

فصل چهارم: مفهوم مشتق و دیفرانسیل

۴-۱) **تعریف مشتق**: مشتق تابع پیوسته $f(x)$ را در نقطه $x = a$ با $f'(a)$ نشان می‌دهیم و از یکی از دو رابطه زیر به دست می‌آید:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (1) \text{تعریف اول مشتق:}$$

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad (2) \text{تعریف دوم مشتق:}$$

تعریف:

مشتق راست f در $x = a$: اگر تابع f در $x = a$ از راست پیوسته باشد آنگاه مشتق راست تابع f را در این نقطه با $f'_+(a)$ نشان می‌دهند و از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

مشتق چپ f در $x = a$: اگر تابع f در $x = a$ از چپ پیوسته باشد آنگاه مشتق چپ تابع f را در این نقطه با $f'_-(a)$ نشان می‌دهند و از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$f'_-(a) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

نکته: مشتق چپ و راست در تعریف دوم مشتق:

شروط مشتق پذیری تابع در یک نقطه:

الف) f در $x = x_0$ پیوسته باشد.

ب) $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$

نتیجه: اگر تابعی پیوسته نباشد آنگاه تابع مشتق پذیر هم نیست.

به همین ترتیب در صورت عدم وجود پیوستگی راست یا چپ قطعاً منحنی f در این نقطه دارای مشتقات چپ و یا راست نخواهد بود.

نکته: در توابع چندضابطه‌ای تابع از هر طرف که پیوسته باشد می‌توان از آن مشتق گرفت.

با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع‌های زیر را در نقطه‌ی داده شده به دست آورید.

$$f(x) = 3x - 1, \quad x = 2$$

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x - 1 - 5}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(x - 2)}{x - 2} = 3$$

$$f(x) = x^2 + 4x, \quad x = 2$$

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 4x - 12}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+6)}{x-2} = 8$$

$$f(x) = \frac{x}{x-1}, \quad x = 2$$

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{x}{x-1} - \frac{2}{2-1}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{x - 2(x-1)}{(x-1)(x-2)}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x-2)}{(x-1)(x-2)} = -1$$

مثال: با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را به دست آورید.

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \times \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

مثال: با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x) = 2 - x^2$ را به دست آورید.

از تعریف دوم استفاده می‌کنیم و مشتق حساب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \text{تعریف دوم مشتق: } f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 - (x+h)^2 - (2 - x^2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(x^2 + 2xh + h^2) + x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2xh - h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(-2x - h)}{h} = -2x \end{aligned}$$

مثال: مشتق توابع ذیل را در نقطه داده شده در صورت وجود به دست آورید:

$$f(x) = x^2 \quad x = 3 \quad f(x) = |x| \quad x = 0$$

$$f(x) = \frac{x}{x-1} \quad x = 1 \quad f(x) = [x] \quad x = 2$$

مثال: مشتق تابع زیر را با استفاده از فرمول مشتق محاسبه کنید؟

$$f(x) = 2x^2 - 16x + 35$$

با توجه به فرمول کلی مشتق داریم که:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(x+h)^2 - 16(x+h) + 35 - (2x^2 - 16x + 35)}{h} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 4xh + 2h^2 - 16x - 16h + 35 - 2x^2 + 16x - 35}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4xh + 2h^2 - 16h}{h} \end{aligned}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(4x + 2h - 16)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} 4x + 2h - 16$$

$$= 4x - 16$$

$$f'(x) = 4x - 16$$

مشتق توابع - فرمولهای اساسی و پایه مشتق

۱- مشتق یک عدد ثابت : حالتی است که تابع ما برابر یک عدد ثابت باشد (فرقی نمی کند که این عدد صحیح یا اعشاری یا مثبت و ...) باشد ، در اینصورت مشتق یک عدد ثابت برابر صفر می باشد.

اگر تابع ما بصورت $f(x) = C$ باشد و C یک عدد ثابت باشد مشتق برابر

$$f'(x) = C' = 0. \quad \text{است با صفر :}$$

حالت فوق کاملاً مشخص و روشن است .

۲- ضرب عدد در تابع : اگر ما تابعی داشته باشیم که به صورت حاصلضرب یک عدد در یک تابع باشد آنگاه مشتق ما برابر است با حاصلضرب آن عدد در مشتق آن تابع است .

اگر تابع ما بصورت $kf(x)$ باشد که در آن k یک عدد باشد آنگاه مشتق تابع :

$$(kf(x))' = kf'(x).$$

۳- قانون جمع چند تابع : اگر دو یا بیش از یک تابع با هم جمع شوند آنگاه مشتق این توابع برابر است با حاصلجمع مشتق تک تک توابع است .

اگر $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ توابع جداگانه ای باشند که مطابق زیر با هم جمع شوند آنگاه مشتق آنها برابر است با :

$$[f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)]' = f_1'(x) + f_2'(x) + \dots + f_n'(x)$$

همین حالت بالا برای تفاضل هم صادق است یعنی مشتق تفاضل چند تابع برابر مشتق تک تک توابع.

