

مجموعه ها

باز یا بسته بودن مجموعه نسبت به یک عمل:

* می گوییم مجموعه‌ی A نسبت به یک عملی بسته است که به ازای هر عضو یا عضوهای مجموعه A (حتی تکراری) حاصل نیز عضوی از مجموعه A شود در غیر اینصورت مجموعه A را نسبت به آن عمل باز می گوییم.

مثال: مجموعه $\{1, 0, -1\}$ نسبت به عمل جمع بسته است یا نه؟ زیرا $-1 + (-1) = -2$ و -2 عضو مجموعه نیست.

* **مجموعه‌ی متناهی و نامتناهی:** مجموعه‌ای که اعضای آن با شمردن به پایان برسد مجموعه‌ی متناهی نامیده می شود. هر مجموعه که متناهی نباشد، نامتناهی است.

مثال: مجموعه اعداد طبیعی کوچکتر از ۱۰ متناهی و مجموعه کسره‌های بین $\frac{1}{2}$ و $\frac{3}{4}$ نامتناهی است.

* **دو مجموعه مساوی:** دو مجموعه که هر عضو اولی در دومی و هر عضو دومی در اولی باشد.

مثال: به ازای چه تعداد عدد صحیح x دو مجموعه $A = \{1, x, x^2\}$ و $B = \{y, y^2\}$ می توانند برابر باشند؟

(۱) ۱ (۲) صفر (۳) $\sqrt{2}$ (۴) ۳

$$y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1 \Rightarrow \begin{aligned} y = 1 &\Rightarrow x = 1 \Rightarrow A = \{1\}, B = \{1\} \\ y = -1 &\Rightarrow x = -1 \Rightarrow A = \{-1, 1\}, B = \{-1, 1\} \end{aligned}$$

* **دو مجموعه جدا از هم:** دو مجموعه که هیچ عضو مشترکی نداشته باشند.

مثال: دو مجموعه‌ی اعداد زوج (E) و اعداد فرد (O)

* **دو مجموعه هم ارز:** دو مجموعه A و B را دو مجموعه هم ارز می گویند در صورتیکه بین اعضای دو مجموعه حداقل یک تناظر یک به یک وجود داشته باشد..

مثال: مجموعه اعداد طبیعی با هریک از مجموعه های اعداد طبیعی زوج و اعداد طبیعی فرد و مجموعه اعداد صحیح و اعداد حسابی و اعداد گویا هم ارز است.

* اگر عضوهای مجموعه‌ای یک در میان مثبت و منفی باشند در توصیف مجموعه با علائم ریاضی باید از ضریب

$$(-1)^n \text{ یا } -(-1)^n \text{ یا } (-1)^{n+1} \text{ که در آنها } n \in N \text{ یا } n \in W \text{ است استفاده کرد.}$$

ابتدا بدون در نظر گرفتن علامت های منفی اعضا، مجموعه را به صورت نمادی می نویسیم و سپس یک از ضریب های بالا را در نماینده اعضای مجموعه ضرب می کنیم

مثال: نمایش ریاضی مجموعه $A = \{-1, 2, -3, 4, -5, 6, \dots\}$ در کدام گزینه به درستی نوشته شده است؟

$$A = \{(-1)^n \mid n \in N\} \quad (۲) \quad A = \{(-1) \times n \mid n \in N\} \quad (۱)$$

$$A = \{(-n)^n \mid n \in N\} \quad A = \{(-1)^n \times n \mid n \in N\}$$

★ اگر عضوهای مجموعه ای دو تا در میان مثبت و منفی باشند در توصیف مجموعه با علائم ریاضی باید از ضرب

$$\frac{n(n+1)}{2} \quad \frac{n(n-1)}{2} \quad \frac{n(n+1)}{2} \quad (-1)^2 \quad \text{یا} \quad (-1)^2 \quad \text{که در آنها } n \in N \text{ است استفاده کرد.}$$

ابتدا بدون در نظر گرفتن علامت های منفی اعضا، مجموعه را به صورت نمادی می نویسیم و سپس یکی از ضرب های بالا را در نماینده اعضای مجموعه ضرب می کنیم

مثال: نمایش ریاضی مجموعه $\{-1, -4, +9, +16, -25, -36, \dots\}$ برابر است با:

حل (شکل نمادی مجموعه بدون در نظر گرفتن علامت های منفی به صورت $\{n^2 \mid n \in N\}$ است که باید یکی از ضرب های بالا را در نماینده آن یعنی n^2 ضرب کنیم پس جواب سوال برابر است با: $\left\{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \times n^2 \mid n \in N\right\}$

مجموعه مرجع: به مجموعه ای گفته می شود که همه عضو ها یا مجموعه های مورد بحث در آن مورد را شامل باشد و معمولاً آن را با حرف U یا M نمایش می دهند

مجموعه متمم: اگر A زیر مجموعه ای از مجموعه مرجع باشد، A' را متمم مجموعه A گوئیم که شامل عضو هایی از مجموعه مرجع است که در A نباشند.

