

ریاضیات عمومی

جلد دوم

تألیف ایساك مارون

ترجمه : خلیل پاریاب

عضو هیئت علمی دانشگاه علم و صنعت ایران

فهرست

صفحه	شش	عنوان
		مقدمه
۱		فصل چهارم : روشهای بنیادی انتگرالگیری
۱-۴		انتگرالگیری و روش تعمیم
۲-۴		انتگرالگیری بکمک تغییر متغیر
۳-۴		انتگرالگیری به روش جزء بجزء
۴-۴		دستورهای کاهش
		فصل پنجم : دسته‌های اساسی از توابع انتگرالپذیر
۱-۵		انتگرالگیری از توابع گویا
		روش استروگرادسکی
۲-۵		انتگرالگیری از بعضی از عبارات اصم
۳-۵		تغییر متغیرهای اویلر
۴-۵		سایر روشهای انتگرالگیری از عبارات اصم
۵-۵		انتگرالگیری از دو جمله‌ای دیفرانسیلی
۶-۵		انتگرالگیری از توابع مثلثاتی و هذلولوی
		انتگرالگیری از توابع هذلولوی
۷-۵		محاسبه بعضی از انتگرالها بکمک تغییر متغیرهای مثلثاتی و هذلولوی
۸-۵		انتگرالگیری از سایر توابع غیر جبری
۹-۵		روشهای انتگرالگیری
		(لیست دستورهای اساسی انتگرالگیری)
		جدول مختصر انتگرالها
		فصل ششم : انتگرال معین
۱-۶		توضیح مطلب
		مجموع انتگرال بالا ب مجموع انتگرال پایین
۲-۶		محاسبه انتگرالهای معین با استفاده از دستور نیوتن-لایبنیتز
۳-۶		تخمین زدن (برآورد) یک انتگرال
		انتگرال معین به عنوان تابعی از حدودش

۶-۴ . تغییر متغیر در انتگرال معین	۱۳۰
۶-۵ . تلخیص انتگرال بر اساس خاصیت تقارن انتگرال	۱۴۵
۶-۶ . انتگرالگیری بر روش جزء بجزء-دستورهای کاهش	۱۵۲
۶-۷ . محاسبه مقدار تقریبی انتگرال معین	۱۶۰
۶-۸ . تمرینهای اضافی	۱۶۷
فصل هفتم : کاربردهای انتگرالهای معین	۱۷۳
۷-۱ . محاسبه حد مجموع بکمک انتگرال معین	۱۷۳
۷-۲ . محاسبه مقادیر متوسط توابع	۱۷۶
۷-۳ . محاسبه مساحت در مختصات قائم	۱۸۱
۷-۴ . محاسبه مساحت ناحیه محدود به منحنیائی که معادلات آنها به صورت پارامتری هستند	۱۹۳
۷-۵ . محاسبه مساحت در مختصات قطبی	۱۹۸
۷-۶ . محاسبه حجم یک جسم	۲۰۵
۷-۷ . محاسبه طول قوس یک منحنی مسطح در مختصات قائم	۲۱۶
۷-۸ . محاسبه طول قوس یک منحنی که معادله اش به صورت پارامتری است	۲۲۰
۷-۹ . طول قوس یک منحنی در مختصات قطبی	۲۲۵
۷-۱۰ . محاسبه مساحت سطوح دوار	۲۲۸
۷-۱۱ . کاربرد هندسی انتگرال معین	۲۳۶
۷-۱۲ . محاسبه فشار، کار و سایر کمیت‌های فیزیکی بوسیله انتگرال معین	۲۴۵
۷-۱۳ . محاسبه گشتاور استاتیک و گشتاورمانده محاسبه مختصات مرکز ثقل	۲۵۱
۷-۱۴ . چند مسئله اضافی	۲۶۴
فصل هشتم : انتگرالهای غیرعادی (یا توسعی)	۲۷۱
۸-۱ . انتگرال غیرعادی با حدود بینهایت	۲۷۱
۸-۲ . انتگرالهای غیرعادی توابع بیکران	۲۸۲
۸-۳ . کاربردهای فیزیکی و هندسی انتگرالهای غیرعادی	۲۹۳
۸-۴ . چند مسئله اضافی	۳۰۰
فصل نهم : سریهای نامتناهی	۳۰۷
۹-۱ . همگرایی و واگرایی سریهای نامتناهی	۳۰۷
مطالب بنیادی درباره سریهای نامتناهی	۳۰۸
سریهای خاص	۳۰۸
آزمونهای سریهای عددی برای همگرایی و واگرایی	۳۰۹

۳۱۳	چند قضیه درباره همگرایی مطلق سریها
۳۳۱	۲-۹ دنباله تابعی و سری تابعی - همگرایی یکنواخت
۳۳۳	چند آزمون ویژه برای سریهای همگرای یکنواخت
۳۳۴	چند قضیه درباره سریهای یکنواخت
۳۳۵	سریهای توانی
۳۳۶	چند قضیه درباره سریهای توانی
۳۳۸	چند سری توانی مهم
۳۴۹	مسائل مربوط به سری توان

جلد اول کتاب «ریاضیات عمومی» در اواخر سال ۶۵ به چاپ رسید و با استقبال بی نظیری مواجه شد به طوری که در کمتر از دو ماه تمام نسخ آن به اتمام رسید. بر آن شدم جلد دوم را هر چه سریعتر آماده چاپ سازم.

از طرفی به خاطر این که این مجموعه شامل تمام مطالب و سرفصلهای درس ریاضیات عمومی ۱ باشد لازم دیدم که مبحث سریها و اعداد مختلط را به کتاب اضافه نمایم. برای ایجاد رابطه منطقی بین سایر مباحث کتاب و این دو مبحث، تصمیم گرفتم مبحث سریها را در یک فصل اضافه نمایم. همچنین برای بالا بردن کیفیت این کتاب حدود ۵۰۰ مسئله سودمند دیگر نیز در لابلای مطالب جلد دوم گنجانده شده است.

این کتاب با انتگرالهای نامعین شروع می شود و سپس به انتگرالهای معین و کاربردهای آن می رسد و بالاخره مبحث انتگرالهای غیر عادی مطرح می گردد و آنگاه به بحث درباره سریهای نامتناهی منتهی می گردد.

همانند جلد اول هر فصلی با خلاصه مباحث شروع شده و سپس حل چند مسئله متنوع آمده و آنگاه مسائل مشابه برای حل داده شده است.

این کتاب غیر از مبحث سریها (که آنهم رابطه تنگاتنگی با انتگرالها دارد)، تماماً انتگرالها را مورد بحث قرار می دهد که می توان گفت اغلب روشهای جامع انتگرالگیری را در بردارد و انتگرال معین با آن همه کاربردهای متنوع مورد بحث قرار می گیرد.

خواننده خود می داند که انتگرالها در ریاضیات رُئ اساسی را بازی می کنند و در تمام مسائل مهندسی نقش تعیین کننده دارند. موفقیت یک دانشجوی مهندسی یا علوم در ریاضیات در گرو مهارت و تبحر او در روشهای انتگرالگیری دارد. به اعتقاد اینجانب، این کتاب می تواند این مهارت را در خواننده ایجاد نماید و راه را برای موفقیت او در سایر مباحث ریاضی هموار سازد.

در خاتمه از همسرم به خاطر تشریک مساعی صمیمانه اش در تنظیم فرمولها سپاسگزارم و از کارکنان قسمت «کامپ ست» انتشارات دانشگاه علم و صنعت ایران نیز به خاطر حروچینی فارسی کمال تشکر را دارم. از خوانندگان عزیز انتظار دارد هر نظر اصلاحی که داشته باشند اطلاع دهند تا در چاپهای بعدی در نظر گرفته شود.

خلیل پاریاب

گروه ریاضیات کاربردی و کامپیوتر

دانشگاه علم و صنعت ایران

اردیبهشت ۱۳۶۶

فصل چهارم

روشهای بنیادی انتگرالگیری

۱-۴ انتگرالگیری و روش تعمیم

در انتگرالگیری مستقیم، از جدول انتگرالها که شامل دستورهای اساسی انتگرالگیری است استفاده می کنیم:

- (1) $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1);$
- (2) $\int \frac{du}{u} = \ln |u| + C;$
- (3) $\int a^u du = \frac{1}{\ln a} a^u + C; \quad \int e^u du = e^u + C;$
- (4) $\int \cos u du = \sin u + C; \quad \int \sin u du = -\cos u + C;$
- (5) $\int \cosh u du = \sinh u + C; \quad \int \sinh u du = \cosh u + C;$
- (6) $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \tan u + C; \quad \int \frac{du}{\sin^2 u} = -\cot u + C;$
- (7) $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{u}{a} + C = -\frac{1}{a} \operatorname{arccot} \frac{u}{a} + C_1 \quad (a > 0);$
- (8) $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C = -\arccos \frac{u}{a} + C_1 \quad (a > 0);$
- (9) $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln(u + \sqrt{u^2 \pm a^2}) + C;$
- (10) $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C.$

در این دستورها u یا متغیر مستقل است و یا تابعی مشتقپذیر از متغیر مستقل دیگری است.

اگر

$$\int f(u) du = F(u) + C,$$

آنگاه

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C.$$

خاصیت خطی بودن انتگرالها به صورت زیر تعمیم پیدا می کند:

$$\int \sum_{i=1}^n a_i f_i(x) dx = \sum_{i=1}^n a_i \int f_i(x) dx \quad \left(\sum_{i=1}^n |a_i| > 0 \right).$$

۱-۱-۴ انتگرال زیر را حساب کنید .

$$I = \int \frac{x^2 + 5x - 1}{\sqrt{x}} dx.$$

حل

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x^2 + 5x - 1}{\sqrt{x}} dx = \int (x^{3/2} + 5x^{1/2} - x^{-1/2}) dx = \\ &= \int x^{3/2} dx + 5 \int x^{1/2} dx - \int x^{-1/2} dx = \\ &= \frac{2x^{5/2}}{5} + C_1 + \frac{5 \cdot 2}{3} x^{3/2} + C_2 - 2x^{1/2} + C_3 = \\ &= 2\sqrt{x} \left(\frac{x^2}{5} + \frac{5x}{3} - 1 \right) + C. \end{aligned}$$

تذکر. لازم نیست که در محاسبه هر انتگرال یک مقدار ثابت به جواب آن اضافه کنیم (همان طوری که در مثال بالا دیدیم) چون مجموع چند مقدار ثابت، یک مقدار ثابت است. لذا فقط یک مقدار ثابت بعد از حل آخرین انتگرال به جواب اضافه می کنیم.