۴- مشتق تابع توان دار : اگر تابع ما یک جمله ای باشد که به توان عددی باشد دو حالت داریم :

الف : اگر توان ما عدد مثبت باشد :

تابع ما بصورت $f(x) = x^p$ و توان p یک عدد حقیقی مثبت باشد

$$(x^p)' = px^{p-1}.$$

ب: اگر توان ما عددی منفی باشد :

اگر تابع ما بصورت $f(x) = x^{-p}$ داراری توان منفی باشد آنگاه مشتق آن :

$$(x^{-p})' = -px^{-p-1} = -\frac{p}{x^{p+1}}.$$

چند جمله ای $f(x) = a_n x^n + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ مشتق آن برابر با جمع مشتق هر جمله:

$$f'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + 2 a_2 x + a_1,$$

که در آن $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0, n$ اعداد ثابتی هستند

هر گاه تابع ما بصورت $f(x) = \sqrt[m]{x}$ باشد مشتق آن بصورت زیر است:

$$f'(x) = (\sqrt[m]{x})' = \frac{1}{m \sqrt[m]{x^{m-1}}}.$$

مثال: مشتق $f(x) = \sqrt{x}$ برابر است با:

$$f'(x) = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

مثال ۱: مشتق تابع روبرو را بدست آورید. $f(x) = 6x^{100} + 7x^{50} + 8x$.

جواب: با استفاده از فرمول تابع توان دار و جمع توابع

$$f'(x) = (6x^{100} + 7x^{50} + 8x)' = (6x^{100})' + (7x^{50})' + (8x)'$$

$$f'(x) = 6(x^{100})' + 7(x^{50})' + 8(x)'. \quad \text{قانون شماره ۳}$$

$$f'(x) = 6 \cdot 100x^{99} + 7 \cdot 50x^{49} + 8 \cdot 1. \quad \text{قانون شماره ۴ تابع توان دار}$$

$$f'(x) = 600x^{99} + 350x^{49} + 8 = 2(300x^{99} + 175x^{49} + 4).$$

مثال ۲: مشتق تابع روبرو را بدست آورید. $f(x) = (\sqrt{3})^2 - 5\sqrt{2}$.

$$f'(x) = ((\sqrt{3})^2 - 5\sqrt{2})' = ((\sqrt{3})^2)' - (5\sqrt{2})' = 0.$$

در تابع بالا با توجه به عددی بودن جمله ها طبق قانون اول مشتق آنها برابر صفر می شود

مثال ۳: مشتق تابع روبرو را بدست آورید. $f(x) = \sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

جواب:

ابتدا تابع را بصورت توان دار و بصورت زیر می نویسیم

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = x^{\frac{1}{3}} - x^{-\frac{1}{3}}.$$

$$f'(x) = \left(x^{\frac{1}{3}} - x^{-\frac{1}{3}} \right)' = \left(x^{\frac{1}{3}} \right)' - \left(x^{-\frac{1}{3}} \right)'.$$

$$f'(x) = \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} - \left(-\frac{1}{3} \right) \cdot x^{-\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} + \frac{1}{3} x^{-\frac{4}{3}} \Rightarrow \frac{1}{3} \left(x^{-\frac{2}{3}} + x^{-\frac{4}{3}} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} + \frac{1}{x^{\frac{4}{3}}} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} \right).$$

مشتق حاصلضرب دو تابع و تقسیم دو تابع

۱- مشتق حاصلضرب دو تابع: هر گاه دو تابعی داشته باشیم بصورت $f(x)$ و $g(x)$ مشتق حاصلضرب این دو تابع بصورت زیر بدست می آید
 که در واقع برابر است با مشتق تابع اول ضربدر تابع دوم به اضافه مشتق تابع دوم ضربدر تابع اول

$$\frac{d}{dx}(fg) = f'g + fg'$$

مثال: $\frac{d}{dx}((x^3 + x^2 + x + 1)(x^4 + x^3 + 2x + 1))$

$$\begin{aligned} &= (x^3 + x^2 + x + 1)'(x^4 + x^3 + 2x + 1) + (x^3 + x^2 + x + 1)(x^4 + x^3 + 2x + 1)' \\ &= (3x^2 + 2x + 1)(x^4 + x^3 + 2x + 1) + (x^3 + x^2 + x + 1)(4x^3 + 3x^2 + 2) \end{aligned}$$

۲- مشتق تقسیم دو تابع:

هر گاه دو تابعی داشته باشیم بصورت $f(x)$ و $g(x)$ آنگاه مشتق آنها بصورت زیر محاسبه میشود.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$

مثال:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x-2}\right) = \frac{\frac{d}{dx}1 \cdot (x-2) - 1 \cdot \frac{d}{dx}(x-2)}{(x-2)^2} = \frac{0 \cdot (x-2) - 1 \cdot 1}{(x-2)^2} = \frac{-1}{(x-2)^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(\frac{x-1}{x-2}\right) &= \frac{(x-1)'(x-2) - (x-1)(x-2)'}{(x-2)^2} = \frac{1 \cdot (x-2) - (x-1) \cdot 1}{(x-2)^2} \\ &= \frac{(x-2) - (x-1)}{(x-2)^2} = \frac{-1}{(x-2)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(\frac{5x^3 + x}{2 - x^7}\right) &= \frac{(5x^3 + x)' \cdot (2 - x^7) - (5x^3 + x) \cdot (2 - x^7)'}{(2 - x^7)^2} \\ &= \frac{(15x^2 + 1) \cdot (2 - x^7) - (5x^3 + x) \cdot (-7x^6)}{(2 - x^7)^2} \end{aligned}$$

