

فصل سوم : سری ها

عبارت

فرض کنید دنباله a_n (از $n=1$ تا ∞) یک دنباله نامتناهی از اعداد باشد،

مجموع جملات این دنباله یعنی : $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n + \dots$

رایک سری گویند و آن را با نماد $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نمایش می دهند.

① شرط لازم همگرایی :

اگر سری $\sum a_n$ همگرا باشد، آن به $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ در غیر این صورت، سری واگراست.

نکته بسیار مهم (A) جمع دو سری همگرا، سری همگرای سازد.
(B) جمع یک سری همگرا با یک سری واگرا، سری واگرای سازد.

* سری تلسکوپی : $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - a_{k+1})$ سری تلسکوپی گویند. (در این صورت :

$$\sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1}) = a_1 - a_{n+1}$$

در نتیجه :

$$S = \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_1 - a_{n+1}) = \text{مجموع خالص}$$

* سری هندسی : $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ را سری هندسی گویند، که به ازای $|q| < 1$

واگراست؛ و به ازای $|q| \geq 1$ همگرا به $s = \frac{a}{1-q}$ می باشد.

نکته (q قدر نسبت و a جمله اول است).

۸ سوال های بسیار مهم :

عدد هکلیه سری های زیر را تعیین کنید ؟

قرص

A) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

حل) سعی می کنیم سری را به صورت سری تلسکوپی در آوریم.

برای این کار می توانیم به جای $\frac{1}{n(n+1)}$ بنویسیم :

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

نکته) (از روش تجربی که این کار را کردیم!)

الین داریم :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

دفاعیه تلسکوپی $\left(\sum_{k=1}^n a_k - a_{k+1} \right)$ دو جمله ای متوالی از هم کم شده اند ،

اگر وقت کنیم ، مشاهده می کنیم که $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$ تفاضل دو جمله ای

متوالی است .

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - a_{k+1}) = a_1 - a_{n+1}$$

پس با توجه لری از قاعده ی :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \underbrace{a_1}_{\text{یعنی جمله اول}} - \underbrace{a_{n+1}}_{\text{یعنی جمله } n+1}$$

داریم :

طبق قاعده تلسکوپی :

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_1 - a_{n+1}) = S$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{\infty} = 1$$

نکته) $\left(\frac{1}{\infty} = 0 \right)$

$$B) \sum_{k=1}^{\infty} \log \frac{k(k+2)}{(k+1)^2}$$

بسیار مهم)

۳

حل) برای سادگی کار، می‌توانیم به جای بنویسیم: $\frac{k(k+2)}{(k+1)^2}$

$$\frac{k(k+2)}{(k+1)^2} = \frac{k \cdot (k+2)}{(k+1) \cdot (k+1)} = \frac{k}{k+1} \cdot \frac{k+2}{k+1}$$

پس در سری داریم:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \log \frac{k(k+2)}{(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \log \left(\frac{k}{k+1} \cdot \frac{k+2}{k+1} \right)$$

اما طبق خاصیت مهمی در لگاریتم‌ها $\Leftarrow$

$$\log(a \cdot b) = \log a + \log b$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \log \left(\frac{k}{k+1} \cdot \frac{k+2}{k+1} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \log \left(\frac{k}{k+1} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \log \left(\frac{k+2}{k+1} \right) \quad *$$

$$\frac{k+2}{k+1} = \left(\frac{k+1}{k+2} \right)^{-1} \quad \text{اما برای می‌توانیم بنویسیم:}$$

$$\log(a)^b = b \log a$$

و اما طبق خاصیت دیگر لگاریتم:

$$* \quad \log \left(\frac{k+2}{k+1} \right) = \log \left(\frac{k+1}{k+2} \right)^{-1} = -\log \left(\frac{k+1}{k+2} \right) \quad \text{داریم:}$$