۲-۱-۴

$$I = \int \frac{6x^3 + x^2 - 2x + 1}{2x - 1} dx.$$

جواب:

$$I = x^3 + x^2 + 0.5 \ln |2x - 1| + C.$$

۳-۱-۴

$$I = \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$$

حل. انتگران را به صورت زیر می نویسیم

$$\frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}.$$

$$I = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \tan x - \cot x + C.$$

پس

۴-۱-۴

$$I = \int \tan^2 x \, dx.$$

حل. چون $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ ، بنابراین

$$I = \int \tan^2 x \, dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \tan x - x + C.$$

۴-۱-۵

$$I = \int (x^2 + 5)^3 \, dx.$$

حل. انتگران را با استفاده از دستور دو جمله‌ای، بسط می‌دهیم

$$I = \int (x^6 + 15x^4 + 75x^2 + 125) \, dx = \frac{x^7}{7} + \frac{15x^5}{5} + \frac{75x^3}{3} + 125x + C.$$

۴-۱-۶

$$I = \int (3x + 5)^{17} \, dx.$$

حل. چون $u = 3x + 5$ تابعی خطی است، پس معقول نیست که از بسط دو

جمله‌ای استفاده کنیم و آن را به قوه ۱۷ برسانیم. با توجه به جدول انتگرالها داریم:

$$\int u^{17} \, du = \frac{u^{18}}{18} + C,$$

از آنجا

$$I = \frac{1}{3} \cdot \frac{(3x+5)^{18}}{18} + C.$$

۴-۱-۷

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}.$$

جواب:

$$I = \frac{2}{3} (x+1)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C$$

۴-۱-۸

$$I = \int \cos(\pi x + 1) \, dx.$$

حل. با توجه به فرمول (۴) از جدول انتگرالها، داریم

$$\int \cos u \, du = \sin u + C,$$

پس

$$I = \frac{1}{\pi} \sin(\pi x + 1) + C.$$

۴-۱-۹

$$I = \int \cos 4x \cos 7x dx.$$

حل. توصیه می شود در حل چنین انتگرالهایی از دستورهایی مثلثاتی استفاده گردد.

$$\cos 4x \cos 7x = \frac{1}{2} (\cos 3x + \cos 11x)$$

بنابراین

$$I = \frac{1}{2} \int \cos 3x dx + \frac{1}{2} \int \cos 11x dx = \frac{1}{6} \sin 3x + \frac{1}{22} \sin 11x + C.$$

تذکره. در حل چنین انتگرالهایی از اتحادهای مثلثاتی زیر استفاده می کنیم

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2} [\sin (m-n)x + \sin (m+n)x];$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2} [\cos (m-n)x - \cos (m+n)x];$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2} [\cos (m-n)x + \cos (m+n)x].$$

۴-۱-۱۰

$$I = \int \cos x \cos 2x \cos 5x dx.$$

حل. داریم

$$\begin{aligned} (\cos x \cos 2x) \cos 5x &= \frac{1}{2} (\cos x + \cos 3x) \cos 5x = \\ &= \frac{1}{4} [\cos 4x + \cos 6x] + \frac{1}{4} (\cos 2x + \cos 8x). \end{aligned}$$

از آنجا

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{4} \left[\int \cos 2x dx + \int \cos 4x dx + \int \cos 6x dx + \int \cos 8x dx \right] = \\ &= \frac{1}{8} \sin 2x + \frac{1}{16} \sin 4x + \frac{1}{24} \sin 6x + \frac{1}{32} \sin 8x + C. \end{aligned}$$

۴-۱-۱۱

$$I = \int \sin^2 3x dx.$$

حل. چون

$$\sin^2 3x = \frac{1 - \cos 6x}{2},$$

بنابراین

$$I = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 6x) dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{12} \sin 6x + C.$$

۴-۱-۱۲

$$I = \int \cosh^2 (8x + 5) dx.$$

حل. چون

$$\cosh^2 u = \frac{\cosh 2u + 1}{2},$$

پس

$$I = \frac{1}{2} \int [1 + \cosh (16x + 10)] dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{32} \sinh (16x + 10) + C.$$

۴-۱-۱۳

$$I = \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}.$$

حل.

$$I = \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5} = \int \frac{dx}{(x+2)^2 + 1} = \arctan (x+2) + C.$$

۴-۱-۱۴

$$I = \int \frac{dx}{4x^2 + 25}.$$

$$I = \frac{1}{10} \arctan \frac{2x}{5} + C. \quad \text{جواب:}$$

$$I = \int \frac{dx}{x^2 + x + 1}. \quad ۴-۱-۱۵$$

$$I = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C. \quad \text{جواب:}$$

۴-۱-۱۶

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}.$$

حل.

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{\sqrt{4/9-x^2}} = \frac{1}{3} \arcsin \frac{3x}{2} + C.$$

۴-۱-۱۷

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2-4x}}.$$

حل.

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2-4x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9-(x+2)^2}} = \arcsin \frac{x+2}{3} + C.$$

۴-۱-۱۸

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 6x + 1}}.$$

$$I = \ln |x+3 + \sqrt{x^2 + 6x + 1}| + C. \quad \text{جواب:}$$

۴-۱-۱۹

$$I = \int \frac{dx}{4-x^2-4x}.$$

حل.

$$I = \int \frac{dx}{4-x^2-4x} = \int \frac{dx}{8-(x+2)^2} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{2\sqrt{2}+x+2}{2\sqrt{2}-(x+2)} \right| + C.$$

۴-۱-۲۰

$$I = \int \frac{dx}{10x^2-7}.$$

$$I = \frac{1}{2\sqrt{70}} \ln \left| \frac{\sqrt{10x}-\sqrt{7}}{\sqrt{10x}+\sqrt{7}} \right| + C. \quad \text{جواب:}$$

۴-۱-۲۱ انتگرالهای زیر را حساب کنید

$$(a) \int \frac{dx}{x^2-6x+13}; \quad (b) \int \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}} dx;$$

$$(c) \int \frac{3-2\cot^2 x}{\cos^2 x} dx; \quad (d) \int \frac{2+3x^2}{x^2(1+x^2)} dx.$$

جواب:

$$(a) \frac{1}{2} \arctan \frac{x-3}{2} + C; \quad (b) \frac{3}{4} (x-4) \sqrt[3]{x} + C; \quad (c) 3 \tan x +$$

$$+ 2 \cot x + C; \quad (d) -\frac{2}{x} + \arctan x + C.$$

۴-۱-۲۲ انتگرالهای زیر را حساب کنید:

$$(a) \int \frac{\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx; \quad (b) \int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx;$$

$$(c) \int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} dx; \quad (d) \int (\sin 5x - \sin 5\alpha) dx.$$

جواب:

$$(a) \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + \arcsin x + C; \quad (b) \sin x - \cos x + C;$$

$$(c) -\frac{2}{\ln 5} 5^{-x} + \frac{1}{5 \ln 2} 2^{-x} + C; \quad (d) -0.2 \cos 5x - x \sin 5\alpha + C.$$

۴-۱-۲۳ انتگرالهای زیر را محاسبه نمایید:

$$1. \int 5a^2 x^2 dx.$$

$$2. \int (6x^2 + 8x + 3) dx.$$

$$3. \int x(x+a)(x+b) dx.$$

$$4. \int (a+bx^2)^2 dx.$$

$$5. \int \sqrt{2px} dx.$$

$$6. \int \frac{dx}{\sqrt[n]{x}}.$$

$$7. \int (nx)^{\frac{1-n}{n}} dx.$$

$$\text{جواب: } \frac{5}{7} a^2 x^3$$

$$2x^3 + 4x^2 + 3x. \quad //$$

$$\frac{x^4}{4} + \frac{(a+b)x^3}{3} + \frac{abx^2}{2}. \quad //$$

$$a^2x + \frac{abx^3}{2} + \frac{b^2x^5}{5}. \quad //$$

$$\frac{2x}{3} \sqrt{2px}. \quad //$$

$$\frac{nx^{\frac{n}{n-1}}}{n-1}. \quad //$$

$$\sqrt[n]{nx}. \quad //$$

8. $\int \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^2 dx.$ جواب: $a^2 x - \frac{9}{5} a^{\frac{4}{3}} x^{\frac{5}{3}} + \frac{9}{7} a^{\frac{2}{3}} x^{\frac{7}{3}} - \frac{x^3}{3}.$
9. $\int (\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)dx.$ " $\frac{2x^2 \sqrt{x}}{5} + x.$
10. $\int \frac{(x^2+1)(x^2-2)}{\sqrt[3]{x^2}} dx.$ " $\frac{3x^4 \sqrt[3]{x}}{13} - \frac{3x^2 \sqrt[3]{x}}{7} - 6 \sqrt[3]{x}.$
11. $\int \frac{(x^m - x^n)^2}{\sqrt{x}} dx.$ " $\frac{2x^{2m} \sqrt{x}}{4m+1} - \frac{4x^{m+n} \sqrt{x}}{2m+2n+1} + \frac{2x^{2n} \sqrt{x}}{4n+1}.$
12. $\int \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{x})^4}{\sqrt{ax}} dx.$ " $2a \sqrt{ax} - 4ax + 4x \sqrt{ax} - 2x^2 + \frac{2x^3}{5 \sqrt{ax}}.$
13. $\int \frac{dx}{x^2+7}.$ " $\frac{1}{\sqrt{7}} \arctan \frac{x}{\sqrt{7}}.$
14. $\int \frac{dx}{x^2-10}.$ " $\frac{1}{2\sqrt{10}} \ln \left| \frac{x-\sqrt{10}}{x+\sqrt{10}} \right|.$
15. $\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}.$ " $\ln(x + \sqrt{4+x^2}).$
16. $\int \frac{dx}{\sqrt{8-x^2}}.$ " $\arcsin \frac{x}{2\sqrt{2}}.$
17. $\int \frac{\sqrt{2+x^2} - \sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^4}} dx.$ " $\arcsin \frac{x}{\sqrt{2}} - \ln(x + \sqrt{x^2+2}).$
18. a) $\int \tan^2 x dx;$ " a) $\tan x - x.$
- b) $\int \tanh^2 x dx.$ " b) $x - \tanh x.$
19. a) $\int \cot^2 x dx;$ " a) $-\cot x - x;$
- b) $\int \coth^2 x dx.$ " b) $x - \coth x.$
20. $\int 3^x e^x dx.$ " $\frac{(3e)^x}{\ln 3 + 1}.$

راهنمایی - فرض کنید $\tan^2 x = \sec^2 x - 1;$

جواب: b) $x - \tanh x.$

راهنمایی - فرض کنید $\tanh^2 x = 1 - \frac{1}{\cosh^2 x}$

جواب:

