

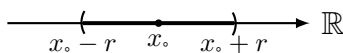
فصل اول

حد و پیوستگی

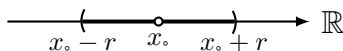
یکی از مفاهیم اصلی در بحث حسابان مفهوم مشتق است. از آنجا که برای بیان دقیق این مفهوم نیازمند مفهومی مقدماتی‌تر حد هستیم، در این فصل به بررسی حد یک تابع و یک حالت خاص از آن، یعنی پیوستگی، می‌پردازیم. برای این منظور ابتدا همسایگی یک نقطه را تعریف می‌کنیم.

فرض کنیم $x_0 \in \mathbb{R}$. در این صورت همسایگی این نقطه به شعاع $r > 0$ ، که آن را با نماد $N_r(x_0)$ نمایش می‌دهیم، عبارت است از زیرمجموعه‌ای از مجموعه اعداد حقیقی که به صورت زیر تعریف می‌شود.

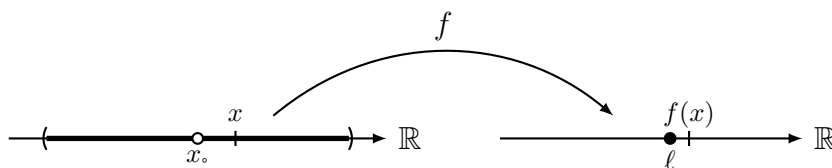
$$N_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}; x_0 - r < x < x_0 + r\} = \{x \in \mathbb{R}; |x - x_0| < r\}$$



که همان فاصله باز $(x_0 - r, x_0 + r)$ از اعداد حقیقی است. مجموعه $N_r(x_0) - \{x_0\} = \{x \in \mathbb{R}; 0 < |x - x_0| < r\}$ را همسایگی محذوف این نقطه می‌نامیم.



ابتدا بیانی شهودی از مفهوم حد تابع در یک نقطه را بیان می‌کنیم. فرض کنیم f تابعی حقیقی تعریف شده بر یک همسایگی محذوف نقطه $x_0 \in \mathbb{R}$ باشد (یعنی دامنه تعریف تابع f حاوی یک همسایگی محذوف x_0 ، چون $N_r(x_0) - \{x_0\}$ باشد).

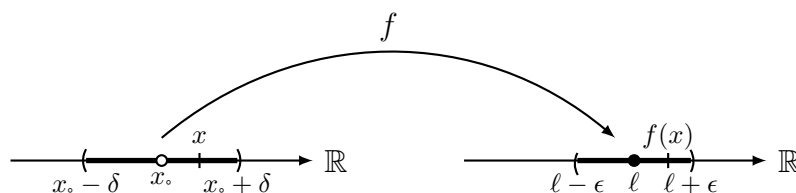


در این صورت f را در نقطه x_0 دارای حد l نامیم و این خاصیت را با نماد $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ نشان می‌دهیم هرگاه بتوانیم مقادیر تابع، یعنی $f(x)$ را به اندازه دلخواه نزدیک l کنیم به شرط آن که x به اندازه کافی به x_0 نزدیک شده باشد. درک فوق از مفهوم حد در اواخر قرن ۱۹ میلادی توسط ریاضیدانی به نام وایراشتراس به صورت زیر به زبان ریاضی بیان گردید و از آن به بعد توسط سایر ریاضیدانان به عنوان تعریف ریاضی حد پذیرفته شد.

تعریف

فرض کنیم $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ در یک همسایگی محذوف نقطه x_0 تعریف شده باشد. در این صورت $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ هرگاه برای هر همسایگی از نقطه ℓ ، چون $N_\epsilon(\ell)$ ، یک همسایگی از نقطه x_0 ، چون $N_\delta(x_0)$ ، وجود داشته باشد به گونه‌ای که با انتخاب x از همسایگی محذوف $N_\delta(x_0) - \{x_0\}$ و در دامنه تعریف f ، مقادیر متناظر تابع، یعنی $f(x)$ ، در همسایگی $N_\epsilon(\ell)$ قرار بگیرند. با استفاده از نمادهای ریاضی، تعریف فوق به صورت خلاصه زیر بیان می‌شود. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ هرگاه

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D \quad (0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon)$$



باید توجه داشت که نقش اصلی تعریف ریاضی فوق اثبات قضایای ریاضی مربوط به حد است ولی ما در اینجا، برای آشنایی بیشتر با این تعریف، چند مثال ساده را با استفاده از آن بررسی می‌کنیم.

مثال. صحت هر یک از حدود زیر را با استفاده از تعریف ریاضی حد بررسی کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 2} 3x - 7 = -1 \quad (\text{الف})$$

باید نشان دهیم برای هر $\epsilon > 0$ (در نقش شعاع همسایگی نقطه -1) عدد $\delta > 0$ (در نقش شعاع همسایگی $a = 2$) وجود دارد به گونه‌ای که برای هر $x \in \mathbb{R}$

$$0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow |(3x - 7) - (-1)| < \epsilon$$

با فرض در اختیار داشتن $\epsilon > 0$ ، با شروع از نامساوی نهایی، یعنی $|(3x - 7) - (-1)| < \epsilon$ ، خواهیم داشت

$$|(3x - 7) - (-1)| = |3x - 6| = 3|x - 2| < \epsilon \Leftrightarrow |x - 2| < \frac{\epsilon}{3}$$

بنابر این کافی است $\delta > 0$ را با شرط $\delta \leq \frac{\epsilon}{3}$ انتخاب کنیم. در این صورت اگر $x \in \mathbb{R}$ با شرط $0 < |x - 2| < \delta$ انتخاب شود آنگاه $|(3x - 7) - (-1)| < \epsilon$.