مشتق تابع مرکب

آکه تابع g در نقطه‌ی a و تابع f در نقطه‌ی $g(a)$ مشتق پذیر باشند، تابع $F = fog$ هم در a مشتق پذیر و داریم:

$$F'(a) = (fog)'(a) = g'(a)f'(g(a))$$

$$y = f(u) \Rightarrow y' = u'f'(u)$$

به بیان ساده تر:

$$y'_x = y'_u \times u'_x \quad \text{یا} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

بیان قضیه به فرم دیفرانسیلی:

مثال:

$$\begin{cases} y = u^2 + u \\ u = x^2 - 1 \end{cases} \Rightarrow y'_x = ? \Rightarrow \begin{cases} y'_u = 2u + 1 \\ u'_x = 2x \end{cases}$$

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = (2u + 1)(2x) = (2(x^2 - 1) + 1)(2x) = 4x^3 - 2x$$

$$\begin{array}{lll}
 ۱) y = c \Rightarrow y' = 0 & ۲) y = x^n \Rightarrow y' = nx^{n-1} & ۳) y = u^n \Rightarrow y' = nu'u^{n-1} \\
 ۴) y = u \pm v \Rightarrow y' = u' \pm v' & ۵) y = uv \Rightarrow y' = u'v + v'u & ۶) y = \frac{u}{v} \Rightarrow y' = \frac{u'v - v'u}{v^2} \\
 ۷) y = \sqrt{x} \Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} & ۸) y = \sqrt{u} \Rightarrow y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} & ۹) y = \sqrt[m]{u^n} \Rightarrow y' = \frac{nu'}{m\sqrt[m]{u^{m-n}}}
 \end{array}$$

تذکر: در فرمول‌ها u و v توابعی از x هستند.

فرمول‌ها و قوانین مشتق توابع مثلثاتی

$$\begin{array}{ll}
 ۱) y = \sin u \Rightarrow y' = u' \cos u & ۲) y = \cos u \Rightarrow y' = -u' \sin u \\
 ۳) y = \tan u \Rightarrow y' = u'(1 + \tan^2 u) & ۴) y = \cot u \Rightarrow y' = -u'(1 + \cot^2 u)
 \end{array}$$

از شماره ۱ تا ۴ مشتق توابع مثلثاتی رو داریم که تانژانت (۱) بود، حال اگر توان بیش‌تر از ۱ باشد به طریق زیر عمل می‌کنیم.

مثلاً آله بخواهیم از تابع $y = \sin^n(u)$ مشتق بگیریم با استفاده از قضیه‌ی مشتق تابع مرکب:

$$y' = nu' \cos u \sin^{n-1} u$$

$\swarrow$ خود تابع با یه توان کم‌تر $\searrow$ مشتق تابع $\downarrow$ مشتق کمان $\swarrow$ توان

مثال‌ها:

$$y = c \Rightarrow y' = 0$$

$$۱) y = ۱۳۹۱ \Rightarrow y' = 0$$

$$y = x^n \Rightarrow y' = nx^{n-1}$$

$$۱) y = x^7 \Rightarrow y' = 7x^6$$

$$y = u \pm v \Rightarrow y' = u' \pm v'$$

$$۱) y = ۳x^5 - ۵x^7 \Rightarrow y' = ۱۵x^4 - ۱۰x^6$$

$$y = u^n \Rightarrow y' = nu'u^{n-1}$$

$$۱) y = (x^5 - x^7 + x^7 - ۱)^5 \Rightarrow y' = ۵(x^5 - ۳x^7 + ۲x)(x^5 - x^7 + x^7 - ۱)^4$$

$$y = uv \Rightarrow y' = u'v + v'u$$

$$۱) y = (۳x - ۲)(x^7 + ۱) \Rightarrow y' = ۳(x^7 + ۱) + ۲x(۳x - ۲)$$

$$۲) y = (x^5 - ۳x)(x + ۱)^7 \Rightarrow y' = (۵x^4 - ۳)(x + ۱)^7 + ۴(x + ۱)^7(x^5 - ۳x)$$

$$y = \frac{u}{v} \Rightarrow y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$۱) y = \frac{۲x - ۳}{۳x + ۵} \Rightarrow y' = \frac{۲(۳x + ۵) - ۳(۳x - ۳)}{(۳x + ۵)^2} = \frac{۱۹}{(۳x + ۵)^2}$$

$$۲) y = \frac{۲(۳x + ۵)^7}{x^7 + ۱} \Rightarrow y' = \frac{(۲)(۷)(۲)(۳x + ۵)(x^7 + ۱) - (۲x^7)(۲(۳x + ۵)^7)}{(x^7 + ۱)^2} = \frac{۱۲(۳x + ۵)(x^7 + ۱) - ۹x^7(۳x + ۵)^7}{(x^7 + ۱)^2}$$