۲-۴ انتگرالگیری بکمک تغییر متغیر

در حل انتگرالها با روش تغییر متغیر، به جای x تابع پیوسته و مشتق پذیر $\varphi(t)$ را قرار می دهیم، یعنی

$$\int f(x) dx = \int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt,$$

بعد از حل، براساس تابع معکوس، بجای t نسبت به x قرار می دهیم،
یعنی

$$t = \varphi^{-1}(x)$$

از فرمول فوق به صورت زیر هم، می توان استفاده کرد:

$$\int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt = \int f(x) dx,$$

که در آن $x = \varphi(t)$

$$I = \int x \sqrt{x-5} dx. \quad 4-2-1$$

حل. تغییر متغیر زیر را در نظر می گیریم:

$$\sqrt{x-5} = t.$$

از آنجا

$$x-5 = t^2, \quad x = t^2 + 5, \quad dx = 2t dt.$$

انتگرال به صورت زیر در می آید

$$I = \int (t^2 + 5) t \cdot 2t dt = 2 \int (t^4 + 5t^2) dt = 2 \left(\frac{t^5}{5} + \frac{10t^3}{3} \right) + C.$$

به جای t نسبت به x ، مقدار می گذاریم

$$I = \frac{2(x-5)^{5/2}}{5} + \frac{10(x-5)^{3/2}}{3} + C.$$

$$I = \int \frac{dx}{1+e^x} \quad 4-2-2$$

حل. با توجه به تغییر متغیر $t = 1 + e^x$ داریم:

$$e^x = t - 1, \quad x = \ln(t - 1), \quad dx = dt/(t - 1)$$

این مقادیر را در انتگرال قرار می دهیم

$$I = \int \frac{dx}{1+e^x} = \int \frac{dt}{t(t-1)}$$

چون

$$\frac{1}{t(t-1)} = \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t},$$

ناوبر این

$$I = \int \frac{dt}{t-1} - \int \frac{dt}{t} = \ln|t-1| - \ln|t| + C.$$

با توجه به رابطه بین t و x داریم:

$$I = \ln \frac{e^x}{1+e^x} + C = x - \ln(1+e^x) + C.$$

توجه. این انتگرال را می توان به صورت زیر، با ضرب صورت و مخرج به e^{-x} حل کرد:

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1} dx &= - \int \frac{-e^{-x}}{e^{-x}+1} dx = - \ln(e^{-x}+1) + C = \\ &= - \ln \frac{e^x+1}{e^x} = x - \ln(e^x+1) + C. \end{aligned}$$

$$I = \int \frac{x^2+3}{\sqrt{(2x-5)^3}} dx. \quad \text{۴-۲-۳}$$

$$I = \frac{1}{12} \sqrt{(2x-5)^3} + \frac{5}{2} \sqrt{2x-5} - \frac{37}{4 \sqrt{2x-5}} + C. \quad \text{: جواب}$$

$$I = \int \frac{(x^2-1) dx}{(x^4+3x^2+1) \arctan \frac{x^2+1}{x}}. \quad \text{۴-۲-۴}$$

حل. انتگرال را به صورت زیر تغییر شکل می دهیم:

$$I = \int \frac{(1-1/x^2) dx}{[(x+1/x)^2+1] \arctan(x+1/x)}.$$

و با توجه به تغییر متغیر $t = x + \frac{1}{x}$ داریم

$$\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx = dt$$

از آنجا

$$I = \int \frac{dt}{(t^2+1) \arctan t}$$

دوباره تغییر متغیر $\arctan t = u$ را بکار می بریم، بنابراین

$$\frac{dt}{t^2+1} = du$$

و

$$I = \int \frac{du}{u} = \ln |u| + C$$

جواب را نخست نسبت به t و پس از آن نسبت به x می نویسیم:

$$I = \ln |\arctan t| + C = \ln \left| \arctan \left(x + \frac{1}{x} \right) \right| + C.$$

$$I = \int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4} dx \quad \text{۴-۲-۵}$$

حل . به صورت زیر عمل می کنیم :

$$x = \frac{1}{t}; \quad dx = -\frac{dt}{t^2}.$$

پس

$$I = -\int \frac{\sqrt{a^2 - 1/t^2}}{(1/t^4) t^2} dt = -\int t \sqrt{a^2 t^2 - 1} dt.$$

دوباره از تغییر متغیر استفاده می کنیم :

$$\sqrt{a^2 t^2 - 1} = z. \quad \text{و} \quad 2a^2 t dt = 2z dz$$

$$I = -\frac{1}{a^2} \int z^2 dz = -\frac{1}{3a^2} z^3 + C.$$

و بالاخره

$$I = -\frac{(a^2 - x^2)^{3/2}}{3a^2 x^3} + C.$$

۴-۲-۶

$$I = \int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}.$$

حل .

$$I = \int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} = \frac{1}{b^2} \int \frac{1}{\frac{a^2}{b^2} \tan^2 x + 1} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x}$$

با توجه به تغییر متغیر

$$\frac{a}{b} \tan x = t; \quad dt = \frac{a}{b} \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

داریم

$$I = \frac{1}{ab} \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{ab} \arctan t + C.$$

حال جواب را نسبت به x می نویسیم :

$$I = \frac{1}{ab} \arctan \left(\frac{a}{b} \tan x \right) + C.$$

۴-۲-۷

$$I = \int \sqrt[3]{1+3 \sin x} \cos x dx.$$

حل . تغییر متغیر زیر را در نظر می گیریم :

$$1+3 \sin x = t. \quad 3 \cos x dx = dt$$

از آنجا

$$I = \frac{1}{3} \int \sqrt[3]{t} dt = \frac{1}{3} \int t^{1/3} dt = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} t^{4/3} + C = \frac{(1+3 \sin x)^{4/3}}{4} + C.$$

۴-۲-۸

$$I = -2 \sqrt{\cos x} + C. \quad \text{جواب:} \quad I = \int \frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos x}}.$$

$$I = \int \frac{dx}{(\arccos x)^5 \sqrt{1-x^2}} \quad \text{۴-۲-۹}$$

حل. به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\arccos x = t; \quad -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = dt.$$

پس

$$I = - \int \frac{dt}{t^5} = - \int t^{-5} dt = \frac{1}{4} t^{-4} + C = \frac{1}{4 \arccos^4 x} + C.$$

$$I = \frac{1}{2} (x^3 + 3x + 1)^{\frac{2}{3}} + C. \quad \text{جواب: } I = \int \frac{x^2 + 1}{\sqrt[3]{x^3 + 3x + 1}} dx \quad \text{۴-۲-۱۰}$$

$$I = \int \frac{\sin 2x}{1 + \sin^2 x} dx \quad \text{۴-۲-۱۱}$$

حل. با توجه به تغییر متغیر $t = 1 + \sin^2 x$ داریم:

$$2 \sin x \cos x dx = \sin 2x dx = dt.$$

$$I = \int \frac{dt}{t} = \ln t + C = \ln (1 + \sin^2 x) + C.$$

$$I = \int \frac{1 + \ln x}{3 + x \ln x} dx \quad \text{۴-۲-۱۲}$$

حل. فرض می‌کنیم

$$3 + x \ln x = t,$$

از آنجا داریم:

$$(1 + \ln x) dx = dt$$

$$I = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \ln |3 + x \ln x| + C.$$

۴-۲-۱۳. انتگرالهای زیر را محاسبه نمایید:

$$(a) \int \frac{\sqrt[3]{1 + \ln x}}{x} dx; \quad (b) \int \frac{dx}{x \ln x};$$

$$(c) \int \frac{x dx}{\sqrt{3-x^4}}; \quad (d) \int \frac{x^n - 1}{x^{2n} + a^2} dx;$$

$$(e) \int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx; \quad (f) \int \left(\ln x + \frac{1}{\ln x} \right) \frac{dx}{x}.$$

جواب

$$(a) 0.75 \sqrt[3]{(1 + \ln x)^4} + C; \quad (b) \ln |\ln x| + C; \quad (c) \frac{1}{2} \arcsin \frac{x^2}{\sqrt{3}} + C;$$

$$(d) \frac{1}{na} \arctan \frac{x^n}{a} + C; \quad (e) -2 \cos \sqrt{x} + C; \quad (f) \frac{1}{2} \ln^2 x + \ln |\ln x| + C.$$

۱۴-۲-۴. انتگرالهای زیر را محاسبه نمایید :

$$(a) \int x^2 \sqrt[3]{1-x} dx; (b) \int \frac{\ln x dx}{x \sqrt{1+\ln x}};$$

$$(c) \int \cos^5 x \sqrt{\sin x} dx; (d) \int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

جواب

$$(a) -\frac{3}{140} (35-40x+14x^2) (1-x)^{\frac{4}{3}} + C;$$

$$(b) \frac{2}{3} (\ln x - 5) \sqrt{1+\ln x} + C;$$

$$(c) \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{7} \sin^2 x + \frac{2}{11} \sin^4 x \right) \sqrt{\sin^3 x} + C;$$

$$(d) -\frac{1}{15} (8+4x^2+3x^4) \sqrt{1-x^2} + C.$$

۱۵-۲-۴ انتگرالهای زیر را محاسبه نمایید :

$$1. \int \frac{a dx}{a-x} \quad \text{جواب:} \quad a \ln \left| \frac{c}{a-x} \right|$$

حل -

$$\int \frac{a}{a-x} dx = -a \int \frac{d(a-x)}{a-x} = -a \ln |a-x| + a \ln c = a \ln \left| \frac{c}{a-x} \right|.$$

$$2. \int \frac{2x+3}{2x+1} dx. \quad \text{جواب:} \quad x + \ln |2x+1|.$$

حل -

$$\int \frac{2x+3}{2x+1} dx = \int dx + \int \frac{2 dx}{2x+1} = x + \int \frac{d(2x+1)}{2x+1} = x + \ln |2x+1|.$$

$$3. \int \frac{1-3x}{3+2x} dx. \quad \text{جواب:} \quad -\frac{3}{2} x + \frac{11}{4} \ln |3+2x|.$$

$$4. \int \frac{x dx}{a+bx}. \quad // \quad \frac{x}{b} - \frac{a}{b^2} \ln |a+bx|.$$

$$5. \int \frac{ax+b}{ax+\beta} dx. \quad // \quad \frac{a}{a} x + \frac{ba-a\beta}{a^2} \ln |ax+\beta|.$$

$$6. \int \frac{x^2+1}{x-1} dx. \quad // \quad \frac{x^2}{2} + x + 2 \ln |x-1|.$$

$$7. \int \frac{x^2+5x+7}{x+3} dx. \quad // \quad \frac{x^2}{2} + 2x + \ln |x+3|.$$

$$8. \int \frac{x^4+x^2+1}{x-1} dx. \quad // \quad \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + x^2 + 2x + 3 \ln |x-1|.$$