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{x^2 + 1} = -1$$

نشان می‌دهیم

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R} \quad (0 < |x - (-1)| < \delta \Rightarrow \left| \frac{x}{x^2 + 1} - (-1) \right| < \epsilon)$$

برای $\epsilon > 0$ ، با توجه به اینکه

$$\left| \frac{x}{x^2 + 1} + 1 \right| = \left| \frac{x + x^2 + 1}{x^2 + 1} \right| = \frac{|x + 1|^2}{1 + x^2} \leq |x + 1|^2$$

برای داشتن $\left| \frac{x}{x^2 + 1} + 1 \right| < \epsilon$ کافی است $\delta > 0$ را به گونه‌ای انتخاب کنیم که $|x + 1|^2 < \epsilon$. برای این منظور کافی است $\delta \leq \sqrt{\epsilon}$ انتخاب شود.

$$\text{ج) } \lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0$$

نشان می‌دهیم

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R} \quad (0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |\sin x - \sin x_0| < \epsilon)$$

بعدا مشاهده می‌کنیم برای هر زاویه θ (بر حسب رادیان) $|\sin \theta| \leq |\theta|$. اکنون برای $\epsilon > 0$ ، با توجه به اینکه

$$\begin{aligned} |\sin x - \sin x_0| &= \left| 2 \sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right) \cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right) \right| \\ &\leq 2 \left| \sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right) \right| \leq 2 \left| \frac{x - x_0}{2} \right| = |x - x_0| \end{aligned}$$

کافی است $\delta > 0$ با شرط $\delta \leq \epsilon$ انتخاب شود. در این صورت به راحتی مشاهده می‌شود اگر $|x - x_0| < \delta$ آنگاه $|\sin x - \sin x_0| < \epsilon$.

$$\text{د) } \lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0$$

مشابه قسمت قبل بوده، به عنوان تمرین به عهده خواننده گذاشته می‌شود.

برخی از خواص اولیه حد در قضیه زیر بیان شده‌اند.

قضیه

فرض کنیم تابع f در یک همسایگی محذوف x_0 تعریف شده باشد. در این صورت

(الف) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ اگر و تنها اگر $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) - \ell| = 0$.

(ب) اگر $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ آنگاه $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |\ell|$.

(ج) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ اگر و تنها اگر $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$.

(د) اگر $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ و $\ell \neq 0$ آنگاه همسایگی محذوفی حول x_0 وجود دارد که در هر نقطه از آن مقدار f با ℓ هم‌علامت باشد.

(ه) اگر مقدار f در یک همسایگی محذوف f نامنفی (نامثبت) باشد و $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ آنگاه $\ell \geq 0$ ($\ell \leq 0$).

اثبات. در اینجا جهت نشان دادن نحوه استفاده از اثبات خاصیت‌ها، فقط قسمت (د) و (ه) را اثبات می‌کنیم.

(د) فرض کنیم $\ell > 0$. در این صورت با انتخاب $\epsilon = \frac{\ell}{4}$ (بدیهی است که مقادیر دیگری نیز می‌توانستیم برای ϵ انتخاب کنیم)، با استفاده از فرض وجود حد برابر ℓ ، عدد $\delta > 0$ وجود دارد که برای هر x در همسایگی محذوف $N_\delta(x_0) - \{x_0\}$

$$|f(x) - \ell| < \epsilon = \frac{\ell}{4}$$

و از آنجا

$$-\frac{\ell}{4} < f(x) - \ell < \frac{\ell}{4}$$

و بنابر این در این همسایگی محذوف، $-\frac{\ell}{4} < f(x) - \ell < \frac{\ell}{4}$ به عبارت دیگر، مقادیر f در این همسایگی محذوف همه مثبت خواهند بود. در حالتی که $\ell < 0$ ، با انتخاب $\epsilon = -\frac{\ell}{4}$ نتیجه به طور مشابه به دست می‌آید.

(ه) فرض کنیم همسایگی $N_r(x_0)$ وجود داشته باشد که برای هر $x \in N_r(x_0) - \{x_0\}$ ، $f(x) \geq 0$. اگر $\ell < 0$ آنگاه بنابر قسمت قبل، همسایگی محذوفی از x_0 وجود دارد که همه جا بر آن f با ℓ هم‌علامت و در نتیجه منفی باشد. یعنی عدد $r' > 0$ وجود دارد که برای هر $x \in N_{r'}(x_0) - \{x_0\}$ ، $f(x) < 0$. اکنون برای $x \in N_r(x_0) \cap N_{r'}(x_0)$ ، x غیر x_0 ، از یک طرف طبق فرض $f(x) \geq 0$ و از طرف دیگر، طبق نتیجه فوق، $f(x) < 0$. تناقض حاصل نشان می‌دهد $\ell \geq 0$. ■

با بررسی توابع مختلف، مشاهده می‌شود بسیاری از توابع بر اساس توابعی با ساختار ساده و با استفاده از اعمال جبری بر روی توابع (مانند جمع، ضرب و تقسیم) به دست می‌آیند. بر همین اساس، قضیه بعدی بررسی رفتار حدی توابع را به رفتار حدی اجزای تشکیل‌دهنده آن توابع منوط می‌کند.

قضیه.

فرض کنیم دو تابع f و g در یک همسایگی محذوف نقطه x_0 تعریف شده باشند و $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ و $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m$. در این صورت هر یک از توابع λf ، $f \pm g$ و $f g$ نیز در این نقطه حد داشته، داریم

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = \ell \pm m, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (\lambda f(x)) = \lambda \ell, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = \ell m$$

به علاوه، اگر $m \neq 0$ آنگاه تابع $\frac{f}{g}$ در یک همسایگی محذوف x_0 تعریف شده در این نقطه حد برابر $\frac{\ell}{m}$ خواهد داشت.

اثبات قضیه با استفاده از تعریف حد به سادگی امکان پذیر است ولی جهت جلوگیری از طولانی شدن بحث از ارائه آن در اینجا صرف نظر می شود. قضیه بعدی که کاربردهای زیادی خواهد داشت تحت نام قضیه فشردگی نامیده می شود.

قضیه.