و در نهایت:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \log \left(\frac{k}{k+1} \right) - \sum_{k=1}^{\infty} \log \left(\frac{k+1}{k+2} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\log \frac{k}{k+1} - \log \frac{k+1}{k+2} \right)$$

$$= a_1 - a_{n+1} = \left(\log \left(\frac{1}{2} \right) - \log \left(\frac{n+1}{n+2} \right) \right)$$

سری تلسکوپی

مرحله

در نهایت $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\log \frac{1}{2} - \log \left(\frac{n+1}{n+2} \right) \right) = \log \left(\frac{1}{2} \right)$ ✓

$\log 1 = 0$

نکته مهم

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \log \left(\frac{n+a}{n+b} \right) = \log(1) = 0$$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(4n-3)(4n+1)} \right)$

حل) با استفاده از روش تجزیه کسرها:

$$\frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{A}{4n-3} + \frac{B}{4n+1}$$

نابت می شود که نهایتاً:

$$\begin{cases} A = \frac{1}{4} \\ B = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

پس:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(4n-3)(4n+1)} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\frac{1}{4}}{4n-3} - \frac{\frac{1}{4}}{4n+1} \right)$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n+1} \right)$$

با کمی دقت می شود که سری، سری تلسکوپی است!

زیاد دو جمله ای متوالی است

$$\underbrace{\left(\frac{1}{4n-3} \right)}_{\text{جمله اول}} - \underbrace{\left(\frac{1}{4(n+1)-3} \right)}_{\text{جمله بعدی}} = \frac{1}{4n+1}$$

پس $\frac{1}{4} (a_1 - a_{n+1}) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4(1)-3} - \frac{1}{4n+1} \right)$

طبق قاعده تلسکوپی $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{4n+1} \right) \right) = \frac{1}{4}$

$\frac{1}{4(\infty)+1} = \frac{1}{\infty} = 0$

نکته $\frac{\infty}{\infty} = 0$

* آزمون های همگرایی :

مره

① آزمون مقایسه : فرض کنید a_n و b_n با هم $a_n < b_n$:

(a_n و b_n ۲ دنباله هستند)

در این صورت اگر $\sum b_n$ همگرا باشد، آنگاه $\sum a_n$ نیز همگراست.
اگر $\sum a_n$ واگرا باشد، آنگاه $\sum b_n$ نیز واگراست.

قضیه بارم (سری) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ همگراست، اگر $p > 1$ باشد.

و واگراست، اگر $p \leq 1$ باشد.

② آزمون نسبت (دالامبر) :

هرگاه $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ ، در این صورت :

الف) اگر $L < 1$ آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست.
ب) اگر $L > 1$ آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگراست.
ج) اگر $L = 1$ این آزمون نتیجه نمی دهد. (نمی توان از این آزمون برای همگرایی یا واگرایی سری را مشخص کرد).

③ آزمون ریشه (آزمون ریشه لوس) :

برای سری با جمله مثبت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ هرگاه $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L$ در این صورت :

الف) اگر $L < 1$ آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست.
ب) اگر $L > 1$ آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگراست.
ج) اگر $L = 1$ این آزمون بی نتیجه است.

④ آزمون استرال :

فر ۴

اگر تابع f روی $(a, +\infty)$ پیوسته، نزولی و مثبت باشد و $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ همگراست؛ و فقط اگر استرال نظیر سری

یعنی $\int_1^{\infty} f(x) dx$ همگرا باشد.

به مثال‌های بسیار مهم زیر توجه فرمایید.
* همگرایی یا واگرایی سری‌های زیر را تعیین کنید:

A) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{ne^n}$

حل) با استفاده از آزمون دالامبر :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\frac{1}{(n+1)e^{n+1}}}{\frac{1}{ne^n}} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{ne^n}{(n+1)e \cdot e^n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{e} \right) = \frac{1}{e} = \frac{1}{2.718} < 1$$

پس سری همگراست.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} \stackrel{\text{طبق قضیه}}{\text{می‌توان}} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n} \right) = 1$$

چون $L < 1$ شد، پس طبق درجه‌ی آزمون دالامبر، سری همگراست.

B) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$

حل) طبق درجه در صفا ①
شرط لازم همگرایی این بود که برای سری $\sum a_n$ ، $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ شود، اما برای

سری مسئله (یعنی $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$) داریم :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = 1 \quad (\text{اینجا دارد})$$

(پس سری واگراست.)

$$\Rightarrow e \neq 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} - 1 \right)^n = e \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n} \right) = e$$
 رفع ابهام $\Rightarrow$

$$c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \quad \text{✓}$$

فوق القاره هم

حل) از آزمون دالامبر :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{((n+1)!)^2}{2(n+1)!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{((n+1)!)^2 \cdot (2n)!}{(n!)^2 \cdot (2n+2)!} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{2(2n+1)} \right) =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{4n+2} \right) \stackrel{\text{پروان}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{4n} \right) = \left(\frac{1}{4} = L \right) < 1$$

چون $L < 1$ پس سری همگراست.

$$D) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n!} \right)$$

حل) با استفاده از آزمون دالامبر :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{(n+1+1)}{(n+1)!}}{\frac{(n+1)}{n!}} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n! \cdot (n+2)}{(n+1)! \cdot (n+1)} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\cancel{n!} \cdot (n+2)}{\cancel{n!} (n+1)} \cdot \frac{n+2}{n+1} \right)$$

$(n+1)! = (n+1) \cdot n!$

طبق قضیه پروان

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{\infty+1} = \frac{\text{عدد}}{\infty} = (0 = L) < 1 \Rightarrow$$

(پس سری همگراست.)

$$E) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2}$$

حل

حل طبق آزمون ریشه داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2}} \right)$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad *$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{\frac{n^2}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e > 1 \rightarrow$$

در نتیجه سری واگراست.

در مثال B در صفحه 3 حل شد.

$$F) \sum \left(\frac{3^n n!}{n^n} \right)$$

حل از آزمون دالامبر:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3^{n+1} \cdot (n+1)!}{3^n \cdot (n!) \cdot n^n} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3 \cdot \cancel{n!} \cdot (n+1) \cdot n^n}{3 \cdot \cancel{n!} \cdot (n+1)^{n+1}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3 \cdot n}{(n+1)^n} \right)$$

$$\boxed{\frac{b+c}{a} = \frac{b}{a} + \frac{c}{a}}$$

$$\rightarrow (n+1)^n \cdot (n+1)^{-1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{(n+1)^n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} = \frac{3}{e} < 1 \Rightarrow \text{سری همگراست.}$$

مثال قبل

$$G) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n} \text{ سری}$$

$$f(x) = \frac{1}{x \ln x} \quad \text{حل) آزمون استرال:}$$

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \ln(\ln x) \Big|_2^{+\infty} = \ln(\ln \infty) - \ln(\ln 2) = \infty$$

سری واگراست.

$$\begin{cases} \ln x = t \\ \frac{dx}{x} = dt \end{cases} \quad \text{تغییر متغیر}$$

$$\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t} = \ln t + c = \ln(\ln x)$$

$$H) \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n^2}$$

$$\text{نکته) } a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

$$e^{-x^2} = \frac{1}{e^{x^2}}$$

$$\int_1^{+\infty} x e^{-x^2} dx = \frac{-1}{2} \int_1^{+\infty} e^{-x^2} (-2x dx) = \frac{-1}{2} \left[\frac{-x^2}{e^{-x^2}} \right]_1^{+\infty}$$

$$= \frac{-1}{2} \left(\frac{1}{e^{x^2}} \right) \Big|_1^{+\infty} = \frac{-1}{2} \left(\frac{1}{e^{\infty}} - \frac{1}{e^1} \right) = \frac{1}{2e} \Rightarrow \text{سری همگراست.}$$

$$\text{نکته) } \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$I) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$$

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad \text{حل) آزمون استرال:}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2} (\ln x)^2 \Big|_1^{\infty} = \infty$$

سری واگراست.

$$\begin{cases} \ln x = t \\ \frac{1}{x} dx = dt \end{cases} \Rightarrow I = \int t dt = \frac{1}{2} t^2$$

نکته بسیار مهم

در آزمون استرال اگر مقدار استرال عددی منتهی شد، سری همگراست.