از آنجا

$$9. \int \left(a + \frac{b}{x-a}\right)^2 dx. \quad \text{جواب: } a^2x + 2ab \ln|x-a| - \frac{b^2}{x-a}.$$

$$10. \int \frac{x}{(x+1)^2} dx. \quad // \quad \ln|x+1| + \frac{1}{x+1}.$$

راه‌نمایی:

$$\int \frac{x dx}{(x+1)^2} = \int \frac{(x+1)-1}{(x+1)^2} dx = \int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{dx}{(x+1)^2}.$$

$$11. \int \frac{b dy}{\sqrt{1-y}}. \quad \text{جواب: } -2b \sqrt{1-y}.$$

$$12. \int \sqrt{a-bx} dx. \quad // \quad -\frac{2}{3b} \sqrt{(a-bx)^3}.$$

$$13^*. \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx. \quad // \quad \sqrt{x^2+1}.$$

- حل

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1}.$$

$$14. \int \frac{\sqrt{x+\ln x}}{x} dx. \quad \text{جواب: } 2\sqrt{x} + \frac{\ln^2 x}{2}.$$

$$15. \int \frac{dx}{3x^2+5}. \quad // \quad \frac{1}{\sqrt{15}} \arctan x \sqrt{\frac{3}{5}}.$$

$$16. \int \frac{dx}{7x^2-8}. \quad // \quad \frac{1}{4\sqrt{14}} \ln \left| \frac{x\sqrt{7}-2\sqrt{2}}{x\sqrt{7}+2\sqrt{2}} \right|.$$

$$17. \int \frac{dx}{(a+b)-(a-b)x^2} \quad (0 < b < a). \quad // \quad \frac{1}{2\sqrt{a^2-b^2}} \ln \left| \frac{\sqrt{a+b}+x\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}-x\sqrt{a-b}} \right|.$$

$$18. \int \frac{x^2}{x^2+2} dx. \quad // \quad x - \sqrt{2} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}}.$$

$$19. \int \frac{x^3}{a^2-x^2} dx. \quad // \quad -\left(\frac{x^2}{2} + \frac{a^2}{2} \ln|a^2-x^2|\right).$$

$$20. \int \frac{x^2-5x+6}{x^2+4} dx. \quad // \quad x - \frac{5}{2} \ln(x^2+4) + \arctan \frac{x}{2}.$$

$$21. \int \frac{dx}{\sqrt{7+8x^2}}. \quad // \quad \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln(2\sqrt{2}x + \sqrt{7+8x^2}).$$

$$22. \int \frac{dx}{\sqrt{7-5x^2}}. \quad // \quad \frac{1}{\sqrt{5}} \arcsin x \sqrt{\frac{5}{7}}.$$

$$23. \int \frac{2x-5}{3x^2-2} dx. \quad // \quad \frac{1}{3} \ln|3x^2-2| - \frac{5}{2\sqrt{6}} \ln \left| \frac{x\sqrt{3}-\sqrt{2}}{x\sqrt{3}+\sqrt{2}} \right|$$

$$24. \int \frac{3-2x}{5x^2+7} dx. \quad // \quad \frac{3}{\sqrt{35}} \arctan \sqrt{\frac{5}{7}}x - \frac{1}{5} \ln(5x^2+7).$$

$$25. \int \frac{3x+1}{\sqrt{5x^2+1}} dx. \quad // \quad \frac{3}{5} \sqrt{5x^2+1} + \frac{1}{\sqrt{5}} \ln(x\sqrt{5} + \sqrt{5x^2+1}).$$

$$26. \int \frac{x+3}{\sqrt{x^2-4}} dx. \quad \text{جواب: } \sqrt{x^2-4} + 3 \ln |x + \sqrt{x^2-4}|.$$

$$27. \int \frac{x dx}{x^2-5}. \quad // \quad \frac{1}{2} \ln |x^2-5|.$$

$$28. \int \frac{x dx}{2x^2+3}. \quad // \quad \frac{1}{4} \ln (2x^2+3).$$

$$29. \int \frac{ax+b}{a^2x^2+b^2} dx. \quad // \quad \frac{1}{2a} \ln (a^2x^2+b^2) + \frac{1}{a} \arctan \frac{ax}{b}.$$

$$30. \int \frac{x dx}{\sqrt{a^2-x^2}}. \quad // \quad \frac{1}{2} \arcsin \frac{x}{a}.$$

$$31. \int \frac{x^2}{1+x^6} dx. \quad // \quad \frac{1}{3} \arctan x^3.$$

$$32. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^6-1}}. \quad // \quad \frac{1}{3} \ln |x^3 + \sqrt{x^6-1}|.$$

$$33. \int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}} dx. \quad // \quad \frac{2}{3} \sqrt{(\arcsin x)^3}.$$

$$34. \int \frac{\arctan \frac{x}{2}}{4+x^2} dx. \quad // \quad \frac{\left(\arctan \frac{x}{2}\right)^2}{4}.$$

$$35. \int \frac{x - \sqrt{\arctan 2x}}{1+4x^2} dx. \quad // \quad \frac{1}{8} \ln (1+4x^2) - \frac{\sqrt{(\arctan 2x)^3}}{3}.$$

$$36. \int \sqrt{\frac{dx}{(1+x^2) \ln (x + \sqrt{1+x^2})}}. \quad // \quad 2 \sqrt{\ln (x + \sqrt{1+x^2})}.$$

$$37. \int a e^{-mx} dx. \quad // \quad -\frac{a}{m} e^{-mx}.$$

$$38. \int 4^{2-3x} dx. \quad // \quad -\frac{1}{3 \ln 4} 4^{2-3x}.$$

$$39. \int (e^t - e^{-t}) dt. \quad // \quad e^t + e^{-t}.$$

$$40. \int \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)^2 dx. \quad // \quad \frac{a}{2} e^{\frac{2x}{a}} + 2x - \frac{a}{2} e^{-\frac{2x}{a}}.$$

$$41. \int \frac{(a^x - b^x)^2}{a^x b^x} dx. \quad // \quad \frac{1}{\ln a - \ln b} \left(\frac{a^x}{b^x} - \frac{b^x}{a^x}\right) - 2x.$$

$$42. \int \frac{a^{2x}-1}{\sqrt{a^x}} dx. \quad // \quad \frac{2}{3 \ln a} \sqrt{a^{2x}} + \frac{2}{\ln a} \sqrt{a^x}.$$

$$43. \int e^{-(x^2+1)} x dx. \quad // \quad -\frac{1}{2e^{x^2+1}}.$$

$$44. \int x \cdot 7^{x^2} dx. \quad // \quad \frac{1}{2 \ln 7} 7^{x^2}.$$

$$45. \int \frac{e^x}{x^2} dx. \quad // \quad -e^{\frac{1}{x}}.$$

$$46. \int 5^{\sqrt{x}} \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

$$\text{جواب} \quad \frac{2}{\ln 5} 5^{\sqrt{x}}.$$

$$47. \int \frac{e^x}{e^x - 1} dx.$$

$$// \quad \ln |e^x - 1|.$$

$$48. \int e^x \sqrt{a - be^x} dx.$$

$$// \quad -\frac{2}{3b} \sqrt{(a - be^x)^3}.$$

$$49. \int \left(e^{\frac{x}{a}} + 1\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{x}{a}} dx.$$

$$// \quad \frac{3a}{4} (e^{\frac{x}{a}} + 1)^{\frac{4}{3}}.$$

$$50. \int \frac{dx}{2^x + 3}.$$

$$// \quad \frac{x}{3} - \frac{1}{3 \ln 2} \ln(2^x + 3).$$

راهنمایی:

$$\frac{1}{2^x + 3} = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{2^x}{2^x + 3}\right).$$

$$51. \int \frac{a^x dx}{1 + a^{2x}}.$$

$$\text{جواب} \quad \frac{1}{\ln a} \arctan(a^x).$$

$$52. \int \frac{e^{-bx}}{1 - e^{-2bx}} dx.$$

$$// \quad -\frac{1}{2b} \ln \left| \frac{1 + e^{-bx}}{1 - e^{-bx}} \right|.$$

$$53. \int \frac{e^t dt}{\sqrt{1 - e^{2t}}}.$$

$$// \quad \arcsin e^t.$$

$$54. \int \sin(a + bx) dx.$$

$$// \quad -\frac{1}{b} \cos(a + bx).$$

$$55. \int \cos \frac{x}{\sqrt{2}} dx.$$

$$// \quad \sqrt{2} \sin \frac{x}{\sqrt{2}}.$$

$$56. \int (\cos ax + \sin ax)^2 dx.$$

$$// \quad x - \frac{1}{2a} \cos 2ax.$$

$$57. \int \cos \sqrt{x} \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

$$// \quad 2 \sin \sqrt{x}.$$

$$58. \int \sin(\lg x) \frac{dx}{x}.$$

$$// \quad -\ln 10 \times \cos(\log x).$$

$$59. \int \sin^2 x dx.$$

$$// \quad \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}$$

راهنمایی -

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} (1 - \cos 2x).$$

$$60. \int \cos^2 x dx.$$

$$\text{جواب} \quad \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}.$$

$$61. \int \sec^2(ax + b) dx.$$

$$// \quad \frac{1}{a} \tan(ax + b).$$

$$62. \int \cot^2 ax dx.$$

$$// \quad -\frac{\cot ax}{a} - x.$$

$$63. \int \frac{dx}{\sin \frac{x}{a}}.$$

$$// \quad a \ln \left| \tan \frac{x}{2a} \right|.$$

$$64. \int \frac{dx}{3 \cos \left(5x - \frac{\pi}{4}\right)}.$$

$$// \quad \frac{1}{15} \ln \left| \tan \left(\frac{5x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) \right|.$$