فرض کنیم سه تابع f ، g و h در یک همسایگی محذوف نقطه x_0 تعریف شده، برای هر x در این همسایگی $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. اگر $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \ell$ آنگاه تابع g نیز در این نقطه حد داشته، داریم

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell$$

اثبات. برای $\epsilon > 0$ باید نشان دهید عدد $\delta > 0$ وجود دارد به گونه ای که برای هر x در همسایگی محذوف $\{x_0\} - N_\delta(x_0)$ ، $|g(x) - \ell| < \epsilon$. بنابه فرض عدد $r > 0$ وجود دارد که برای هر x در همسایگی محذوف $\{x_0\} - N_r(x_0)$ ، $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. از طرف دیگر طبق فرض وجود حد برابر ℓ برای توابع f و h ،

$$\begin{aligned} \exists \delta_1 > 0 \forall x \quad & \left(0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon \quad \text{یا} \quad \ell - \epsilon < f(x) < \ell + \epsilon \right) \\ \exists \delta_2 > 0 \forall x \quad & \left(0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |h(x) - \ell| < \epsilon \quad \text{یا} \quad \ell - \epsilon < h(x) < \ell + \epsilon \right) \end{aligned}$$

اکنون اگر عدد $\delta > 0$ را با شرط $\delta \leq \min\{r, \delta_1, \delta_2\}$ اختیار کنیم آنگاه به سادگی مشاهده می شود برای x با شرط $0 < |x - x_0| < \delta$ نامساوی $|g(x) - \ell| < \epsilon$ برقرار خواهد بود. ■

مثال. فرض کنید $x_0 > 0$. نشان دهید $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$. در حالت کلی، اگر $n \in \mathbb{N}$ عددی طبیعی بزرگتر از ۱ باشد نشان دهید $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0}$.

با توجه به اینکه

$$0 \leq |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = \left| \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \right| = \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \leq \frac{1}{\sqrt{x_0}} |x - x_0|$$

و صفر بودن حد عبارت سمت راست، وقتی $x \rightarrow x_0$ ، با استفاده از قضیه فشردگی خواهیم داشت $\lim_{x \rightarrow x_0} |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = 0$ که از آن نتیجه مطلوب به دست می‌آید.

برای حالت کلی نیز اگر در اتحاد $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + ab^{n-2} + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$ مقدار a را برابر $x^{\frac{1}{n}}$ و b را برابر $x_0^{\frac{1}{n}}$ قرار دهیم آنگاه

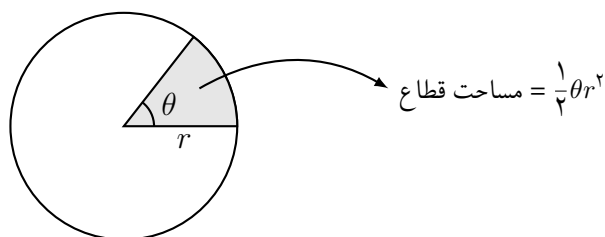
$$(x^{\frac{1}{n}})^n - (x_0^{\frac{1}{n}})^n = (x^{\frac{1}{n}} - x_0^{\frac{1}{n}})(x^{\frac{n-1}{n}} + x^{\frac{n-2}{n}} x_0^{\frac{1}{n}} + \dots + x_0^{\frac{n-1}{n}})$$

و از آنجا

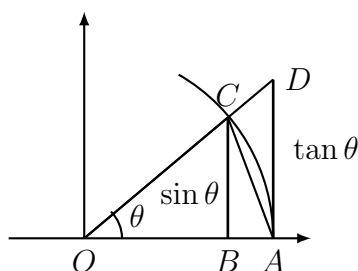
$$0 \leq |\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{x_0}| = \frac{|x - x_0|}{(x^{\frac{n-1}{n}} + x^{\frac{n-2}{n}} x_0^{\frac{1}{n}} + \dots + x_0^{\frac{n-1}{n}})} \leq \frac{1}{x_0^{\frac{n-1}{n}}} |x - x_0|$$

اکنون نتیجه مانند قسمت قبل با استفاده از قضیه فشردگی به دست می‌آید.

تذکر. یادآوری می‌کنیم در یک دایره به شعاع r ، مساحت قطاعی از دایره نظیر زاویه مرکزی θ (که بر حسب رادیان بیان شده باشد) برابر $\frac{1}{2} \theta r^2$ خواهد بود.



اکنون فرض کنیم $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ زاویه مرکزی در دایره مثلثاتی (دایره‌ای به مرکز مبدا مختصات و شعاع برابر ۱) باشد. در این صورت مطابق شکل زیر، طول پاره خط BC برابر $\sin \theta$ و طول پاره خط AD برابر $\tan \theta$ خواهد بود.



همانطور که در این شکل نیز مشاهده می‌شود، مساحت مثلث OAC کمتر از مساحت قطاع OAC از دایره و آن نیز کمتر از مساحت مثلث OAD خواهد بود. با توجه به اینکه طول پاره خط OA برابر شعاع دایره و برابر ۱ است، خواهیم داشت

$$OAC \text{ مساحت مثلث} = \frac{1}{2} \sin \theta < OAC \text{ مساحت قطاع} = \frac{1}{2} \theta < OAD \text{ مساحت مثلث} = \frac{1}{2} \tan \theta$$

به این ترتیب، در این حالت

$$\sin \theta < \theta < \tan \theta$$

در حالتی که $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ، با توجه به اینکه $-\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ، با استفاده از بحث فوق خواهیم داشت

$$-\sin \theta = \sin(-\theta) < -\theta < \tan(-\theta) = -\tan \theta$$

پس برای زاویه θ با شرط $|\theta| < \frac{\pi}{2}$ خواهیم داشت $|\sin \theta| < |\theta| < |\tan \theta|$. با استفاده از این نامساوی‌ها به سادگی دیده می‌شود

$$\forall \theta \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}), \quad \cos \theta < \frac{\sin \theta}{\theta} < 1$$

مثال. نشان می‌دهیم $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

با توجه به تذکر فوق، برای هر x در همسایگی محذوف $\{0\} - (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ، $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$. اکنون با توجه به اینکه $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \cos 0 = 1$ و $\lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$ ، بنابر قضیه فشردگی، $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

تمرین. فرض کنید f و g دو تابع تعریف شده بر یک همسایگی محذوف نقطه $x_0 \in \mathbb{R}$ بوده، تابع g بر این همسایگی محذوف کراندار باشد (یعنی عدد $M > 0$ وجود داشته باشد که برای هر x در این همسایگی محذوف، $|g(x)| \leq M$). اگر

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = 0 \quad \text{نشان دهید} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$$

همانگونه که مفهوم حد را تعریف کردیم، می‌توانیم مفاهیم حدهای چپ و راست یک تابع در یک نقطه را تعریف کنیم.