$$۳) y = \frac{۱}{x^5 + x - ۲} \Rightarrow y' = \frac{-(۲x + ۱)}{(x^5 + x - ۲)^2}$$

$$۴) y = \frac{۱}{1 + \frac{۱}{x}} = \frac{۱}{\frac{x+1}{x}} = \frac{x}{1+x} \Rightarrow y' = \frac{(1+x) - x}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2}$$

$$y = \sqrt{u} \Rightarrow y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$1) y = \sqrt{x} \Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$2) y = \sqrt{3x+2} \Rightarrow y' = \frac{3}{2\sqrt{3x+2}}$$

$$3) y = \sqrt{4-x^2} \Rightarrow y' = \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$4) y = \left(\frac{1}{x} - \sqrt{x}\right)^5 \Rightarrow y' = 5\left(\frac{-1}{x^2} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\left(\frac{1}{x} - \sqrt{x}\right)^4$$

$$5) y = \frac{\sqrt{x^2-1}}{2x+5} \Rightarrow y' = \frac{\left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}\right)(2x+5) - \sqrt{x^2-1}}{(2x+5)^2}$$

$$6) y = \frac{x}{x+\sqrt{x}} \Rightarrow y' = \frac{(1)(x+\sqrt{x}) - (1+\frac{1}{2\sqrt{x}})x}{(x+\sqrt{x})^2}$$

$$7) y = \sqrt{\frac{2x+5}{3x-1}} \Rightarrow y' = \frac{\frac{2(2x+5) - 3(2x-1)}{(3x-1)^2}}{2\sqrt{\frac{2x+5}{3x-1}}} \Rightarrow y' = \frac{-17}{2\sqrt{\frac{(2x+5)(3x-1)}{(3x-1)}}} \Rightarrow y' = \frac{-17}{2\sqrt{(2x+5)(3x-1)}}$$

$$y = \sqrt[m]{u^n} \Rightarrow y' = \frac{nu'}{m\sqrt[m]{u^{m-n}}}$$

$$1) y = \sqrt[3]{x^2} \Rightarrow y' = \frac{2(1)}{3\sqrt[3]{x}}$$

بیفور نگو صورت میسه $\sqrt[3]{x}$ اشتباه نکن! زیر توان رو u بگیر، u' میسه 1 !

$$2) y = \sqrt[3]{x^2-4x} \Rightarrow y' = \frac{(2x-4)}{3\sqrt[3]{(x^2-4x)^2}}$$

$$y = \sin u \Rightarrow y' = u' \cos u$$

$$1) y = \sin(2x-4) \Rightarrow y' = 2 \cos(2x-4)$$

$$y = \cos u \Rightarrow y' = -u' \sin u$$

$$2) y = \cos(\Delta x^2 - 4) \Rightarrow y' = -(1 \cdot 2x) \sin(\Delta x^2 - 4)$$

$$3) y = 3 \cos x \sin 2x \Rightarrow y' = (-3 \sin x)(\sin 2x) + (3 \cos 2x)(2 \cos x)$$

$$4) y = (\sin 2x + \cos(x-1))^2 \Rightarrow y' = 2(\sin 2x + \cos(x-1))(2 \cos 2x - \sin(x-1))$$

$$5) y = \sin^2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{3}\right) \Rightarrow y' = 2 \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{3}\right) \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{3}\right) \left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$6) y = (\sin \sqrt{x})(\cos 2x) \Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos \sqrt{x} \cos 2x - 2 \sin 2x \sin \sqrt{x}$$

$$7) y = \sqrt{1+\sin x} \Rightarrow y' = \frac{\cos x}{2\sqrt{1+\sin x}}$$

$$y = \frac{1}{\sin x + \cos x} \Rightarrow y' = \frac{-\cos x + \sin x}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$۸) y = \frac{\sin x}{1+x} \Rightarrow y' = \frac{\cos x(1+x) - \sin x}{(1+x)^2}$$

$$۹) y = \sin^r \sqrt{x} \Rightarrow y' = r(\sin^r \sqrt{x}) (\cos \sqrt{x}) (\frac{1}{2\sqrt{x}})$$

$$y = \sin wt + \cos wt \Rightarrow y' = w \cos wt - w \sin wt$$

$$y = \tan u \Rightarrow y' = u'(1 + \tan^2 u)$$

$$y = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x \Rightarrow y' = \frac{\cos x \cos x - (-\sin x) \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

$$۱۰) y = \tan(\frac{\pi}{\gamma} - \frac{x}{\delta}) \Rightarrow y' = -\frac{1}{\delta}(1 + \tan^2(\frac{\pi}{\gamma} - \frac{x}{\delta}))$$

$$y = \cot u \Rightarrow y' = -u'(1 + \cot^2 u)$$

$$۱۱) y = \cot(1 - x^r) \Rightarrow y' = -(-rx)(1 + \cot^2(1 - x^r))$$

$$۱۲) y = \tan^r x - r \cot x \Rightarrow y' = r \tan^r x (1 + \tan^2 x) + r(1 + \cot^2 x)$$

$$۱۳) y = \sin x \tan x \Rightarrow y' = \cos x \tan x + (1 + \tan^2 x)(\sin x)$$

$$۱۴) y = \tan(x^r - rx) + \sin \Delta x \Rightarrow y' = (rx - r)(1 + \tan^2(x^r - rx)) + \Delta \cos \Delta x$$

$$۱۵) y = \sqrt{\sin \Delta x} + \epsilon \tan^r rx \Rightarrow y' = \frac{\Delta \cos \Delta x}{2\sqrt{\sin \Delta x}} + (\epsilon)(r)(r) \tan^r rx (1 + \tan^2 rx)$$

◀ نکته ۱؛ اگر f تابعی مشتق پذیر در x باشد.