و اگر به ∞ رسید سری واگراست.

$$f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$$

حل) از ماک دالامبر :

مرحله ۱۰

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} \right)$$

$$\text{می دانیم} \begin{cases} (n+1)^{n+1} = (n+1)^n \cdot (n+1) \\ (n+1)! = (n+1)n! \end{cases}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n! \cdot (n+1)^n \cdot (n+1)}{n^n \cdot (n+1)n!} \right)$$

در مثال E, B حل شد.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e > 1$$

سری و الگوست.

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b} \right)^n \quad \text{نکته}$$

تمرین فوق العاده مهم و طلایی

$$① \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Arctg} n}{e^{n^2+1}}$$

(راهنامه: از ماک دالامبر)
در نهایت سری همگراست.

$$② \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

(راهنامه: از ماک دالامبر - سری همگراست)

$$③ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2+1}$$

(راهنامه: طبق از ماک مقاله، ثابت می شود)
سری همگراست.

$$\text{حل) می دانیم: } -1 \leq \sin n \leq 1 \rightarrow \frac{-1}{n^2+1} \leq \frac{\sin n}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2+1}$$

چون این سری همگراست،

پس سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2+1}$ نیز همگراست.

$$④ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2} \rightarrow \text{(راهنامه: از ماک دالامبر، همگراست)}$$

$$⑤ \sum \frac{2^n + 5^n}{3^n}$$

صرا

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2^n + 5^n}{3^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{3} \right)^n \quad \text{راهنمایی:}$$

در نهایت طبق نکته ای در صفحه اول ، جمع سری های هندسی ، سری های توانی و ...

$$⑥ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$$

(راهنمایی : از مخرج دالامبر)

تجارب دسوار :

* سری با جملات مثبت و منفی :

سری $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ را که علامت u_n به دلخواه تغییر می‌کند، سری با جملات مثبت و منفی می‌گویند.

← سری سری $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ را که در آن $\{a_n\}$ دنباله‌ای با جملات مثبت است، سری متناوب گویند.

آزمون‌های همگرایی :

① آزمون دالامبر برای همگرایی مطلق :

هرگاه $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ یک سری با جملات مثبت و منفی باشد و $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = L$ ،

در این صورت :

الف) اگر $L < 1$ آن‌گاه سری همگرایی مطلق است.
ب) اگر $L > 1$ " " " " و اگر است.

نکته مهم : اگر سری همگرایی مطلق باشد، آن‌گاه همگرا نیز خواهد بود.

② آزمون ریشه (کوسه) برای همگرایی مطلق :

هرگاه $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ یک سری با جملات مثبت و منفی باشد و $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = L$ ،

در این صورت :

الف) اگر $L < 1$ آن‌گاه سری همگرایی مطلق است.
ب) اگر $L > 1$ " " " " سری و اگر است.

* به سال‌های صفه بعدی وقت کنید :

A) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$ مر ۱۳

نکته: بیار هم هرگاه در سری متناوب $\sum u_n$ ، $\sum |u_n|$ همگرا باشد،

سری $\sum u_n$ نیز همگرای مطلق خواهد بود.

$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} \right|$ در هر حالت یا منفی یک است یا مثبت یک که با قدر مطلق گیری یک می شود.

$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ سری هندسی با قدر نسبت $\frac{1}{2}$

پس سری همگراست.

لذا سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$ همگرای مطلق است.

B) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^n}{(2n)!}$

حل) با استفاده از آرایه دالامبر داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(-(n+1))^{n+1}}{(2(n+1))!}}{\frac{(-n)^n}{(2n)!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} \cdot (n+1)^{n+1} \cdot (2n)!}{(-1)^n \cdot n^n \cdot (2(n+1))!} \right|$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)^n (n+1) (2n)!}{n^n (2n+2)!} \right|$$

سوال در همین جزوه

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)^n (n+1) (2n)!}{n^n (2n+2)(2n+1)(2n)!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \cdot \left(\frac{n+1}{4n^2+6n+2} \right) = 0 = L$$

فقط می توان

چون $1 < (L=0)$ پس سری همگراست.

$$c) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

حل) با توجه به آزمون راب:

مر ۱۴

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left|(-1)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}\right|}$$

در نهایت چون قدر مطلق داریم، حاصلش یک می شود!

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e > 1$$

(نکته)

سری واگراست.

$$\sqrt[c]{a^b} = a^{\frac{b}{c}}$$

D)

مر ۱۵

یک سوال ۱۰۰٪ امکان

* شعاع و بازه همگرایی سری‌های توانی :

برای سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ شعاع همگرایی برابر است با :

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

(با استفاده از آزمون دالامبر) $\Leftarrow$

و بازه همگرایی (فاصله همگرایی) برابر است با :

$$|x-c| < R$$

or

$$-R+c < x < R+c$$

*

$$-R < x-c < R$$

همیشه باید همگرایی در ابتدا و انتهای بازه نیز بررسی شود.

مثال) شعاع و بازه همگرایی سری‌های زیر را بیابید :

$$A) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$$

حل) در این سری، $a_n = \frac{1}{2^n}$ است. پس :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2^n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2^n}{2^{n+1}} \right| = \frac{1}{2} = \frac{1}{R}$$

پس شعاع همگرایی برابر است با :

$$R = 2 \checkmark$$

$$|x| < 2$$

و اما طبق درسام بازه همگرایی برابر خواهد بود با :

$$\text{یعنی} \rightarrow |x| < 2 \rightarrow -2 < x < 2$$

بررسی ابتدا و انتهای بازه $\Leftarrow$

$$x = +2 \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = n \quad \text{و اُلرست.}$$

$$x = -2 \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2)^n (-1)^n}{2^n} \Rightarrow \text{و اُلرست.}$$

$$\text{بازه همگرایی} \rightarrow -2 < x < 2$$

B) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-3)^n}{n^2}$ مر ۱۴

$a_n = \frac{1}{n^2}$ (حل)

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n^2}{(n+1)^2} \right| = \frac{1}{R}$
 طبق قضیه پرتوان

$\frac{1}{R} = 1 \rightarrow R = 1$ (نقطه همگرایی)

در نتیجه:
 و اما بازه همگرایی:

$|2x-3| < R \Rightarrow |2x-3| < 1$

$-1 < 2x-3 < 1 \rightsquigarrow +2 < 2x < 4$

باقی‌قسم طرفین بر 2:

$+1 < x < 2$: بازه همگرایی

بررسی نقاط ابتدا و انتهای بازه:

$\underline{x=1} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-3)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ همگراست.

$\underline{x=2} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-3)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ همگراست.

پس بازه همگرایی برابر است با:

$1 \leq x \leq 2$

دستگاه همگرایی برابر است با:

$R = 1$

$$c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{(n^2+1)3^n}$$

حل

$$a_n = \frac{1}{3^n(n^2+1)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{3^{n+1}((n+1)^2+1)}}{\frac{1}{3^n(n^2+1)}} \right|$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{3^n \cdot (n^2+1)}{3 \cdot 3^n \cdot (n^2+2n+2)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{3} \right| = \frac{1}{3} = \frac{1}{R}$$