65. $\int \frac{dx}{\sin(ax+b)}.$ جواب $\frac{1}{a} \ln \left| \tan \frac{ax+b}{2} \right|.$
66. $\int \frac{x dx}{\cos^2 x^2}.$ // $\frac{1}{2} \tan(x^2).$
67. $\int x \sin(1-x^2) dx.$ // $\frac{1}{2} \cos(1-x^2).$
68. $\int \left(\frac{1}{\sin x \sqrt{2}} - 1 \right)^2 dx.$ // $x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cot x \sqrt{2} - \sqrt{2} \ln \left| \tan \frac{x \sqrt{2}}{2} \right|.$
69. $\int \tan x dx.$ // $-\ln |\cos x|.$
70. $\int \cot x dx.$ // $\ln |\sin x|.$
71. $\int \cot \frac{x}{a-b} dx.$ // $(a-b) \times \ln \left| \sin \frac{x}{a-b} \right|.$
72. $\int \frac{dx}{\tan \frac{x}{5}}.$ // $5 \ln \left| \sin \frac{x}{5} \right|.$
73. $\int \tan \sqrt{x} \frac{dx}{\sqrt{x}}.$ // $-2 \ln |\cos \sqrt{x}|.$
74. $\int x \cot(x^2+1) dx.$ // $\frac{1}{2} \ln |\sin(x^2+1)|.$
75. $\int \frac{dx}{\sin x \cos x}.$ // $\ln |\tan x|.$
76. $\int \cos \frac{x}{a} \sin \frac{x}{a} dx.$ // $\frac{a}{2} \sin^2 \frac{x}{a}.$
77. $\int \sin^3 6x \cos 6x dx.$ // $\frac{\sin^4 6x}{24}.$
78. $\int \frac{\cos ax}{\sin^4 ax} dx.$ // $-\frac{1}{4a \sin^3 ax}.$
79. $\int \frac{\sin 3x}{3 + \cos 3x} dx.$ // $-\frac{1}{3} \ln(3 + \cos 3x).$
80. $\int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{\cos^2 x - \sin^2 x}} dx.$ // $-\frac{1}{2} \sqrt{\cos 2x}.$
81. $\int \sqrt{1+3 \cos^2 x} \sin 2x dx.$ // $-\frac{2}{9} \sqrt{(1+3 \cos^2 x)^3}.$
82. $\int \tan^3 \frac{x}{3} \sec^2 \frac{x}{3} dx.$ // $\frac{3}{4} \tan^4 \frac{x}{3}.$
83. $\int \frac{\sqrt{\tan x}}{\cos^2 x} dx.$ // $\frac{2}{3} \sqrt{\tan^3 x}.$
84. $\int \frac{\cot^{\frac{2}{3}} x}{\sin^2 x} dx.$ // $-\frac{3 \cot^{\frac{5}{3}} x}{5}.$
85. $\int \frac{1 + \sin 3x}{\cos^2 3x} dx.$ // $\frac{1}{3} \left(\tan 3x + \frac{1}{\cos 3x} \right).$
86. $\int \frac{(\cos ax + \sin ax)^2}{\sin ax} dx.$ // $\frac{1}{a} \left(\ln \left| \tan \frac{ax}{2} \right| + 2 \sin ax \right).$
87. $\int \frac{\operatorname{cosec}^2 3x}{b - a \cot 3x} dx.$ // $\frac{1}{3a} \ln |b - a \cot 3x|.$

$$88. \int (2 \sinh 5x - 3 \cosh 5x) dx.$$

$$89. \int \sinh^2 x dx.$$

$$90. \int \frac{dx}{\sinh x}.$$

$$91. \int \frac{dx}{\cosh x}.$$

$$92. \int \frac{dx}{\sinh x \cosh x}.$$

$$93. \int \tanh x dx.$$

$$94. \int \coth x dx.$$

$$95. \int x \sqrt[5]{5-x^2} dx.$$

$$96. \int \frac{x^3-1}{x^4-4x+1} dx.$$

$$97. \int \frac{x^3}{x^5+5} dx.$$

$$98. \int x e^{-x^2} dx.$$

$$99. \int \frac{3-\sqrt{2+3x^2}}{2+3x^2} dx. \quad // \sqrt{\frac{3}{2}} \arctan \left(x \sqrt{\frac{3}{2}} \right) - \frac{1}{\sqrt{3}} \ln (x \sqrt{3} + \sqrt{2+3x^2}).$$

$$100. \int \frac{x^3-1}{x+1} dx.$$

$$101. \int \frac{dx}{\sqrt{e^x}}.$$

$$102. \int \frac{1-\sin x}{x+\cos x} dx.$$

$$103. \int \frac{\tan 3x - \cot 3x}{\sin 3x} dx.$$

$$104. \int \frac{dx}{x \ln^2 x}.$$

$$105. \int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{\tan^2 x - 2}} dx.$$

$$106. \int \left(2 + \frac{x}{2x^2+1} \right) \frac{dx}{2x^2+1}.$$

$$107. \int a^{\sin x} \cos x dx.$$

$$108. \int \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3+1}} dx.$$

$$109. \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^4}}.$$

$$110. \int \tan^2 ax dx.$$

$$111. \int \sin^2 \frac{x}{2} dx.$$

$$\text{جواب} \quad \frac{2}{5} \cosh 5x - \frac{3}{5} \sinh 5x.$$

$$// \quad -\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sinh 2x.$$

$$// \quad \ln \left| \tanh \frac{x}{2} \right|.$$

$$// \quad 2 \arctan e^x.$$

$$// \quad \ln |\tanh x|.$$

$$// \quad \ln \cosh x.$$

$$// \quad \ln |\sinh x|.$$

$$// \quad -\frac{5}{12} \sqrt[5]{(5-x^2)^6}.$$

$$// \quad \frac{1}{4} \ln |x^4 - 4x + 1|.$$

$$// \quad \frac{1}{4 \sqrt[5]{5}} \times \arctan \frac{x^4}{\sqrt[5]{5}}.$$

$$// \quad -\frac{1}{2} e^{-x^2}$$

$$// \quad \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - 2 \ln |x+1|.$$

$$// \quad -\frac{2}{\sqrt{e^x}}.$$

$$// \quad \ln |x + \cos x|.$$

$$// \quad \frac{1}{3} \left(\ln |\sec 3x + \tan 3x| + \frac{1}{\sin 3x} \right).$$

$$// \quad -\frac{1}{\ln x}.$$

$$// \quad \ln |\tan x + \sqrt{\tan^2 x - 2}|.$$

$$// \quad \sqrt{2} \arctan (x \sqrt{2}) - \frac{1}{4(2x^2+1)}.$$

$$// \quad \frac{a^{\sin x}}{\ln a}.$$

$$// \quad \sqrt[3]{\frac{(x^3+1)^2}{2}}.$$

$$// \quad \frac{1}{2} \arcsin (x^2).$$

$$// \quad \frac{1}{a} \tan ax - x.$$

$$// \quad \frac{x}{2} - \frac{\sin x}{2}.$$

$$112. \int \frac{\sec^2 x \, dx}{\sqrt{4 - \tan^2 x}}.$$

$$113. \int \frac{dx}{\cos \frac{x}{a}}.$$

$$114. \int \frac{\sqrt[3]{1 + \ln x}}{x} dx.$$

$$115. \int \tan \sqrt{x-1} \frac{dx}{\sqrt{x-1}}.$$

$$116. \int \frac{x \, dx}{\sin x^2}.$$

$$117. \int \frac{e^{\arctan x} + x \ln(1+x^2) + 1}{1+x^2} dx.$$

$$118. \int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx.$$

$$119. \int \frac{\left(1 - \sin \frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}{\sin \frac{x}{\sqrt{2}}} dx.$$

$$120. \int \frac{x^2}{x^2-2} dx.$$

$$121. \int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)} dx.$$

$$122. \int e^{\sin^2 x} \sin 2x \, dx.$$

$$123. \int \frac{5-3x}{\sqrt{4-3x^2}} dx.$$

$$124. \int \frac{dx}{e^x + 1}.$$

$$125. \int \frac{dx}{(a+b) + (a-b)x^2} \quad (0 < b < a).$$

$$126. \int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-2}} dx.$$

$$127. \int \frac{dx}{\sin ax \cos ax}.$$

$$128. \int \sin \left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi_0 \right) dt.$$

$$129. \int \frac{dx}{x(4 - \ln^2 x)}.$$

$$130. \int \frac{\arccos \frac{x}{2}}{\sqrt{4-x^2}} dx.$$

$$131. \int e^{-\tan x} \sec^2 x \, dx.$$

جواب $\arcsin \frac{\tan x}{2}.$

" $a \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2a} + \frac{\pi}{4} \right) \right|.$

" $\frac{3}{4} \sqrt[3]{(1 + \ln x)^4}.$

" $-2 \ln |\cos \sqrt{x-1}|.$

" $\frac{1}{2} \ln \left| \tan \frac{x^2}{2} \right|.$

" $e^{\arctan x} + \frac{\ln^2(1+x^2)}{4} + \arctan x.$

" $-\ln |\sin x + \cos x|.$

" $\sqrt{2} \ln \left| \tan \frac{x}{2\sqrt{2}} \right| - 2x - \sqrt{2} \cos \frac{x}{\sqrt{2}}.$

" $x + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x - \sqrt{2}}{x + \sqrt{2}} \right|.$

" $\ln |x| + 2 \arctan x.$

" $e^{\sin^2 x}.$

" $\frac{5}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{x\sqrt{3}}{2} + \sqrt{4-3x^2}.$

" $x - \ln(1 + e^x).$

" $\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} \arctan x \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}.$

" $\ln(e^x + \sqrt{e^{2x}-2}).$

" $\frac{1}{a} \ln |\tan ax|.$

" $-\frac{T}{2\pi} \cos \left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi_0 \right).$

" $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{2 + \ln x}{2 - \ln x} \right|.$

" $-\frac{\left(\arccos \frac{x}{2} \right)^2}{2}.$

" $-e^{-\tan x}.$

132. $\int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{2 - \sin^4 x}} dx.$ جواب $\frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{\sin^2 x}{\sqrt{2}} \right).$
133. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}.$ // $-2 \cot 2x.$
134. $\int \frac{\arcsin x + x}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$ // $\frac{(\arcsin x)^2}{2} - \sqrt{1 - x^2}.$
135. $\int \frac{\sec x \tan x}{\sqrt{\sec^2 x + 1}} dx.$ // $\ln (\sec x + \sqrt{\sec^2 x + 1}).$
136. $\int \frac{\cos 2x}{4 + \cos^2 2x} dx.$ // $\frac{1}{4\sqrt{5}} \ln \left| \frac{\sqrt{5} + \sin 2x}{\sqrt{5} - \sin 2x} \right|.$
137. $\int \frac{dx}{1 + \cos^2 x}.$ // $\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}} \right).$
- راهنمایی :
- $\int \frac{dx}{1 + \cos^2 x} = \int \frac{dx}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\tan^2 x + 2}.$
138. $\int \sqrt{\frac{\ln(x + \sqrt{1 + x^2})}{1 + x^2}} dx.$ // $\frac{2}{3} \sqrt{[\ln(x + \sqrt{1 + x^2})]^3}.$
139. $\int x^2 \cos(x^3 + 3) dx.$ // $\frac{1}{3} \sinh(x^3 + 3).$
140. $\int \frac{3^{\tanh x}}{\cosh^2 x} dx.$ // $\frac{1}{\ln 3} 3^{\tanh x}.$
141. $\int x(2x + 5)^{10} dx.$ // $\frac{1}{4} \left[\frac{(2x + 5)^{12}}{12} - \frac{5(2x + 5)^{11}}{11} \right].$
142. $\int \frac{1 + x}{1 + \sqrt{x}} dx.$ // $2 \left(\frac{\sqrt{x^3}}{3} - \frac{x}{2} + 2\sqrt{x} - 2 \ln |1 + \sqrt{x}| \right).$
143. $\int \frac{dx}{x \sqrt{2x + 1}}.$ // $\ln \left| \frac{\sqrt{2x + 1} - 1}{\sqrt{2x + 1} + 1} \right|.$
144. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}.$ // $2 \arcsin \sqrt{e^x - 1}.$
145. $\int \frac{\ln 2x dx}{\ln 4x x}.$ // $\ln x - \ln 2 \ln |\ln x + 2 \ln 2|.$
146. $\int \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$ // $\frac{(\arcsin x)^3}{3}.$
147. $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x + 1}} dx.$ // $\frac{2}{3} (e^x - 2) \sqrt{e^x + 1}.$
148. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx.$ // $\frac{2}{5} (\cos^2 x - 5) \times \sqrt{\cos x}.$
149. $\int \frac{dx}{x \sqrt{1 + x^2}}.$ // $\ln \left| \frac{1}{1 + \sqrt{1 + x^2}} \right|.$

