi}{\sqrt{2}} x\right) - \cos\left(\frac{\pi x}{\sqrt{2}} - \frac{n\pi}{\sqrt{2}} x\right) \right) dx \\
&= -\frac{1}{2} \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(\cos\left(\frac{\pi x}{\sqrt{2}} (1+n)\right) - \cos\left(\frac{\pi x}{\sqrt{2}} (1-n)x\right) \right) dx \quad (n > 1) \\
&= -\frac{1}{2} \left(\frac{2}{\pi(1+n)} \sin\left(\frac{\pi x}{\sqrt{2}} (1+n)\right) - \frac{2}{\pi(1-n)} \sin\left(\frac{\pi x}{\sqrt{2}} (1-n)\right) \right) \Big|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}\pi} \left(\frac{1}{(1+n)} \sin(\pi(1+n)) - \frac{1}{(1-n)} \sin(\pi(1-n)) \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

برای $n = 1$ داریم

$$\begin{aligned}
b_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} f(x) \sin \frac{\pi}{\sqrt{2}} x dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sin \frac{\pi x}{\sqrt{2}} \sin \frac{\pi}{\sqrt{2}} x dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sin^2 \frac{\pi x}{\sqrt{2}} dx & \left(\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{1 - \cos \pi x}{2} dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (1 - \cos \pi x) dx \\
&= \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{\pi} \sin \pi x \right) \Big|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \\
&= \frac{1}{2} \left(\sqrt{2} - \frac{1}{\pi} \sin \sqrt{2} \pi \right) \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

بنابراین داریم

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\sqrt{2}}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\sqrt{2}}\right) \right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} + a_1 \cos\left(\frac{\pi x}{\sqrt{2}}\right) + b_1 \sin\left(\frac{\pi x}{\sqrt{2}}\right) + \sum_{n=\sqrt{2}}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\sqrt{2}}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\sqrt{2}}\right) \right) \\
&= \frac{1}{\pi} + 0 \times \cos\left(\frac{\pi x}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \sin\left(\frac{\pi x}{\sqrt{2}}\right) + \sum_{n=\sqrt{2}}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\sqrt{2}}\right) \right) \\
&= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{\pi x}{\sqrt{2}}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \cos \pi x - \frac{\sqrt{2}}{10\pi} \cos \sqrt{2} \pi x - \frac{\sqrt{2}}{30\pi} \cos \sqrt{3} \pi x + \dots
\end{aligned}$$