زیر مجموعه: اگر $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ یک مجموعه باشد هر کدام از اعضای A می تواند در زیر مجموعه باشد یا نباشد یعنی برای هر عضو دو حالت داریم. پس طبق اصل ضرب برای یک مجموعه n عضوی داریم:

$$\underbrace{2 \times 2 \times 2 \times \dots \times 2}_n = 2^n$$

عضو اول عضو n ام

تذکر مهم: شناخت تفاوت میان «عضو یک مجموعه بودن» با «زیر مجموعه ای یک مجموعه بودن» بسیار مهم است.

مثال: در مجموعه $A = \{1, \{2\}\}$ عدد ۱ و مجموعه $\{2\}$ اعضای A هستند اما هیچ کدام زیر مجموعه ای A نیستند. ولی مجموعه های $\{1\}$ و $\{\{2\}\}$ دو تا از چهار زیر مجموعه ای A می باشند.

★ در بین تمام زیر مجموعه های یک مجموعه، هر عضو در **نیمی** از آنها **تکرار** می شود.

مثال: A یک مجموعه ۶ عضوی است که جمع عضو های آن ۴۰ است همه ی زیر مجموعه های A (که عضو تکراری در آن نباشد) را در نظر بگیریم و حاصل اعضای هر کدام را روی تخته سیاه یادداشت کنید جمع اعداد یادداشت شده چند خواهد شد؟

حل) طبق نکته بالا چون هر عضو در نیمی از زیر مجموعه ها تکرار می شود و چون تعداد زیر مجموعه ها ۶۴ تا می شود پس هر عضو در نصف آنها یعنی ۳۲ بار تکرار می شود و چون مجموع عضوها ۴۰ می باشد پس $۳۲ \times ۴۰ = ۱۲۸۰$ مجموع اعداد یادداشت شده می شود.

★ اگر یک عضو به اعضای مجموعه ای اضافه شود تعداد زیر مجموعه های آن **۲ برابر** می شود.

مثال: به عضوهای مجموعه ای ۴۰ عضوی، چند عضو بپذیر اضافه کنیم تا تعداد زیر مجموعه های آن ۸ برابر شود؟

$$۱ \ (1) \quad ۲ \ (۲) \quad ۳ \ (۳) \quad ۴ \ (۴)$$

مثال) اگر به عضوهای مجموعه A ، ۲ عضو اضافه شود به تعداد زیر مجموعه هایش ۱۹۲ واحد اضافه می شود تعداد عضوهای مجموعه A کرام است؟

$$۱ \ (1) \quad ۲ \ (۲) \quad ۳ \ (۳) \quad ۴ \ (۴)$$

$$۲^{n+۲} = ۲^n + ۱۹۲ \Rightarrow ۲^{n+۲} - ۲^n = ۱۹۲ \Rightarrow ۲^n (۲^۲ - ۱) = ۱۹۲ \Rightarrow ۲^n \times ۳ = ۱۹۲ \Rightarrow ۲^n = \frac{۱۹۲}{۳} = ۶۴ = ۲^۶ \Rightarrow n = ۶$$

★ اگر یک عضو از اعضای مجموعه ای **کم** شود تعداد زیر مجموعه های آن **نصف** می شود.

زیر مجموعه های محض یک مجموعه: تمام زیر مجموعه های یک مجموعه به جز خودش.