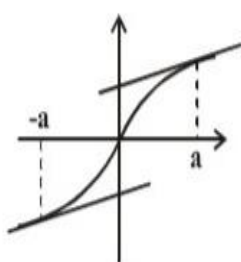
$$f(x) = f(-x) \Rightarrow f'(-x) = -f'(x)$$

$$f(x) = -f(-x) \Rightarrow f'(x) = f'(-x)$$

الف - اگر f زوج باشد، تابع f' فرد است؛

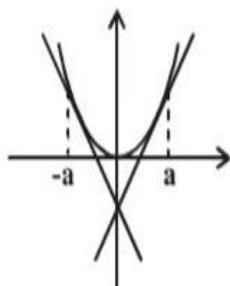
ب - اگر f فرد باشد، تابع f' زوج است؛

به شکل های زیر توجه کنید



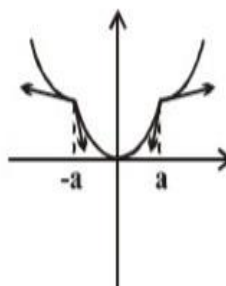
$$m_a = m_{(-a)}$$

$$f'(a) = f'(-a)$$



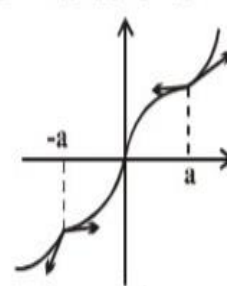
$$m_a + m_{(-a)} = 0$$

$$f'(a) = -f'(-a)$$



$$f'_+(a) = -f'_-(-a)$$

$$f'_-(a) = -f'_+(-a)$$



$$f'_+(a) = f'_-(-a)$$

$$f'_-(a) = f'_+(-a)$$

◀ نکته ۲؛ اگر y تابعی از x و u نیز تابعی از x باشد، آنگاه:

$$y'_u = \frac{y'_x}{u'_x}$$

مشتق مرتبه‌ی دوم

اگر تابع f روی بازه‌ی باز I مشتق‌پذیر باشد یعنی $I \in D_{f'}$ آنگاه تابع f' خود ممکن است در نقطه‌ای مثل a یا همه‌ی نقاط بازه مشتق‌پذیر باشد به عبارت دیگر اگر حد زیر موجود باشد آن را با $f''(a)$ نمایش داده و مشتق دوم تابع در a نامیم.

$$f''(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h}$$

اگر f'' بر بازه‌ی I موجود باشد گوییم f در I مشتق دوم دارد.

اگر f در $x=a$ مشتق دوم داشته باشد آنگاه:

$$(1) \quad f(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \text{ پیوسته است}$$

$$(2) \quad f \text{ در } a \text{ مشتق اول دارد} \quad f'_-(a) = f'_+(a) \text{ (و هر دو موجودند)}$$

$$(3) \quad \text{مشتق دوم از چپ و راست موجود و برابر است} \quad f''_-(a) = f''_+(a)$$

شرایط از بالا به پایین است.

۴-۲) کاربرد مشتق

در انتهای این بخش از دانشجو انتظار می رود به اهداف زیر نائل گردد:

- (۱) ماکزیمم و می نیمم نسبی یک تابع را به دست آورد.
- (۲) قضایای رل و میانگین را به طور مناسب به کار گیرد.
- (۳) تقعر و تحدب یک منحنی را به دست آورد.
- (۴) نقطه ی عطف یک منحنی را به دست آورد.

جهت تغییرات تابع

تابع f را در فاصله $[a, b]$ معین فرض می کنیم، یعنی داریم $[a, b] \subset D_f$. بنا به تعریف، f در این فاصله صعودی خوانده میشود اگر:

$$\forall x_1, x_2 \in [a, b], \quad x_2 \geq x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$$

تابع f را در فاصله $[a, b]$ نزولی گویند، اگر:

$$\forall x_1, x_2 \in [a, b], \quad x_2 \geq x_1 \Leftrightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$$

اگر تابع f در فاصله $[a, b]$ صعودی و یا فقط نزولی باشد، تابع را در این فاصله یکنوا خوانند.

قضیه:

اگر f اگر در فاصله D پیوسته باشد، (در این فاصله) موكداً صعودی است، اگر باشد؛ و موكداً نزولی است، اگر $f'(x) < 0$ باشد.