طبق قضیه راتوان

$$R = 3$$

$$|2x-1| < 3$$

$$-3 < 2x-1 < 3$$

$$-2 < 2x < 4 \xrightarrow{\div 2}$$

$$-1 < x < 2$$

بررسی ابتدا و انتهای بازه :

$$\underline{x = -1} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{3^n(n^2+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{3^n(n^2+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1} \quad \text{همگرست.}$$

$$\underline{x = 2} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{3^n(n^2+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{3^n(n^2+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} \quad \text{همگرست.}$$

پس، نهایتاً بازه همگرایی برابر است با :

$$-1 < x < 2$$

$$D) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n \ln n}{e^n}$$

در

$$a_n = \frac{\ln n}{e^n} \quad (د)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{\ln(n+1)}{e^{n+1}}}{\frac{\ln n}{e^n}} \right|$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\ln(n+1) \cdot e^n}{e \cdot e^n \cdot (\ln n)} \right| = \frac{1}{e} = \frac{1}{R} \Rightarrow R = e$$

نوع حدی

$$|x-1| < R = e$$

$$-e < x-1 < e \Rightarrow 1-e < x < e+1$$

بازه حدی:

بررسی ابتدا و انتها بازه:

$$\underline{x=1-e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n \ln n}{e^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln n \quad (\text{والرست})$$

$$\left(\underline{x=e+1} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n \ln n}{e^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n (\ln n)}{e^n} \Rightarrow \text{والرست} \right)$$

$$E) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n (x-1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

$$a_n = \frac{(-3)^n}{\sqrt{n+1}} \quad (د)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-3)^{n+1} \cdot \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1+1} \cdot (-3)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |(-3)| = 3 = \frac{1}{R}$$

$$R = \frac{1}{3} \quad \checkmark$$

بازه حدی:

$$|x-1| < \frac{1}{3} \Rightarrow -\frac{1}{3} < x-1 < \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{2}{3} < x < \frac{4}{3}$$

$$\left(\underline{x=\frac{2}{3}} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n \left(-\frac{1}{3}\right)^n}{\sqrt{n+1}} \quad \text{والرست} \right) \quad \left(\underline{x=\frac{4}{3}} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n \left(\frac{1}{3}\right)^n}{\sqrt{n+1}} \quad \text{والرست} \right)$$

$$F) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-1)^n}{2^n(3n-1)}$$

$$a_n = \frac{n}{2^n(3n-1)} \quad (\text{حل})$$

مر ۱۹

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)(2^n)(3n-1)}{2^{n+1} \cdot (3(n+1)-1) \cdot n} \right|$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2^n \cdot (n+1) \cdot (3n-1)}{2 \cdot 2^n \cdot (n) \cdot (3n-2)} \right| = \frac{1}{2} = \frac{1}{R} \Rightarrow R = 2$$

$$|x-1| < 2 \rightsquigarrow$$

$$-2 < x-1 < 2$$

$$-1 < x < 3$$

بازه همگرایی:

$$\underline{x = -1} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-1)^n}{2^n(3n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{3n-1} \quad \text{والتست.}$$

$$\underline{x = 3} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-1)^n}{2^n(3n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n-1} \quad \text{والتست.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-c)^{2n \pm m}$$

ک، m اعداد

نکته بیدارم / اگر سری به شکل

طبیعی و ثابت هستند، شعاع همگرایی برابر است با:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{R^k}$$

هم

$$G) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}}$$

ص ۲۰

نکته: علاوه بر آزمون دالامبر به منظور یافتن
نوع همگرایی، می‌توان از آزمون راسل نیز بهره جست!

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left|\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}\right|}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} = \frac{1}{R^2}$$

توسیع درینا

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{R^2} \Rightarrow R^2 = e \rightarrow R = \sqrt{e} \checkmark$$

باز همگرایی:

$$|x| < \sqrt{e}$$

$$-\sqrt{e} < x < \sqrt{e}$$

$$x = \sqrt{e} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}}$$

سری واگراس.

$$x = -\sqrt{e} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}}$$

« موفق، پرورد و سر بلند با سید. »

باز آزمون راسل
حسن الراسل