★ تعداد زیر مجموعه های محض برابر است با: $۲^n - ۱$

مثال: تعداد زیر مجموعه های محض یک مجموعه ۷ عضوی چند تا است؟ $۲^۷ - ۱ = ۱۲۷$

تعداد زیر مجموعه های دو عضوی :

فرض کنیم مجموعه $B = \{\Delta, \Delta\}$ یک زیر مجموعه ی دو عضوی دلخواه از مجموعه ی n عضوی A باشد که دو خانه خالی دارد که حتماً باید پر شود. برای پر کردن کردن خانه اول به n حالت می توانیم ولی برای پر کردن خانه دوم دیگر از عضوی که در خانه اول قرار دادیم نمی توانیم استفاده کنیم پس به $n-۱$ حالت می توانیم این خانه را پر کنیم و در نتیجه در کل می توانیم این دو خانه را به $n \times (n-۱)$ روش پر کنیم ولی با توجه به اینکه جابجایی اعضا در مجموعه ها بی اثر است. پس مثلاً $\{a, b\}$ و $\{b, a\}$ یک زیر مجموعه حساب می شوند. بنا براین نصف حالتها حذف می شوند پس تعداد زیر مجموعه های دو عضوی برابر است با:

$$\frac{n(n-۱)}{۲}$$

مثال: تعداد زیر مجموعه های دو عضوی مجموعه $\{۱, ۳, ۵, ۷, ۹\}$ چند تا است؟

$$\frac{۵!}{۲!(۵-۲)!} = \frac{۵!}{۲! \times ۳!} = \frac{۳! \times ۴ \times ۵}{۲! \times ۳!} = ۱۰ \quad (\text{روش دوم})$$

$$\frac{۵(۵-۱)}{۲} = ۱۰ \quad (\text{روش اول})$$

تعداد زیر مجموعه های سه عضوی:

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \times 2 \times 3}$$

تعداد زیر مجموعه های سه عضوی نیز با روشی مانند روش بالا از فرمول زیر حساب می شود.

تعداد زیر مجموعه های k عضوی از یک مجموعه n عضوی را نیز می توان با یکی از فرمول های زیر به دلخواه نیز حساب کرد.

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

و یا به کمک فاکتوریل از فرمول

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(k-1))}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times k}$$

مثال: تعداد زیر مجموعه های ۷ عضوی از یک مجموعه ۱۰ عضوی را پیدا کنید.

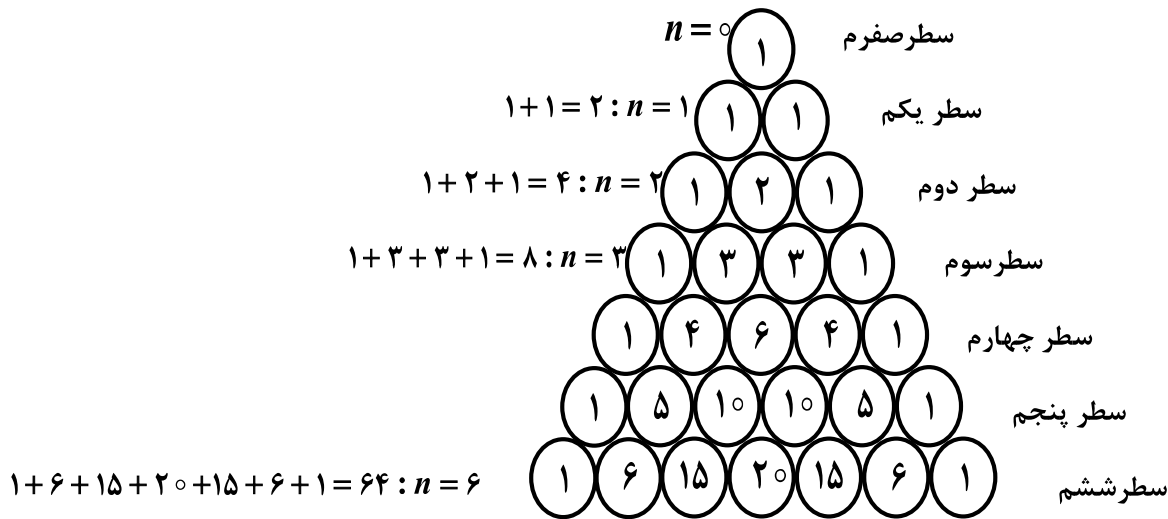
$$\frac{10(10-1)(10-2)(10-3)\dots(10-6)}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7} = 120 \quad (\text{روش اول})$$

روش دوم) با استفاده از فرمول فاکتوریل

تعداد زیر مجموعه های k عضوی از یک مجموعه n عضوی با کمک مثلث خیام- پاسکال:

در این مثلث مجموع اعداد هر سطر تعداد کل زیر مجموعه های یک مجموعه n عضوی را نشان می دهد.