ماکزیمم و مینیمم یک تابع

اگر f تابعی با دامنه D_f در این صورت عدد k در حوزه تابع $(k \in R_f)$ را ماکزیمم مطلق تابع f نامند، در صورتی که برای هر مقدار x در D_f داشته باشیم: $f(x) \leq k$ و بر عکس اگر داشته باشیم: $f(x) \geq k$ در این صورت k را مینیمم مطلق خوانند.

تابع $y=f(x)$ را در نظر می گیریم. فرض می کنیم ایت تابع در نقطه x_0 و همسایگی آن پیوسته باشد بنا به تعریف، این تابع در نقطه x_0 ماکزیمم نسبی است اگر به ازای جمیع نقاط $x_0 + \Delta x$ واقع در همسایگی x_0 همواره داشته باشیم: $f(x_0 + \Delta x) \leq f(x_0)$.

به همین ترتیب تابع در نقطه x_0 مینیمم نسبی است، اگر: $f(x_0 + \Delta x) \geq f(x_0)$ ماکزیمم یا مینیمم تابع را، نقاط اکسترمم تابع نیز گویند. هر نقطه که مینیمم یا ماکزیمم مطلق باشد مینیمم یا ماکزیمم نسبی نیز هست.

شرط لازم ماکزیمم و مینیمم نسبی

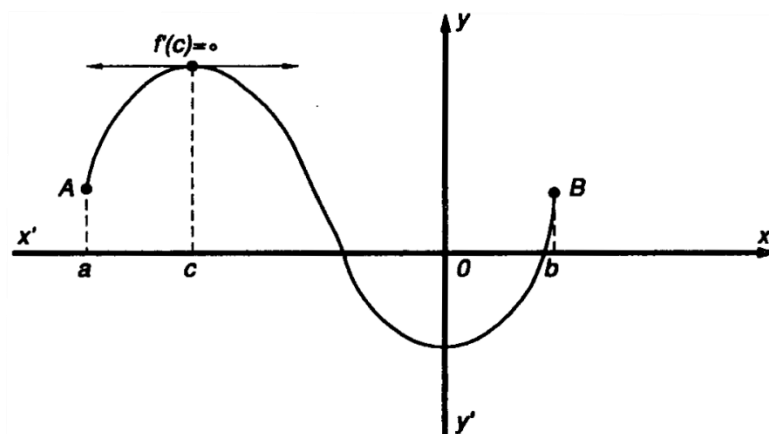
قضیه:

فرض کنیم تابع $y=f(x)$ در نقطه x_0 و همسایگی آن پیوسته بوده و در x_0 ماکزیمم یا مینیمم نسبی (اکسترمم) باشد. در ضمن این تابع در این نقطه دارای مشتق نیز می باشد، در این صورت $f'(x_0) = 0$ است. اگر مشتق تابعی در یک نقطه مانند x_0 باشد این نقطه را نقطه بحرانی تابع نامند.

قضیه رول

فرض می کنیم f تابعی باشد که در فاصله $[a, b]$ پیوسته بوده و در هر نقطه از فاصله (a, b) مشتق دارد ضمناً فرض می کنیم $f(a) = f(b)$ باشد، در این صورت حداقل یک نقطه مانند c در فاصله (a, b) وجود دارد که $f'(c) = 0$ است.

تعبیر هندسی قضیه رول

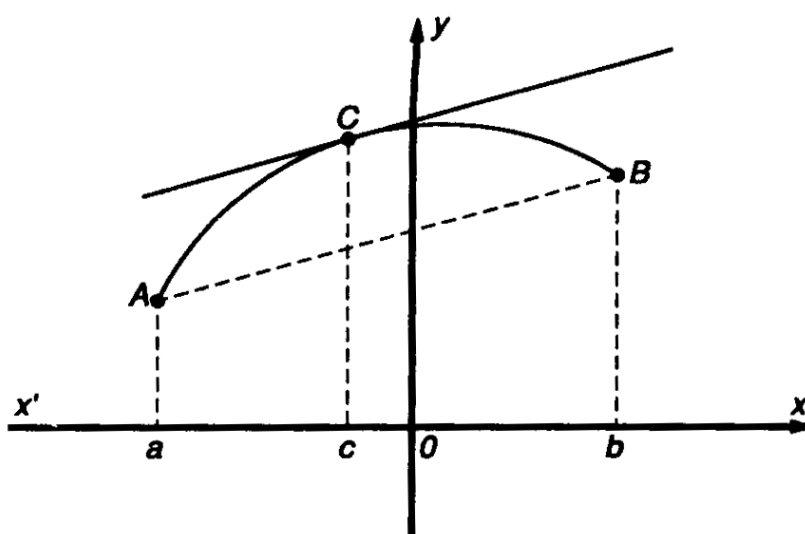


قضیه میانگین (مقدار میانگین برای مشتق)

فرض می کنیم تابع $f(x)$ در همه نقاط فاصله $[a, b]$ پیوسته بوده و در هر نقطه از فاصله باز (a, b) دارای مشتق باشد. در این صورت حداقل یک نقطه مانند c در فاصله (a, b) وجود دارد که به ازای آن داریم

$$f(b) - f(a) = (b-a) f'(c)$$

تعبیر هندسی قضیه میانگین



تحدب و تقعر یک منحنی

تعریف منحنی تابع f را دارای تقعر به طرف بالا (تحدب به طرف پایین) خوانند، اگر در نقطه $(c, f(c))$ اولاً مشتق، یعنی $f'(c)$ وجود داشته باشد؛ ثانیاً یک همسایگی در نقطه C موجود باشد به طوری که نمودار f در این همسایگی بالای (پایین) خط مماس واقع گردد.