تعریف.

فرض کنیم f تابعی تعریف شده بر بازه‌ای چون $(x_0, x_0 + r)$ ، (که در آن فرض می‌کنیم $r > 0$) باشد. در این صورت f را در نقطه x_0 دارای حد راست برابر ℓ نامیم و آن را با نماد $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell$ نشان می‌دهیم هرگاه

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in (x_0, x_0 + r) \quad \left(x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon \right)$$

مفهوم حد چپ تابع در یک نقطه به نحو مشابه قابل تعریف است. به سادگی مشاهده می‌شود تابع f در نقطه x حدی برابر l دارد اگر و تنها اگر حدهای چپ و راست تابع در این نقطه موجود بوده، هر دو برابر l باشند. خاصیت‌های بیان شده برای حد، برای حدود یک‌طرفه نیز برقرار هستند.

مثال. هر یک از حدود یک‌طرفه زیر را با ذکر دلیل تعیین کنید.

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 0^-} x \left[\frac{1}{x} \right]$$

برای هر عدد حقیقی a ، می‌دانیم $a - 1 < [a] \leq a$. اکنون اگر در این رابطه مقدار a را برابر $\frac{1}{x}$ قرار دهیم آنگاه

$$\frac{1}{x} - 1 < \left[\frac{1}{x} \right] \leq \frac{1}{x}$$

نهایتاً با ضرب طرفین نامساوی فوق در x و توجه به اینکه منفی بودن x باعث تغییر جهت نامساوی‌ها می‌شود، خواهیم داشت

$$1 - x > x \left[\frac{1}{x} \right] \geq 1$$

با توجه به اینکه $\lim_{x \rightarrow 0^-} (1 - x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 = 1$ ، با استفاده از قضیه فشردگی (برای حدود یک‌طرفه) داریم $\lim_{x \rightarrow 0^-} x \left[\frac{1}{x} \right] = 1$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin 3x}{x}$$

قبلاً مشاهده کردیم $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ به این ترتیب با جایگزین کردن $3x$ به جای x ، خواهیم داشت $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 1$ در نتیجه

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 3 \times 1 = 3$$

چون تابع $\frac{\sin 3x}{x}$ در $x = 0$ حد دارد این تابع در این نقطه حد راست نیز داشته مقدار حد راست برابر حد آن است. پس

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = 3$$

$$\text{ج) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

به سادگی با استفاده از تعریف حد مشاهده می‌شود $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$ با توجه به کراندار بودن تابع $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ بر بازه $(0, \infty)$ ، داریم

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

تعریف.

فرض کنیم f بر یک همسایگی از نقطه x_0 تعریف شده باشد (پس به طور خاص، تابع f در نقطه x_0 مقداری برابر $f(x_0)$ دارد). در این صورت f را در این نقطه پیوسته نامیم هرگاه $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. گوئیم f در x_0 پیوسته راست است اگر $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$. به همین ترتیب، اگر $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$ آنگاه f را در این نقطه پیوسته چپ می‌نامیم.

روشن است که f در نقطه x_0 پیوسته است اگر و تنها اگر در این نقطه به طور هم‌زمان پیوسته چپ و پیوسته راست باشد. فرض کنیم $I \subset \mathbb{R}$ بازه‌ای از اعداد حقیقی باشد. نقطه $x_0 \in I$ را نقطه‌ای درونی برای این بازه نامیم هرگاه I یک همسایگی از این نقطه را در بر داشته باشد. اگر $x_0 \in I$ نقطه‌ای درونی نباشد آنگاه یا نقطه ابتدایی یا نقطه انتهایی این بازه خواهد بود. تابع $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ را بر بازه I پیوسته نامیم هرگاه این تابع در تمام نقاط درونی I پیوسته بوده، در نقاط ابتدا و انتهای بازه (به شرط وجود و تعلق به بازه) پیوستگی یک‌طرفه داشته باشد. (یعنی در نقطه ابتدای بازه (به شرط وجود) پیوسته راست و در نقطه انتهایی (به شرط وجود) پیوسته چپ باشد).

مثال. قبلاً مشاهده کردیم برای هر $x_0 \in \mathbb{R}$ ، $\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0$ و $\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0$. بنابر این توابع $\sin$ و $\cos$ بر $\mathbb{R}$ پیوسته هستند.

مثال. فرض کنید $n \in \mathbb{N}$. نشان دهید تابع $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ با دستور $f(x) = \sqrt[n]{x}$ بر بازه $[0, \infty)$ پیوسته است. برای $x_0 \in [0, \infty)$ دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

الف) $x_0 \in (0, \infty)$. در این حالت قبلاً مشاهده کرده‌ایم $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0} = f(x_0)$. پس f بر بازه $(0, \infty)$ پیوسته است.

ب) $x_0 = 0$. نشان می‌دهیم $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$ و در این صورت f در $x_0 = 0$ پیوسته راست خواهد بود. برای این منظور از تعریف استفاده می‌کنیم. نشان می‌دهیم برای هر $\epsilon > 0$ عدد $\delta > 0$ وجود دارد که برای هر $x \in [0, \infty)$

$$0 \leq x < 0 + \delta \Rightarrow |\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{0}| = |\sqrt[n]{x}| < \epsilon$$

برای $\epsilon > 0$ ، برای داشتن استلزام فوق کافی است $\delta > 0$ را با شرط $\delta \leq \epsilon^n$ اختیار کنیم. پس f در $x_0 = 0$ نیز پیوسته راست بوده، بنابر قسمت قبل، بر $[0, \infty)$ پیوسته خواهد بود.