و هر عدد روی ضلع پایین مثلث مربوط به هر سطر تعداد زیر مجموعه های k عضوی از آن مجموعه n عضوی را نمایش می دهد.



طرز نوشتن زیر مجموعه های یک مجموعه که عضوهای آنها دارای شرط باشند.

مجموعه $A = \{a, b, c, d, e\}$ چند زیر مجموعه دارد که شامل l باشد ولی l در آنها نباشد.

حل: عضو a در تمام زیر مجموعه ها باید باشد پس فقط یک حالت دارد ولی برای بقیه اعضا دو حالت وجود دارد (بودن یا نبودن) بنابراین :

اعضوها : $a \ b \ c \ d \ e$

$$\text{حالتها : } 1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 1 = 2^3 = 8$$

★ پس تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه M عضوی که p تا از اعضای آن در زیر مجموعه باشند و q تا از اعضای آن در زیر مجموعه نباشند برابر است با:

$$2^{n-(p+q)}$$

مثال: چند زیر مجموعه M عضوی از مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 15\}$ وجود دارد که عدد ۱۰ متما عضو آن بوده و 3 و 2 عضو آن نباشند؟

عضوهای 3 و 2 را حذف می کنیم و تعداد زیر مجموعه های 2 عضوی یک مجموعه 12 عضوی را پیدا می کنیم و سپس عضو 10 را به همه آنها اضافه می کنیم داریم:

$$\frac{12!}{2! \times (12-2)!} = \frac{11 \times 12}{2} = 66$$

مثال: مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 9\}$ چند زیر مجموعه M عضوی دارد که جمع عضوهای آن برابر ۱۵ و عدد ۴ عضو آنها باشد؟

$$\Rightarrow (1, 4), (2, 3), (1, 2, 5), (1, 3, 6) \Rightarrow 11 - 4 = 15$$

با توجه به توضیح بالا دو عضو 7 و 4 نمی توانند جز زیر مجموعه ها باشند زیرا عضو سوم نیز ۴ می شود که تکراری است. پس تعداد زیر مجموعه ها ۳ تا می شود.

★ تعداد زیر مجموعه های فرد عضوی و یا زوج عضوی یک مجموعه برابر است با:

$$2^{n-1}$$

مثال: تعداد زیر مجموعه های زوج عضوی یک مجموعه 9 عضوی کرام است؟

$$2^{9-1} = 2^8 = 256 \quad \text{حل}$$

$$210 \quad (14)$$

$$256 \quad (13)$$

$$246 \quad (12)$$

$$310 \quad (11)$$

مجموعه توان یک مجموعه: مجموعه P تمام زیر مجموعه های یک مجموعه را مجموعه توان آن مجموعه می گویند و آن را با (نام مجموعه) P نمایش می دهند.

مثال) اگر $A = \{b, \{b\}\}$ باشد $P(A)$ کرام است؟

$$\{\{b\}, \{\{b\}\}, \{\emptyset\}, A\} \quad (14) \quad \{\{b\}, \{\{b\}\}, \emptyset, A\} \quad (13) \quad \{b, \{b\}, \emptyset, A\} \quad (12) \quad \{\{b\}, \{\{b\}\}, \emptyset\} \quad (11)$$

★ تعداد عضوهای مجموعه توان مجموعه A یعنی $P(A)$ برابر است با:

$$2^{n(A)}$$

مثال: اگر $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ باشد $P(P(A))$ چند عضو دارد؟

$$(1) \text{ صفر} \quad 2^2 \quad (2) \quad 2^3 \quad (3) \quad (2^2)^2 \quad (4)$$

مجموعه A دارای دو عضو است پس $P(A)$ دارای 2^2 یعنی ۴ عضو است و $P(P(A))$ دارای 2^4 یعنی ۱۶ عضو است.

★ تعداد زیر مجموعه هایی که در رابطه‌ی $B \subseteq X \subseteq A$ صدق می کنند از رابطه‌ی $2^{n(A)-n(B)}$ به دست می آید.

مثال: چند مجموعه مانند X می توان نوشت که رابطه‌ی $\{1, 2, 3, \dots, 10\} \subseteq X \subseteq \{2, 4, 6, 8\}$ برای آن برقرار باشد؟

$$X = 2^{10-4} = 2^6 = 64 \quad \text{تعداد مجموعه ها}$$

★ تعداد زیر مجموعه های k عضوی و زیر مجموعه های $n - k$ عضوی از یک مجموعه‌ی n عضوی با هم برابرند.