معادله خط مماس D بر منحنی در نقطه $(c, f(c))$ با فرض وجود مشتق در این نقطه برابر است با: $y = f(c) + f'(c)(x-c)$

اگر اختلاف عرض های هط نقطه از خط مماس و منحنی را که دارای طول x است به $g(x)$ نشان دهیم، داریم:

$$g(x) = f(x) - [f(c) + f'(c)(x-c)]$$

اگر $g(x) > 0$ باشد نقطه $(x, f(x))$ بالای خط مماس D بوده، و اگر $g(x) < 0$ باشد، نقطه مذکور، پایین خط مماس D است. ضمناً روشن است که $g(c) = 0$ است، پس می توان تعقر و تحدب منحنی را برحسب علامت $g(x)$ بیان کرد.

قضیه

اگر تابع f مفروض باشد و در C و همسایگی آن تعریف شده باشد، در این صورت در نقطه :

(۱) تعقر منحنی f به طرف بالا است، اگر در $(c, f(c)) \in \circ, f''(c) > 0$ باشد.

(۲) تعقر منحنی f به طرف پایین است، اگر در $(c, f(c)) \in \circ, f''(c) < 0$ باشد.

تعیین ماکزیمم و مینیمم به کمک مشتق دوم

فرض می کنیم f تابعی است که $x = c$ ، نقطه بحرانی آن باشد. در ضمن فرض می کنیم در یک همسایگی C تعریف شده باشد، در این صورت داریم :

(۱) ماکزیمم نسبی است اگر $f''(c) < 0$ باشد.

(۲) مینیمم نسبی است اگر $f''(c) > 0$ باشد.

اگر در این نقطه $f''(c) = 0$ باشد و یا تعریف نشده باشد، آزمون مشتق دوم برای تعیین نوع نقطه بحرانی به کار نمی رود.

نقطه عطف

تعریف : نقطه $M(c, f(c))$ نقطه عطف نمودار تابع f است، اگر یک همسایگی C مانند (a, b) وجود داشته باشد به طوری که برای هر x در فاصله (a, c) ، $f''(x) > 0$ و برای هر x در فاصله (c, b) ، $f''(x) < 0$ باشد و یا برعکس.

اگر $M(c, f(c))$ نقطه عطف نمودار f باشد و $f''(x)$ وجود داشته باشد، در این صورت لازم است که $f''(x) = 0$ باشد.

قضیه

اگر f تابعی باشد که برای آن نقطه ای مانند $x = c$ وجود داشته، به طوری که $f''(c) = 0$ باشد، در صورتی نقطه $M(c, f(c))$ نقطه عطف نمودار f است که همسایگی از C مانند (a, b) وجود داشته باشد به طوری که :

(۱) $f''(x) < 0$ در همسایگی مذکور وجود داشته و برای هر x متعلق به این فاصله (به جز $x \neq c$)، $f''(x) \neq 0$ باشد.

(۲) $f''(a) > 0$ ، $f''(b) < 0$ مختلف علامت باشند.

نتیجه

به طور کلی برای تعیین ماکزیمم و مینیمم و نقاط عطف یک منحنی به ترتیب زیر عمل می کنیم :

(۱) ابتدا از تابع مشتق گرفته را مساوی صفر قرار می دهیم. معادله ای به دست می آید که ریشه های حقیقی آن را تعیین می کنیم.

$$y = f(x)$$

فرض می کنیم که داریم : $x = a \Rightarrow y' = f'(x) = 0$ طول نقطه را در تابع قرار داده، عرض آن را تعیین می کنیم، یعنی

$M(a, f(a))$. نقطه M را نقطه بحرانی f خوانند. این نقطه ممکن است ماکزیمم یا مینیمم یا هیچ کدام باشد.

۲) برای تعیین نوع نقطه بحرانی، می توان از تغییر علامت مشتق در $x = a$ استفاده کرد. اگر $f'(x) \langle \circ, x \rangle a, f'(x) \rangle \circ, x \langle \circ$ باشد، نقطه M ماکزیمم نسبی است. اگر $f'(x) \rangle \circ, x \rangle \circ, f'(x) \langle \circ, x \langle \circ$ باشد، نقطه M مینم نسبی است.

۳) برای تعیین نوع نقطه بحرانی می توان از علامت مشتق دوم، $y'' = f''(x)$ یعنی استفاده کرد.

الف) اگر $f''(a) \langle \circ$ باشد نقطه بحرانی M ماکزیمم نسبی است.

ب) اگر $f''(a) \rangle \circ$ باشد نقطه M مینم نسبی است.