برای بررسی پیوستگی برخی از توابع می‌توانیم از قضیه زیر استفاده کنیم.

قضیه

فرض کنیم توابع f و g در یک همسایگی از نقطه x_0 تعریف شده در این نقطه پیوسته باشند. در این صورت هر یک از توابع λf ، $f \pm g$ ($\lambda \in \mathbb{R}$ ثابت) و fg نیز در این نقطه پیوسته هستند. به علاوه اگر $g(x_0) \neq 0$ آنگاه تابع $\frac{f}{g}$ نیز در این نقطه پیوسته است.

نتیجه

با توجه به پیوستگی تابع $f(x) = x$ و توابع ثابت بر $\mathbb{R}$ ، با استفاده مکرر از قضیه فوق مشاهده می‌شود هر تابع چندجمله‌ای چون $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ در هر نقطه از $\mathbb{R}$ پیوسته است.

$$\text{مثال. نشان دهید تابع } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ با دستور } f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x^2 + x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

برای $x_0 \in \mathbb{R}$ دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

الف) $x_0 \neq 0$. در این حالت یک همسایگی از x_0 وجود دارد حاوی 0 نبوده، در نتیجه بر این همسایگی f همه جا با ضابطه $f(x) = \frac{\sin x}{x(x^2 + 1)}$ داده شده است. در این حالت با توجه به پیوستگی توابع $\sin$ و تابع چندجمله‌ای $p(x) = x^3 + x$ در x_0

و این که $p(x_0) = x_0(x_0^2 + 1) \neq 0$ ، بنابر قضیه قبل، تابع $f(x) = \frac{\sin x}{x(x^2 + 1)}$ در این نقطه پیوسته است.

ب) $x_0 = 0$. در این حالت نشان می‌دهیم $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x(x^2 + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{1 + x^2} = 1 \times \frac{1}{1 + 0} = 1 = f(0)$$

پس f در این نقطه نیز پیوسته بوده، از آنجا بر $\mathbb{R}$ پیوسته است.

یکی دیگر از قضایایی که برای بررسی پیوستگی توابع کاربردهای زیادی دارد قضیه ترکیب توابع پیوسته است. البته قضیه زیر

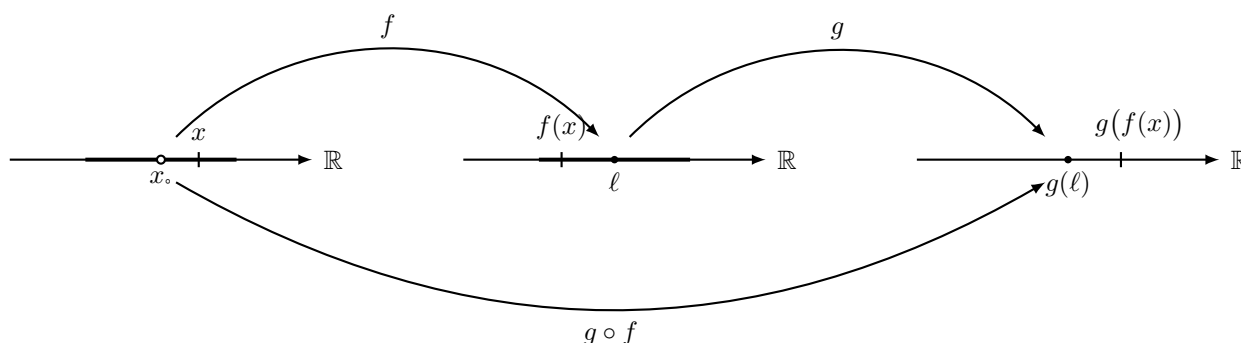
با بیانی دقیق‌تر به این موضوع می‌پردازد.

فرض کنیم f در یک همسایگی محذوف نقطه x_0 تعریف شده، $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$. اگر تابع g در یک همسایگی نقطه ℓ تعریف شده در این نقطه پیوسته باشد آنگاه تابع $g \circ f$ در نقطه x_0 حد داشته، داریم

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g(\ell) = g\left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)\right)$$

به خصوص، اگر تابع f نیز در x_0 پیوسته باشد آنگاه تابع $g \circ f$ نیز در این نقطه پیوسته خواهد بود.

اثبات قضیه به سادگی از تعریف و استفاده از مفروضات قضیه نتیجه می‌شود. شکل زیر ایده اثبات را بیان می‌کند.



به جای ارائه اثبات، با چند مثال به نحوه استفاده از این قضیه می‌پردازیم.

مثال. پیوستگی تابع f با دستور $f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{x}{1+x^3}) & x \geq 0 \\ \frac{\sin x}{\sin^2 x + 1} & x < 0 \end{cases}$ را بر $\mathbb{R}$ بررسی کنید.

فرض کنیم $x_0 \in \mathbb{R}$ نقطه‌ای دلخواه باشد. با توجه به ضابطه f ، برای x_0 سه حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

(الف) $x_0 > 0$. در این صورت یک همسایگی از این نقطه در بازه $(0, \infty)$ وجود دارد. در نتیجه همه جا بر این همسایگی f دارای ضابطه $f(x) = \sin(\frac{x}{1+x^3})$ خواهد بود. اگر قرار دهیم $p(x) = x$ و $q(x) = x^3 + 1$ آنگاه توابع p و q چندجمله‌ای و در نتیجه در x_0 پیوسته هستند. به علاوه چون $x_0 > 0$ ، $q(x_0) = x_0^3 + 1 \neq 0$. در نتیجه تابع $\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x}{1+x^3}$ در نقطه x_0 پیوسته است. تابع $\sin$ نیز همه جا بر $\mathbb{R}$ و از جمله در نقطه $y_0 = \frac{x_0}{x_0^3 + 1}$ پیوسته بوده، بنابر قضیه اخیر، تابع $\sin(\frac{x}{x^3 + 1})$ در x_0 پیوسته خواهد بود.