۳-۴. انتگرالگیری به روش جزء بجزء

دستور

$$\int u dv = uv - \int v du$$

موسوم به انتگرالگیری به روش جزء بجزء است که در آن u و v توابعی مشتقپذیر از x هستند. وقتی از این روش استفاده می‌کنیم انتگران را به حاصلضرب دو عامل تقسیم می‌کنیم. یکی از عاملها یک تابع است و عامل دیگر دیفرانسیل تابع دیگری است. اگر انتگران، به صورت حاصلضرب یک تابع لگاریتمی، یا یک تابع معکوس مثلثاتی، در یک چند جمله‌ای باشد، در این صورت معمولاً u را تابع لگاریتمی یا تابع معکوس مثلثاتی، انتخاب می‌کنند. ولی اگر انتگران حاصلضرب یک تابع لگاریتمی یا یک تابع نمایی در یک تابع جبری باشد، معمولاً تابع جبری را u فرض می‌کنند.

$$I = \int \arctan x \, dx \quad \text{۳-۴-۱}$$

حل. فرض می‌کنیم:

$$u = \arctan x, \quad dv = dx,$$

از آنجا

$$du = \frac{dx}{1+x^2}; \quad v = x;$$

$$I = \int \arctan x \, dx = x \arctan x - \int \frac{x \, dx}{1+x^2} = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.$$

$$I = \int \arcsin x \, dx \quad \text{۳-۴-۲} \quad \text{جواب: } x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

$$I = \int x \cos x \, dx \quad \text{۳-۴-۳} \quad \text{را حل کنید.}$$

حل. فرض می‌کنیم:

$$u = x; \quad dv = \cos x \, dx,$$

از آنجا

$$du = dx; \quad v = \sin x,$$

$$I = \int x \cos x \, dx = x \sin x - \int \sin x \, dx = x \sin x + \cos x + C.$$

حال نشان می‌دهیم که هرگاه انتخاب u و dv نامناسب باشد، چه اشکالی پیش می‌آید؟

$$\text{در انتگرال } \int x \cos x \, dx \text{ فرض می‌کنیم:}$$

$$u = \cos x; \quad dv = x \, dx,$$

بنابراین

$$du = -\sin x \, dx; \quad v = \frac{1}{2} x^2.$$

در این حالت

$$I = \frac{1}{2} x^2 \cos x + \frac{1}{2} \int x^2 \sin x \, dx.$$

پرواضح است که انتگرال حاصل از اولی مشکلتر است.

$$I = \int x^3 \ln x \, dx. \quad \text{۴-۳-۴}$$

حل. فرض می‌کنیم

$$u = \ln x; \quad dv = x^3 \, dx,$$

از آنجا

$$du = \frac{dx}{x}; \quad v = \frac{1}{4} x^4,$$

$$I = \frac{1}{4} x^4 \ln x - \frac{1}{4} \int x^4 \frac{dx}{x} = \frac{1}{4} x^4 \ln x - \frac{1}{4} \int x^3 \, dx = \frac{1}{4} x^4 \ln x - \frac{1}{16} x^4 + C.$$

$$I = \int (x^2 - 2x + 5) e^{-x} \, dx. \quad \text{۴-۳-۵}$$

حل. فرض می‌کنیم

$$u = x^2 - 2x + 5; \quad dv = e^{-x} \, dx,$$

و از آنجا

$$du = (2x - 2) \, dx; \quad v = -e^{-x};$$

$$I = \int (x^2 - 2x + 5) e^{-x} \, dx = -e^{-x} (x^2 - 2x + 5) + 2 \int (x - 1) e^{-x} \, dx.$$

بار دیگر از روش جزء بجزء برای انتگرال حاصل استفاده می‌کنیم:

$$x - 1 = u; \quad dv = e^{-x} \, dx,$$

$$du = dx; \quad v = -e^{-x}.$$

از آنجا

$$I_1 = 2 \int (x - 1) e^{-x} \, dx = -2e^{-x} (x - 1) + 2 \int e^{-x} \, dx = -2xe^{-x} + C.$$

بنابراین

$$I = -e^{-x} (x^2 - 2x + 5) - 2xe^{-x} + C = -e^{-x} (x^2 + 5) + C.$$

تذکره. نتیجه‌ای که از انتگرالگیری، انتگرالهای به صورت $\int P(x) e^{ax} \, dx$ حاصل می‌شود این است که جواب انتگرال، تابعی به صورت $Q(x) e^{ax}$ است که در آن

$Q(x)$ یک چند جمله‌ای است که درجه آن با درجه چند جمله‌ای $P(x)$ یکی است. در محاسبه انتگرالها با این روش، از روش ضرایب مجهول استفاده می‌شود. بدین معنی که $Q(x)$ را یک چند جمله‌ای هم درجه با چند جمله‌ای $P(x)$ با ضرایب مجهول فرض کرده و سپس از دو طرف مشتق می‌گیریم و نتیجه را با هم معادل قرار می‌دهیم به دستگاه معادلاتی می‌رسیم که از حل آن ضرایب مورد نظر را تعیین می‌کنیم. برای روشن شدن مطلب، مثال زیر را حل می‌کنیم.

۳-۴-۶ روش ضرایب مجهول را بکار برده و انتگرال زیر را حساب کنید:

$$I = \int (3x^3 - 17)e^{2x} dx.$$

حل. فرض می‌کنیم

$$\int (3x^3 - 17)e^{2x} dx = (Ax^3 + Bx^2 + Dx + E)e^{2x} + C$$

از دو طرف مشتق می‌گیریم:

$$(3x^3 - 17)e^{2x} = 2(Ax^3 + Bx^2 + Dx + E)e^{2x} + e^{2x}(3Ax^2 + 2Bx + D)$$

از دو طرف e^{2x} را حذف می‌کنیم، داریم:

$$3x^3 - 17 \equiv 2Ax^3 + (2B + 3A)x^2 + (2D + 2B)x + (2E + D)$$

ضرایب x های هم درجه را در دو طرف با هم مساوی قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} 3 &= 2A; & 0 &= 2B + 3A; \\ 0 &= 2D + 2B; & -17 &= 2E + D. \end{aligned}$$

از حل دستگاه معادلات حاصل مقادیر زیر نتیجه می‌شوند:

$$A = \frac{3}{2}; \quad B = -\frac{9}{4}; \quad D = \frac{9}{4}; \quad E = -\frac{77}{8}.$$

پس

$$\int (3x^3 - 17)e^{2x} dx = \left(\frac{3}{2}x^3 - \frac{9}{4}x^2 + \frac{9}{4}x - \frac{77}{8} \right) e^{2x} + C.$$

۳-۴-۷. انتگرال زیر را حساب نمائید:

$$I = \int (x^3 + 1) \cos x dx.$$

حل. فرض می‌کنیم

$$u = x^3 + 1; \quad dv = \cos x dx,$$

از آنجا

$$du = 3x^2 dx; \quad v = \sin x.$$

$$I = (x^3 + 1) \sin x - 3 \int x^2 \sin x dx = (x^3 + 1) \sin x - 3I_1,$$

که در آن

$$I_1 = \int x^2 \sin x dx.$$

از روش جزء بجزء استفاده می کنیم

$$I_1 = -x^2 \cos x + 2I_2,$$

که در آن

$$I_2 = \int x \cos x dx.$$

بار دیگر از روش جزء بجزء برای انتگرال حاصل استفاده می کنیم:

$$I_2 = x \sin x + \cos x + C.$$

بالاخره داریم:

$$\begin{aligned} I &= \int (x^3 + 1) \cos x dx = (x^3 + 1) \sin x + 3x^2 \cos x - 6x \sin x - 6 \cos x + C = \\ &= (x^3 - 6x + 1) \sin x + (3x^2 - 6) \cos x + C. \end{aligned}$$

تذکره. روش ضرایب مجهول برای محاسبه انتگرالهای

$$\int P(x) \sin ax dx, \quad \int P(x) \cos ax dx.$$

بکار می رود.

۸-۳-۴.

$$I = \int (x^2 + 3x + 5) \cos 2x dx.$$

حل

$$\begin{aligned} \int (x^2 + 3x + 5) \cos 2x dx &= \\ &= (A_0 x^2 + A_1 x + A_2) \cos 2x + (B_0 x^2 + B_1 x + B_2) \sin 2x + C. \end{aligned}$$

از طرفین مشتق می گیریم

$$\begin{aligned} (x^2 + 3x + 5) \cos 2x &= -2(A_0 x^2 + A_1 x + A_2) \sin 2x + \\ &+ (2A_0 x + A_1) \cos 2x + 2(B_0 x^2 + B_1 x + B_2) \cos 2x + (2B_0 x + B_1) \sin 2x = \\ &= [2B_0 x^2 + (2B_1 + 2A_0)x + (A_1 + 2B_2)] \cos 2x + \\ &+ [-2A_0 x^2 + (2B_0 - 2A_1)x + (B_1 - 2A_2)] \sin 2x. \end{aligned}$$

ضرایب x های هم درجه در دو طرف را که در ضرایب $\sin 2x$ و $\cos 2x$ موجودند، معادل با

هم قرار می دهیم دستگاه معادلات

$$\begin{array}{lll} 2B_0 = 1; & 2(B_1 + A_0) = 3; & A_1 + 2B_2 = 5; \\ -2A_0 = 0; & 2(B_0 - A_1) = 0; & B_1 - 2A_2 = 0. \end{array}$$

حاصل می شود. از حل دستگاه معادلات حاصل مقادیر زیر نتیجه می شوند:

$$A_0 = 0; B_0 = \frac{1}{2}; A_1 = \frac{1}{2}; B_1 = \frac{3}{2}; A_2 = \frac{3}{4}; B_2 = \frac{9}{4}.$$