ج) اگر $f''(a) = \circ$ باشد، اگر در همسایگی a همواره $f''(x) \langle \circ$ باشد، نقطه M ماکزیمم است. اگر در همسایگی $x = a$ همواره $f''(x) \rangle \circ$ باشد، نقطه مینم نسبی است. اگر در همسایگی نقطه $x = a$ علامت $f''(x)$ در دو طرف a متقارن باشد، نقطه M ماکزیمم و مینم نیست بلکه نقطه، نقطه عطف خواهد بود.

برای تعیین نقطه عطف، ابتدا $y'' = f''(x)$ را تشکیل می دهیم، و آن را مساوی صفر قرار می دهیم. داریم:

$$y'' = f''(x) = \circ \Rightarrow x = c \quad A(c, f(c))$$

برای تعیین اینکه نقطه A نقطه عطف است، کافیت نشان دهیم: $y'' = f''(x)$ در نقطه $x = a$ تغییر علامت می دهد.

روش های تعیین مقدار تقریبی ریشه های حقیقی یک معادله

روش نیوتن

فرض می کنیم تابع f در فاصله $[a, b]$ پیوسته و مشتق پذیر باشد و همچنین فرض می کنیم فاصله ای مانند $[x_1, x_2]$ زیرمجموعه از فاصله $[a, b]$ وجود داشته باشد، به طوری که تابع در این فاصله یکنوا (یعنی یا صعودی و یا نزولی باشد) و $f(x_1)$ و $f(x_2)$ دارای علامت های مختلف باشند. بنا به فرض، $f(x_1) \langle \circ$ و $f(x_2) \rangle \circ$ است. با توجه به اینکه تابع در این فاصله صعودی یا نزولی است، لذا در این فاصله تنها یک جواب وجود دارد که $f(x) = \circ$ گردد.

فرض می کنیم مشتق دوم تابع در فاصله $[x_1, x_2]$ ثابت بماند. اگر چنین نباشد با کاهش فاصله، فاصله ای را پیدا می کنیم که مشتق دوم در فاصله موردنظر دارای این خاصیت باشد. می دانیم اگر در فاصله ای $y'' \rangle \circ$ باشد تعقر به طرف بالا و اگر $y'' \langle \circ$ باشد تعقر به سمت پایین است. از نقطه B مماسی بر منحنی رسم می کنیم تا محور x ها را در نقطه ای واقع بین x_1 و x_2 قطع کند؛ یعنی در نقطه B معادله مماس به صورت زیر است: $y - f(x_2) = f'(x_2)(x - x_2)$

$$a_1 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \quad y = \circ \text{ پس داریم:}$$

نقطه B_1 را به طول a_1 بر منحنی در نظر می گیریم و ریشه نزدیکتر a_2 را به روش مشابه فوق به دست می آوریم و با ادامه این روش می توان ریشه معادله را با هر تقریب موردنظری به دست آورد.

۳-۴) مشتق جزئی

مشتق پاره‌ای یا مشتق جزئی، در مورد توابع چند متغیره، به مشتق تابع نسبت به یکی از متغیرها با ثابت نگه داشتن سایر متغیرها گفته می‌شود. مشتق جزئی تابع f نسبت به متغیر x به یکی از صورت‌های زیر نمایش داده می‌شود:

$$f'_x, f_x, f_{,x}, \partial_x f, \text{ or } \frac{\partial f}{\partial x}$$

از ∂ به عنوان نماد مشتق جزئی استفاده می‌شود. این نماد توسط آدرین-ماری لژاندر ابداع شد و پس از معرفی توسط کارل گوستاو ژاکوب ژاکوبی عمومیت یافت.

مثال: اگر تابع f را به صورت روبه رو تعریف کنیم،

$$f(x, y) = 3x^2 + 5xy - 2y^4.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x + 5y$$

آنگاه مشتق f نسبت به x می‌شود:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 5x - 8y^3$$

و مشتق f نسبت به y خواهد بود:

مثال: اگر $z = x^3y^2 + x^4y + y^4$ مطلوب است تعیین $\frac{\partial z}{\partial y}$ و $\frac{\partial z}{\partial x}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y^2 + 4x^3y \quad \text{و} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^3y + x^4 + 4y^3$$

حل:

مشتقات مراتب بالاتر

اگر تابع $y = f(x)$ در ناحیه‌ای مشتق‌پذیر باشد، مشتق آن، تابعی مانند $y' = f'(x)$ است که این تابع (یعنی مشتق)، خود تابعی از x می‌باشد. می‌توان مشتق آن را به دست آورد، و آن را مشتق مرتبه دوم تابع $y = f(x)$ نامید. $y'' = (y')' = f''(x)$.

اگر عمل مشتق‌گیری را به همین ترتیب ادامه دهیم، به طوری که از مشتق مرتبه $(n-1)$ ام مجدداً مشتق بگیریم، مشتق مرتبه n ام تابع $y = f(x)$ به دست می‌آید. $y^{(n)} = f^{(n)}(x)$.

مثال:

مشتق مرتبه n ام توابع $y = 3x^3$ را تعیین کنید. **حل:**

$$a) \quad y = 3x^3, \quad y' = 9x^2, \quad y'' = 18x, \quad y''' = 18$$

$$y^{(4)} = 0 \dots y^{(n)} = 0 \quad n \in N \setminus 3$$