(ب) $x_0 < 0$. مانند حالت قبل، f در یک همسایگی این نقطه ضابطه $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \sin^2 x}$ خواهد داشت. با در نظر گرفتن تابع $g(x) = \frac{x}{1+x^2}$ که همه جا بر $\mathbb{R}$ پیوسته است، و پیوستگی تابع $\sin$ ، بنابر قضیه فوق تابع $g(\sin x) = \frac{\sin x}{1 + \sin^2 x}$ بر $\mathbb{R}$ و به خصوص در x_0 پیوسته است.

(ج) $x_0 = 0$. با توجه به نحوه تعریف تابع، لازم است پیوستگی چپ و راست تابع در این نقطه بررسی شود. همانطور که در قسمت (ب) اشاره شد، تابع $\frac{\sin x}{\sin^2 x + 1}$ همه جا بر $\mathbb{R}$ پیوسته است. به خصوص این تابع در $x_0 = 0$ نیز پیوسته است. پس

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{\sin^2 x + 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin^2 x + 1} = \frac{\sin 0}{\sin^2 0 + 1} = 0$$

با استدلالی مشابه آنچه در (الف) و (ب) مشاهده کردیم، می‌توان نشان داد تابع $\sin\left(\frac{x}{x^3 + 1}\right)$ همه جا بر بازه $(-1, \infty)$ پیوسته است. به خصوص این تابع در نقطه $x_0 = 0$ نیز پیوسته است. در نتیجه

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin\left(\frac{x}{x^3 + 1}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{x}{x^3 + 1}\right) = \sin\left(\frac{0}{0^3 + 1}\right) = 0$$

به این ترتیب $f(0) = 0$. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 0$ پس f در $x_0 = 0$ نیز پیوسته بوده، از آنجا f بر $\mathbb{R}$ پیوسته است.

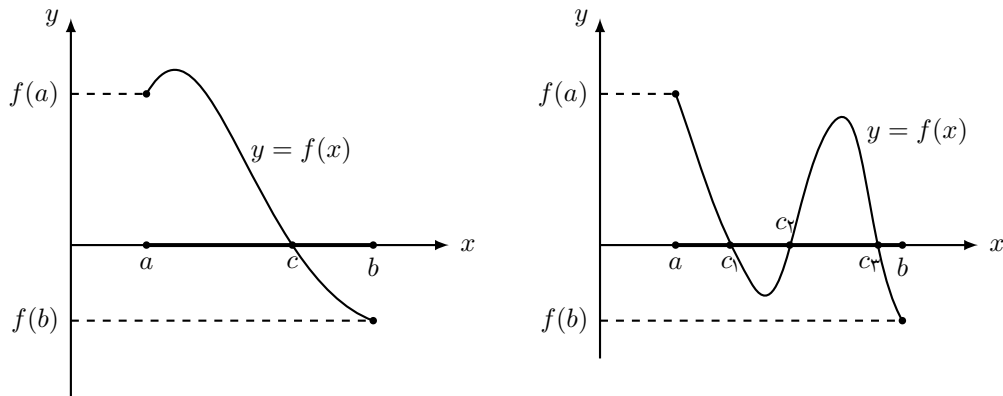
خواص توابع پیوسته

در این بخش یکی از خاصیت‌های مهم توابع پیوسته، تحت نام قضیه مقادیر میانی، را بررسی می‌کنیم. ابتدا حالت این قضیه که به نام قضیه بولتسانو شناخته می‌شود را بیان می‌کنیم.

قضیه بولتسانو

فرض کنیم $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ بر این بازه تابعی پیوسته باشد. اگر دو عدد $f(a)$ و $f(b)$ علامت‌های مختلف داشته باشند آنگاه $c \in [a, b]$ وجود دارد که $f(c) = 0$.

در شکل‌های زیر حکم قضیه بولتسانو مبنی بر وجود صفر یا صفرهای تابع پیوسته را مشاهده می‌کنیم. اثبات این قضیه مبتنی بر خاصیتی از مجموعه اعداد حقیقی تحت نام اصل کمال است که از ارائه آن در اینجا صرف‌نظر می‌شود.



یکی از کاربردهای قضیه بولتسانو اثبات وجود ریشه برای معادلات است که در زیر یک نمونه آن را مشاهده می‌کنیم.

مثال. نشان دهید معادله $x^5 + x^4 - x + 2 = 0$ دارای حداقل یک ریشه حقیقی است.

اگر تابع f با دستور $f(x) = x^5 + x^4 - x + 2$ تعریف شده باشد آنگاه f یک چندجمله‌ای و در نتیجه بر $\mathbb{R}$ پیوسته است. با توجه به اینکه

$$f(-2) = -32 + 16 + 2 + 2 < 0 \quad \text{و} \quad f(0) = 2 > 0$$

مقدار f در دو نقطه $a = -2$ و $b = 0$ علامت‌های مختلف دارد. با توجه به پیوستگی تابع f بر بازه $[-2, 0]$ ، بنابر قضیه بولتسانو، عدد $c \in [-2, 0]$ وجود دارد که $f(c) = 0$ ، یا $c^5 + c^4 - c + 2 = 0$. پس معادله فوق حداقل یک ریشه را خواهد داشت.

قضیه بولتسانو کاربردهای دیگری نیز می‌تواند داشته باشد. به عنوان یکی دیگر از کاربردهای آن خاصیت زیر را که به نام نقطه ثابت نامیده می‌شود مشاهده می‌کنیم.

مثال. فرض کنید $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی پیوسته بر این بازه باشد. اگر برای هر $x \in [a, b]$ نشان دهید $a \leq f(x) \leq b$ و وجود دارد که $f(c) = c$.