پس

$$\int (x^3 + 3x + 5) \cos 2x dx = \left(\frac{x}{2} + \frac{3}{4}\right) \cos 2x + \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}\right) \sin 2x + C.$$

$$I = \int (3x^2 + 6x + 5) \arctan x dx. \quad \text{۴-۳-۹}$$

حل. فرض می کنیم

$$u = \arctan x; \quad dv = (3x^2 + 6x + 5) dx,$$

از آنجا

$$du = \frac{dx}{1+x^2}; \quad v = x^3 + 3x^2 + 5x.$$

پس

$$I = (x^3 + 3x^2 + 5x) \arctan x - \int \frac{x^3 + 3x^2 + 5x}{1+x^2} dx.$$

برای حل انتگرال اخیر، صورت را بر مخرج تقسیم می کنیم

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{x^3 + 3x^2 + 5x}{1+x^2} dx = \int (x+3) dx + \int \frac{4x-3}{x^2+1} dx = \\ &= \frac{x^2}{2} + 3x + 2 \int \frac{2x dx}{x^2+1} - 3 \int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{x^2}{2} + 3x + 2 \ln(x^2+1) - 3 \arctan x + C. \end{aligned}$$

مقدار I_1 را در جای خود قرار می دهیم

$$I = (x^3 + 3x^2 + 5x + 3) \arctan x - x^2/2 - 3x - 2 \ln(x^2 + 1) + C.$$

انتگرال زیر را حساب کنید: ۴-۳-۱۰

$$I = \int e^{5x} \cos 4x dx.$$

حل. فرض می کنیم

$$e^{5x} = u; \quad \cos 4x dx = dv,$$

از آنجا

$$5e^{5x} dx = du; \quad v = \frac{1}{4} \sin 4x.$$

بنابراین

$$I = \frac{1}{4} e^{5x} \sin 4x - \frac{5}{4} \int e^{5x} \sin 4x dx.$$

دوباره روش جزء بجزء را بکار می‌بریم:

$$I_1 = \int e^{5x} \sin 4x dx = -\frac{1}{4} e^{5x} \cos 4x + \frac{5}{4} \int e^{5x} \cos 4x dx.$$

بنابراین

$$I = \frac{1}{4} e^{5x} \sin 4x - \frac{5}{4} \left(-\frac{1}{4} e^{5x} \cos 4x + \frac{5}{4} \int e^{5x} \cos 4x dx \right)$$

بالاخره

$$I = \frac{4}{41} e^{5x} \left(\sin 4x + \frac{5}{4} \cos 4x \right) + C.$$

. ۴-۳-۱۱

$$I = \int \cos(\ln x) dx.$$

حل. فرض می‌کنیم

$$u = \cos(\ln x); \quad dv = dx,$$

از آنجا

$$du = -\sin(\ln x) \frac{dx}{x}; \quad v = x.$$

بنابراین

$$I = \int \cos(\ln x) dx = x \cos(\ln x) + \int \sin(\ln x) dx.$$

از روش جزء بجزء استفاده می‌کنیم

$$u = \sin(\ln x); \quad dv = dx,$$

از آنجا

$$du = \cos(\ln x) \frac{dx}{x}; \quad v = x.$$

پس

$$I_1 = \int \sin(\ln x) dx = x \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x) dx.$$

بنابراین

$$I = \int \cos(\ln x) dx = x \cos(\ln x) + x \sin(\ln x) - I.$$

بالاخره

$$I = \frac{x}{2} [\cos(\ln x) + \sin(\ln x)] + C.$$

$$I = \int x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) dx.$$

. ۴-۳-۱۲

حل. انتگران را به صورت زیر تغییر می دهیم:

$$\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \ln \frac{x+1}{x} = \ln(x+1) - \ln x.$$

پس

$$I = \int x \ln(x+1) dx - \int x \ln x dx = I_1 - I_2.$$

انتگرالهای I_1 و I_2 را به روش جزء بجزء حساب می کنیم

$$u = \ln(x+1); \quad dv = x dx,$$

از آنجا

$$du = \frac{dx}{1+x}; \quad v = \frac{1}{2}(x^2 - 1).$$

پس

$$\begin{aligned} I_1 &= \int x \ln(x+1) dx = \frac{1}{2}(x^2 - 1) \ln(x+1) - \frac{1}{2} \int \frac{(x^2 - 1) dx}{1+x} = \\ &= \frac{x^2 - 1}{2} \ln(x+1) - \frac{1}{2} \int (x - 1) dx = \frac{x^2 - 1}{2} \ln(x+1) - \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{2} x + C. \end{aligned}$$

بطور مشابه انتگرال بعدی را حل می کنیم:

$$I_2 = \int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C.$$

بالاخره داریم:

$$I = \int x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) dx = \frac{1}{2}(x^2 - 1) \ln(x+1) - \frac{x^2}{2} \ln x + \frac{x}{2} + C.$$

$$I = \int \frac{\sqrt{x^2+1} [\ln(x^2+1) - 2 \ln x]}{x^4} dx. \quad . \quad ۴-۳-۱۳$$

حل. نخست تغییر متغیر زیر را در نظر می گیریم:

$$1 + \frac{1}{x^2} = t.$$

بنابراین

$$dt = -\frac{2dx}{x^3} \quad \text{یا} \quad \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2} dt.$$

پس

$$I = \int \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \ln \frac{x^2+1}{x^2} \cdot \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2} \int \sqrt{t} \ln t dt.$$

انتگرال حاصل با روش جزء بجزء به راحتی حساب می شود. فرض می کنیم

$$u = \ln t; \quad dv = \sqrt{t} dt.$$

پس

$$du = \frac{dt}{t}; \quad v = \frac{2}{3} t \sqrt{t}.$$

از آنجا

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \int \sqrt{t} \ln t \, dt &= -\frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} t \sqrt{t} \ln t - \frac{2}{3} \int \sqrt{t} \, dt \right] = \\ &= -\frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} t \sqrt{t} \ln t - \frac{4}{9} t \sqrt{t} \right] + C. \end{aligned}$$

جواب را نسبت به x می نویسیم

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)^{3/2} \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) - \frac{4}{9} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)^{3/2} \right] + C = \\ &= \frac{(x^2+1) \sqrt{x^2+1}}{9x^3} \left[2 - 3 \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) \right] + C. \end{aligned}$$

$$I = \int \sin x \ln \tan x \, dx. \quad \text{۴-۳-۱۴}$$

$$-\cos x \ln \tan x + \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} \right) \right| + C. \quad \text{جواب:}$$

$$I = \int \ln(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}) \, dx. \quad \text{۴-۳-۱۵}$$

حل. فرض می کنیم

$$u = \ln(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}); \quad dv = dx,$$

از آنجا

$$\begin{aligned} du &= \frac{1}{\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}} \left(-\frac{1}{2\sqrt{1-x}} + \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \right) dx = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{1-x^2} - 1}{x \sqrt{1-x^2}} dx; \\ v &= x. \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} I &= x \ln(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}) - \frac{1}{2} \int x \frac{\sqrt{1-x^2} - 1}{x \sqrt{1-x^2}} dx = \\ &= x \ln(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}) - \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \\ &= x \ln(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}) - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \arcsin x + C. \end{aligned}$$

تذکر: در محاسبه بعضی از انتگرالها که مجبور به استفاده از روش جزء بجزء بدفعات متعدد هستیم، دستوری تحت عنوان «تعمیم دستور انتگرالگیری به روش جزء بجزء» یا «دستور انتگرالگیری مکرر به روش جزء بجزء» به صورت زیر

بدست می آید:

$$\int u(x) v(x) dx = u(x) v_1(x) - u'(x) v_2(x) + u''(x) v_3(x) - \dots \\ \dots + (-1)^{n-1} u^{(n-1)}(x) v_n(x) - (-1)^{n-1} \int u^{(n)}(x) v_n(x) dx,$$

که در آن

$$v_1(x) = \int v(x) dx; \quad v_2(x) = \int v_1(x) dx; \quad \dots; \quad v_n(x) = \int v_{n-1}(x) dx.$$

البته، در اینجا فرض بر این است که تمام مشتقات و انتگرالهایی که ظاهر می شوند، موجودند.

استفاده از فرمول تعمیم انتگرالگیری به روش جزء بجزء، وقتی مناسب است که انتگرال به صورت $\int P_n(x) \varphi(x) dx$ باشد که در آن $P_n(x)$ یک چند جمله ای از درجه n است و عامل $\varphi(x)$ طوری است که بتوان از آن $n+1$ بار انتگرال متوالی گرفت. مثلاً:

$$\int P_n(x) e^{kx} dx = P_n(x) \frac{e^{kx}}{k} - P'_n(x) \frac{e^{kx}}{k^2} + \dots + \\ + (-1)^n P_n^{(n)}(x) \frac{e^{kx}}{k^{n+1}} + C = \\ = e^{kx} \left[\frac{P_n(x)}{k} - \frac{1}{k^2} P'_n(x) + \dots + \frac{(-1)^n}{k^{n+1}} P_n^{(n)}(x) \right] + C.$$

۱۶-۳-۴. با استفاده از دستور «تعمیم انتگرالگیری به روش جزء بجزء»

انتگرالهای زیر را حساب نمایید:

$$(a) \int (x^3 - 2x^2 + 3x - 1) \cos 2x dx,$$

$$(b) \int (2x^3 + 3x^2 - 8x + 1) \sqrt{2x+6} dx.$$

حل: (a)

$$\int (x^3 - 2x^2 + 3x - 1) \cos 2x dx = (x^3 - 2x^2 + 3x - 1) \frac{\sin 2x}{2} - \\ - (3x^2 - 4x + 3) \left(-\frac{\cos 2x}{4} \right) + (6x - 4) \left(-\frac{\sin 2x}{8} \right) - 6 \frac{\cos 2x}{16} + C = \\ = \frac{\sin 2x}{4} (2x^3 - 4x^2 + 3x) + \frac{\cos 2x}{8} (6x^2 - 8x + 3) + C;$$

حل: (b)

$$\int (2x^3 + 3x^2 - 8x + 1) \sqrt{2x+6} dx = \\ = (2x^3 + 3x^2 - 8x + 1) \frac{(2x+6)^{3/2}}{3} - (6x^2 + 6x - 8) \frac{(2x+6)^{5/2}}{3 \cdot 5} + \\ + (12x + 6) \frac{(2x+6)^{7/2}}{3 \cdot 5 \cdot 7} - 12 \frac{(2x+6)^{9/2}}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} + C = \\ = \frac{\sqrt{2x+6}}{5 \cdot 7 \cdot 9} (2x + 6) (70x^3 - 45x^2 - 396x + 897) + C.$$