فرض کنیم $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ تابع با ضابطه $g(x) = f(x) - x$ باشد. با توجه به پیوستگی f ، تابع g نیز بر $[a, b]$ پیوسته است. در عین حال با توجه به اینکه $a \leq f(a)$ ، $f(b) \leq b$

$$g(a) = f(a) - a \geq 0 \quad \text{و} \quad g(b) = f(b) - b \leq 0$$

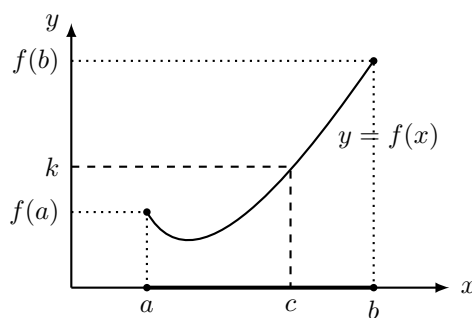
پس $g(a)$ و $g(b)$ نیز علامت‌های متفاوت دارند. در نتیجه بنابر قضیه بولتسانو، $c \in [a, b]$ وجود دارد که $g(c) = 0$. در نتیجه $f(c) = c$.

اکنون آماده‌ایم تا قضیه مقادیر میانی را بیان کنیم.

قضیه مقادیر میانی

فرض کنیم $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی پیوسته بر بازه $[a, b]$ بوده، $k \in \mathbb{R}$ عددی حقیقی بین $f(a)$ و $f(b)$ باشد. در این صورت $c \in [a, b]$ وجود دارد که $f(c) = k$.

اثبات. اگر $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ با دستور $g(x) = f(x) - k$ تعریف شده باشد آنگاه g بر $[a, b]$ پیوسته بوده، بنا به فرض قضیه، دو عدد $g(a)$ و $g(b)$ علامت‌های مختلف دارند. بنابر قضیه بولتسانو، عدد $c \in [a, b]$ وجود دارد که $g(c) = 0$ یا $f(c) - k = 0$. در نتیجه $f(c) = k$. ■



مثال. فرض کنید $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی پیوسته بر این بازه باشد. نشان دهید $c \in [a, b]$ وجود دارد که $f(c) = \frac{f(a) + f(b)}{2}$.

بدون از دست دادن کلیت، فرض کنیم $f(a) \leq f(b)$. اگر قرار دهیم $k := \frac{f(a) + f(b)}{2}$ آنگاه $f(a) \leq k \leq f(b)$. یعنی k عددی بین $f(a)$ و $f(b)$ است. بنابر پیوستگی f بر بازه $[a, b]$ ، از قضیه مقادیر میانی نتیجه می‌شود $c \in [a, b]$ وجود دارد که $f(c) = k = \frac{f(a) + f(b)}{2}$.

مثال. فرض کنید $a > 0$. نشان دهید برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، عدد یکتای $b > 0$ وجود دارد که $b^n = a$. (این عدد یکتا را با نماد $a^{\frac{1}{n}}$ یا $\sqrt[n]{a}$ نشان می‌دهیم.)

فرض کنیم f تابع با ضابطه $f(x) = x^n$ است. روشن است که f بر $\mathbb{R}$ پیوسته است. در عین حال

$$f(0) = 0 \quad \text{و} \quad f(a+1) = (a+1)^n \geq 1 + na > a$$

به این ترتیب عددی بین $f(0)$ و $f(a+1)$ بوده، با توجه به پیوستگی f بر بازه $[0, a+1]$ ، بنابر قضیه مقادیر میانی $b \in [0, a+1]$ وجود دارد که $f(b) = a$ یا $b^n = a$. با توجه به اینکه $a \neq 0$ ، داریم $b > 0$. اثبات یکتا بودن b با خاصیت فوق را به عنوان

تمرین به عهده خواننده می‌گذاریم.

تمرین‌های فصل اول.

۱. با استفاده از تعریف ریاضی حد، صحت هر یک از حدود زیر را نشان دهید

$$\begin{array}{ll} \text{الف)} \quad \lim_{x \rightarrow -3} (1 - 4x) = 13 & \text{ب)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x - 4}{x + 2} = -2 \\ \text{ج)} \quad \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4x + 5) = 1 & \text{د)} \quad \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 1) = 8 \end{array}$$

۲. نشان دهید برای هر $a > 0$ ، $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$ (راهنمایی: توجه کنید که $|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \frac{|x - a|}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}$)

۳. مقدار هر یک از حدود زیر را محاسبه کنید.

$$\begin{array}{lll} \text{الف)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1 + 3x} - 1} & \text{ب)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + cx} - 1}{x} \quad (c \text{ ثابت}) & \text{ج)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1} \end{array}$$

۴. فرض کنید f در یک همسایگی $x = 0$ تعریف شده باشد. اگر $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = a$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = b$ ، هر یک از حدود زیر را تعیین کنید.

$$\begin{array}{ll} \text{الف)} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x^3 - x) & \text{ب)} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x^3 - x) \\ \text{ج)} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x^2 - x^4) & \text{د)} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x^2 - x^4) \end{array}$$

۵. فرض کنید $g(x) = \frac{x^2 + x - 6}{|x - 2|}$. مطلوب است محاسبه $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x)$. آیا مقدار $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ وجود دارد؟ توضیح دهید.

۶. با مثالی نشان دهید امکان دارد عبارت $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$ وجود داشته باشد ولی هیچیک از حدود $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ وجود نداشته باشند.

۷. کدامیک از گزاره‌های زیر درست و کدامیک نادرست است؟ در هر مورد دلیل خود را توضیح دهید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{2x}{x - 4} - \frac{8}{x - 4} \right) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x}{x - 4} - \lim_{x \rightarrow 4} \frac{8}{x - 4}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 3}{x^2 - 4} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (x - 3)}{\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 4)} \quad \text{ب)}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{آنگاه} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \quad \text{ج) اگر } \lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ وجود ندارد.}$$

$$\text{د) اگر } \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) \text{ و } \lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ وجود داشته باشند آنگاه } \lim_{x \rightarrow a} g(x) \text{ نیز وجود دارد.}$$

$$\text{ه) اگر برای هر } x, f(x) > 1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ وجود داشته باشد آنگاه } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) > 1$$

$$\text{و) اگر تابع } |f| \text{ در نقطه } a \text{ حد داشته باشد آنگاه تابع } f \text{ نیز در این نقطه حد دارد.}$$