انتگرالهای زیر را حساب نمایید

$$x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C. \quad \text{جواب} \quad \int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx. \quad \text{۴-۳-۱۷}$$

$$\frac{3}{4} x \sqrt[3]{x} \left[(\ln x)^2 - \frac{3}{2} \ln x + \frac{9}{8} \right] + C. \quad \text{جواب} \quad \int \sqrt[3]{x} (\ln x)^2 dx. \quad \text{۴-۳-۱۸}$$

$$2 \sqrt{1+x} \arcsin x + 4 \sqrt{1-x} + C. \quad \text{جواب} \quad \int \frac{\arcsin x dx}{\sqrt{1+x}} \quad \text{۴-۳-۱۹}$$

$$-0.5 \left(\frac{x}{\sin^2 x} + \cot x \right) + C. \quad \text{جواب} \quad \int \frac{x \cos x dx}{\sin^3 x}. \quad \text{۴-۳-۲۰}$$

$$\frac{3^x (\sin x + \cos x \ln 3)}{1 + (\ln 3)^2} + C. \quad \text{جواب} \quad \int 3^x \cos x dx. \quad \text{۴-۳-۲۱}$$

$$(x^3 - 2x^2 + 5) e^{3x} dx. \quad \text{جواب} \quad \int (x^3 - 2x^2 + 5) e^{3x} dx. \quad \text{۴-۳-۲۲}$$

$$\left(\frac{1}{3} x^3 - x^2 + \frac{2}{3} x + \frac{13}{9} \right) e^{3x} + C.$$

$$(1 + x^2)^2 \cos x dx. \quad \text{جواب} \quad \int (1 + x^2)^2 \cos x dx. \quad \text{۴-۳-۲۳}$$

$$(x^4 - 10x^2 + 21) \sin x + x(4x^2 - 20) \cos x + C.$$

$$(x^2 + 2x - 1) \sin 3x dx. \quad \text{جواب} \quad \int (x^2 + 2x - 1) \sin 3x dx. \quad \text{۴-۳-۲۴}$$

$$\frac{9x^2 + 18x - 11}{27} \cos 3x + \frac{2x + 2}{9} \sin 3x + C.$$

$$(x^2 - 2x + 3) \ln x dx. \quad \text{جواب} \quad \int (x^2 - 2x + 3) \ln x dx. \quad \text{۴-۳-۲۵}$$

$$\left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x \right) \ln x - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2} - 3x + C.$$

$$x^3 \arctan x dx. \quad \text{جواب} \quad \int x^3 \arctan x dx. \quad \text{۴-۳-۲۶}$$

$$\frac{x^4 - 1}{4} \arctan x - \frac{x^3}{12} + \frac{x}{4} + C.$$

$$x^2 \arccos x dx. \quad \text{جواب} \quad \int x^2 \arccos x dx. \quad \text{۴-۳-۲۷}$$

$$\frac{x^3}{3} \arccos x - \frac{2+x^2}{9} \sqrt{1-x^2} + C.$$

$$\text{۴-۳-۲۸} \quad \text{با استفاده از دستور «انتگرالگیری مکرر به روش جزء بجزء»}$$

انتگرالهای زیر را حساب کنید:

$$(a) \int (3x^2 + x - 2) \sin^2(3x + 1) dx; \quad (b) \int \frac{x^2 - 7x + 1}{\sqrt[3]{2x+1}} dx.$$

جواب:

$$(a) -\frac{18x^2 + 6x - 13}{72} \sin(6x + 2) - \frac{6x + 1}{72} \cos(6x + 2) + \frac{1}{2} x^3 +$$

$$+ \frac{1}{4} x^2 - x + C; \quad (b) \frac{3}{4} (x^2 - 7x + 1) (2x + 1)^{\frac{2}{3}} - \frac{9}{40} (2x - 7) (2x + 1)^{\frac{5}{3}} +$$

$$+ \frac{27}{320} (2x + 1)^{\frac{8}{3}} + C.$$

۴-۳-۲۹. با استفاده از روش جزء بجزء انتگرالهای زیر را حساب کنید:

- | | | |
|--|------|--|
| 1. $\int \ln x dx.$ | جواب | $x \ln x - x.$ |
| 2. $\int \arctan x dx.$ | // | $x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2).$ |
| 3. $\int \arcsin x dx.$ | // | $x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}.$ |
| 4. $\int x \sin x dx.$ | // | $\sin x - x \cos x.$ |
| 5. $\int x \cos 3x dx.$ | // | $\frac{x \sin 3x}{3} + \frac{\cos 3x}{9}.$ |
| 6. $\int \frac{x}{e^x} dx.$ | // | $-\frac{x+1}{e^x}.$ |
| 7. $\int x \cdot 2^{-x} dx.$ | // | $-\frac{x \ln 2 + 1}{2^x \ln^2 2}.$ |
| 8. $\int x^2 e^{2x} dx.$ | // | $\frac{e^{2x}}{27} (9x^2 - 6x + 2).$ |
| 9. $\int (x^2 - 2x + 5) e^{-x} dx.$ | // | $-e^{-x} (x^2 + 5).$ |
| 10. $\int x^2 e^{-\frac{x}{3}} dx.$ | // | $-3e^{-\frac{x}{3}} (x^3 + 9x^2 + 54x + 162).$ |
| 11. $\int x \sin x \cos x dx.$ | // | $-\frac{x \cos 2x}{4} + \frac{\sin 2x}{8}.$ |
| 12. $\int (x^2 + 5x + 6) \cos 2x dx.$ | // | $\frac{2x^2 + 10x + 11}{4} \sin 2x + \frac{2x + 5}{4} \cos 2x.$ |
| 13. $\int x^2 \ln x dx.$ | // | $\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9}.$ |
| 14. $\int \ln^2 x dx.$ | // | $x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x.$ |
| 15. $\int \frac{\ln x}{x^3} dx.$ | // | $-\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2}.$ |
| 16. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx.$ | // | $2\sqrt{x} \ln x - 4\sqrt{x}.$ |
| 17. $\int x \arctan x dx.$ | // | $\frac{x^2 + 1}{2} \arctan x - \frac{x}{2}.$ |
| 18. $\int x \arcsin x dx.$ | // | $\frac{x^2}{2} \arcsin x - \frac{1}{4} \times \arcsin x + \frac{x}{4} \sqrt{1-x^2}.$ |
| 19. $\int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx.$ | // | $x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}.$ |
| 20. $\int \frac{x dx}{\sin^2 x}.$ | // | $-x \cot x + \ln \sin x .$ |
| 21. $\int \frac{x \cos x}{\sin^2 x} dx.$ | // | $-\frac{x}{\sin x} + \ln \left \tan \frac{x}{2} \right .$ |
| 22. $\int e^x \sin x dx.$ | // | $\frac{e^x (\sin x - \cos x)}{2}.$ |
| 23. $\int 3^x \cos x dx.$ | // | $\frac{3^x (\sin x + \cos x \ln 3)}{1 + (\ln 3)^2}.$ |
| 24. $\int e^{ax} \sin bx dx.$ | // | $\frac{e^{ax} (a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2}.$ |
| 25. $\int \sin(\ln x) dx.$ | // | $\frac{x}{2} [\sin(\ln x) - \cos(\ln x)].$ |

روش های مناسب را بکار برده انتگرالهای زیر را حساب کنید

- | | | |
|--|------|---|
| 26. $\int x^2 e^{-x^2} dx.$ | جواب | $-\frac{e^{-x^2}}{2} (x^2 + 1).$ |
| 27. $\int e^{\sqrt{x}} dx.$ | // | $2e^{\sqrt{x}} (\sqrt{x} - 1).$ |
| 28. $\int (x^2 - 2x + 3) \ln x dx.$ | // | $\left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x\right) \ln x - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2} - 3x.$ |
| 29. $\int x \ln \frac{1-x}{1+x} dx.$ | // | $\frac{x^2-1}{2} \ln \frac{1-x}{1+x} - x.$ |
| 30. $\int \frac{\ln^2 x}{x^2} dx.$ | // | $-\frac{\ln^2 x}{x} - \frac{2 \ln x}{x} - \frac{2}{x}.$ |
| 31. $\int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx.$ | // | $[\ln(\ln x) - 1] \cdot \ln x.$ |
| 32. $\int x^2 \arctan 3x dx.$ | // | $\frac{x^3}{3} \arctan 3x - \frac{x^2}{18} + \frac{1}{162} \ln(9x^2 + 1).$ |
| 33. $\int x (\arctan x)^2 dx.$ | // | $\frac{1+x^2}{2} \times (\arctan x)^2 - x \arctan x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2).$ |
| 34. $\int (\arcsin x)^2 dx.$ | // | $x (\arcsin x)^2 + 2 \sqrt{1-x^2} \times \arcsin x - 2x.$ |
| 35. $\int \frac{\arcsin x}{x^2} dx.$ | // | $-\frac{\arcsin x}{x} + \ln \left \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}} \right .$ |
| 36. $\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx.$ | // | $-2 \sqrt{1-x} \times \arcsin \sqrt{x} + 2 \sqrt{x}.$ |
| 37. $\int x \tan^2 2x dx.$ | // | $\frac{x \tan 2x}{2} + \frac{\ln \cos 2x }{4} - \frac{x^2}{2}.$ |
| 38. $\int \frac{\sin^2 x}{e^x} dx.$ | // | $\frac{e^{-x}}{2} \times \left(\frac{\cos 2x - 2 \sin 2x}{5} - 1 \right).$ |
| 39. $\int \cos^2(\ln x) dx.$ | // | $\frac{x}{2} + \frac{x \cos(2 \ln x) + 2x \sin(2 \ln x)}{10}.$ |
| 40. $\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx.$ | // | $-\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \arctan x.$ |

حل - فرض کنید $u = x$ و $dv = \frac{x dx}{(x^2+1)^2}$. داریم $du = dx$ و $v = -\frac{1}{2(x^2+1)}$

از آنجا

$$\int \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^2} = -\frac{x}{2(x^2+1)} + \int \frac{dx}{2(x^2+1)} = -\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \arctan x + C.$$

41. $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}.$ جواب $\frac{1}{2a^2} \left(\frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + \frac{x}{x^2+a^2} \right)$

42. $\int \sqrt{a^2-x^2} dx.$ // $\frac{x}{2} \times \sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a}$

حل - فرض می کنیم $u = \sqrt{a^2-x^2}$ و $dv = dx$ پس $du = -\frac{x dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ و $v = x$

بنابراین

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2-x^2} dx &= x \sqrt{a^2-x^2} - \int \frac{-x^2 dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = x \sqrt{a^2-x^2} - \int \frac{(a^2-x^2)-a^2}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \\ &= x \sqrt{a^2-x^2} - \int \sqrt{a^2-x^2} dx + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \end{aligned}$$

و در نتیجه

$$2 \int \sqrt{a^2-x^2} dx = x \sqrt{a^2-x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a}$$