$$8. \text{ فرض کنید } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x - 1} = 10 \text{ مقدار } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ را تعیین کنید.}$$

$$9. \text{ حد تابع } f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ را در } x = 0 \text{ و بینهایت بررسی کنید.}$$

$$10. \text{ اگر } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 5 \text{ آنگاه مقدار هر یک از حدود } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \text{ را تعیین کنید.}$$

$$11. \text{ با استفاده از قضیه فشردگی نشان دهید } \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^3 + x^2} \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) = 0$$

$$12. \text{ فرض کنید } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ برای هر } x, y \in \mathbb{R} \text{ در شرط } |f(x) - f(y)| \leq C|x - y|, \text{ که در آن } C > 0 \text{ عددی ثابت است، صدق نماید. نشان دهید } f \text{ در هر نقطه از } \mathbb{R} \text{ پیوسته است.}$$

$$13. \text{ در مورد هر یک از توابع زیر، بزرگترین زیرمجموعه از اعداد حقیقی را تعیین کنید که تابع داده شده بر آن پیوسته باشد.}$$

$$\text{الف) } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} & x \neq -1, 1 \\ 1 & x = -1 \text{ یا } 1 \end{cases} \quad \text{ب) } f(x) = \begin{cases} \cos x & x < 0 \\ 1 - x^2 & x \geq 0 \end{cases}$$

$$14. \text{ دامنه تعریف هر یک از توابع زیر را تعیین کرده، نشان دهید هر یک از این توابع بر دامنه تعریف خود پیوسته است.}$$

$$\begin{aligned} \text{الف) } f(x) &= \frac{\sqrt[3]{x-2}}{x^2-2} & \text{ب) } f(x) &= \frac{\sin x}{x+1} \\ \text{ج) } g(x) &= \frac{\tan x}{\sqrt{4-x^2}} & \text{د) } g(x) &= \sin\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right) \\ \text{ه) } h(x) &= \sqrt[3]{x} + x^2 \cos(x^2-1) \end{aligned}$$

$$15. \text{ نشان دهید تابع } f \text{ با ضابطه } f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \text{ بر } \mathbb{R} \text{ پیوسته است.}$$

۱۶. فرض کنید $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ برای هر $x, y \in (0, \infty)$ در رابطه $f(xy) = f(x) + f(y)$ صدق نماید. الف) نشان دهید $f(1) = 0$.

ب) اگر f در $x = 1$ پیوسته باشد نشان دهید f بر $(0, \infty)$ پیوسته است.

۱۷. نشان دهید هر یک از معادلات زیر دارای حداقل یک ریشه است.

الف) $x^3 - 10x^2 + 5 = 0$

ب) $\cos x = x^2$

ج) $\sqrt{x-5} = \frac{1}{x+3}$

۱۸. فرض کنید f تابعی پیوسته بر $[-1, 1]$ باشد و $f(-1) = 2$ و $f(1) = 4$. نشان دهید c با شرط $|c| < 1$ وجود دارد که $f(c) = \pi$.

۱۹. فرض کنید f تابعی پیوسته بر $[0, 2]$ باشد و $f(0) < 0$ و $f(2) > 1$. نشان دهید معادله $f(x) = \sin x$ دارای حداقل یک ریشه است.

۲۰. فرض کنید $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ تابعی پیوسته باشد. نشان دهید $c \in [0, 1]$ وجود دارد که $f(c) = c$.

۲۱. فرض کنید $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ دو تابع پیوسته بر بازه $[a, b]$ باشند. اگر $f(a) > g(a)$ و $f(b) < g(b)$ نشان دهید نمودار دو تابع حداقل در یک نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند.

تمرین‌های تکمیلی

$$۱. \text{ تابع } f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ با دستور } f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases} \text{ به نام تابع دیریکله نامیده می‌شود.}$$

الف) با استفاده از تعریف پیوستگی، نشان دهید این تابع در هیچ نقطه‌ای پیوسته نیست.

ب) با استفاده از تابع فوق، تابعی مثال بزنید که فقط در یک نقطه پیوسته باشد. (ادعای خود را ثابت کنید.)

۲. فرض کنید تابع $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ بر بازه (a, b) تابعی پیوسته باشد. اگر $c \in (a, b)$ وجود داشته باشد که $f(c) > 0$ نشان دهید f در یک همسایگی از این نقطه تابعی مثبت است.

۳. فرض کنید f در یک همسایگی محذوف نقطه a تعریف شده در این نقطه حدی برابر ℓ داشته باشد. اگر برای هر x در این همسایگی محذوف $f(x) \geq 0$ نشان دهید $\ell \geq 0$.

۴. فرض کنید f تابعی پیوسته بر $[a, b]$ باشد. اگر α و β دو عدد مثبت با شرط $\alpha + \beta = 1$ باشند نشان دهید $c \in [a, b]$ وجود دارد که $f(c) = \alpha f(a) + \beta f(b)$.

۵. فرض کنیم f تابعی تعریف شده بر بازه‌ای چون $[a, \infty)$ باشد. f را در بی‌نهایت دارای حد ℓ نامیم، و این خاصیت را با $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \ell$ نشان می‌دهیم هرگاه به هر اندازه دلخواه بتوانیم مقادیر f را به ℓ نزدیک کنیم به شرط آنکه مقادیر x به اندازه کافی بزرگ شده باشند. به زبان ریاضی، گوییم $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \ell$ هرگاه برای هر عدد $\epsilon > 0$ عدد $N > 0$ وجود داشته باشد به گونه‌ای که

$$\forall x \in [a, \infty) \quad x > N \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon$$

به همین ترتیب اگر f بر بازه‌ای چون $(-\infty, a]$ تعریف شده باشد آنگاه گوییم $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$ هرگاه

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N > 0 \quad \forall x \in (-\infty, a] \quad x < -N \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon$$

به کمک تعریف بالا، صحت هر یک از حدود زیر را نشان دهید.

الف) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x}{x^2 + 1} = 1$

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 - x}) = \frac{1}{2}$