مثال: تعداد زیر مجموعه های ۳ عضوی و زیر مجموعه های ۷ عضوی (۱۰-۳) از یک مجموعه‌ی ۱۰ عضوی با هم برابرند.

★ **اشتراک** تمام زیر مجموعه های یک مجموعه، مجموعه **تهی** میشود.

★ **اجتماع** تمام زیر مجموعه های یک مجموعه، **خود مجموعه** می شود.

اصل شمول: تعداد عضو هایی که حداقل به یکی از مجموعه ها (دوتا، سه تا و ...) تعلق دارند.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

تذکر: بسیاری از این نمونه سوالات را به کمک رسم نمودار ون راحت تر و قابل فهم تر می توان حل کرد.

مثال) از ۸۰ نفر کل دانشپویان یک دانشکده، ۵۰ نفر در درس فیزیک و ۶۰ نفر در درس شیمی ثبت نام کرده اند. اگر ۸ نفر در هیچ یک از این دو درس ثبت نام نکرده باشند چه تعداد از دانشپویان در هر دو درس ثبت نام کرده اند؟

$$n(A \cup B) = 80 - 8 = 72$$

$$\Rightarrow n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow 72 = 50 + 60 - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = 38$$

احتمال

فضای نمونه ای: مجموعه همه‌ی حالت های ممکن یک پدیده تصادفی را فضای نمونه ای می نامیم و آن را با S نمایش می دهیم.

پیشامد: هر زیر مجموعه از فضای نمونه ای را پیشامد می گوئیم.

★ اگر سکه ای را n بار بیندازیم یا n سکه را یک بار بیندازیم تعداد کل حالت های ممکن $n(S) = 2^n$ می شود.

★ اگر تاسی را n بار بیندازیم یا n تاس را یک بار بیندازیم تعداد کل حالت های ممکن $n(S) = 6^n$ می شود.

مثال: اگر سه تاس را باهم بیندازیم کل حالت های ممکن $6^3 = 216$ حالت می شود.

همواره: $0 \leq P(A) \leq 1$

★ اگر $P(A) = 0$ می گوییم پیشامد A نشدنی یا غیر ممکن است.

★ اگر $P(A) = 1$ می گوییم پیشامد A حتمی است.

پیشامد متمم: اگر A پیشامدی در فضای نمونه S باشد پیشامد B را متمم پیشامد A می گوییم مشروط بر آنکه

$$(A \cup B) = S \quad \text{باشد و در این مورد همواره داریم:} \quad P(A) + P(B) = 1 \Rightarrow P(A) = 1 - P(B)$$

مثال: دو تاس را با هم انداخته ایم احتمال این که مجموع اعداد رو شده کمتر از ۱۱ باشند را به دست آورید.

بهتر است که احتمال این که مجموع اعداد رو شده ۱۱ یا ۱۲ باشند را حساب کنیم و از عدد ۱ کم کنیم:

$$(6,6), (6,5), (5,6) \Rightarrow P(A) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \Rightarrow P(B) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

مجموع ۱۱ و ۱۲ است

★ هرگاه بین حالات مختلف یک پیشامد (یا) بیاید طبق اصل جمع تعداد آنها را با هم جمع می کنیم.

مثال: یک تاس را می اندازیم احتمال این که عدد ۲ یا ۵ بیاید چند است؟

$$P(A) = \frac{1}{6} \quad \text{احتمال آمدن عدد ۲} \quad \text{و} \quad P(B) = \frac{1}{6} \quad \text{احتمال آمدن عدد ۵} \Rightarrow \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$$

★ واگر (و) بیاید طبق اصل ضرب آنها را در هم ضرب می کنیم.

مثال: یک تاس و یک سکه را با هم می اندازیم احتمال این که تاس عدد ۵ و سکه رو بیاید.

$$P(A) = \frac{1}{6} \quad \text{احتمال آمدن ۵ تاس} \quad \text{و} \quad P(B) = \frac{1}{2} \quad \text{احتمال رو آمدن سکه} \Rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

مثال: احتمال قبولی علی در آزمون رانندگی ۰/۷ و احمد ۰/۶ می باشد با کدام احتمال فقط یکی از آنها در این آزمون قبول می شود؟

حل) معنای جمله فقط یکی از آنها قبول شود این است که: (علی قبول نشود و احمد قبول نشود) یا (علی قبول نشود و احمد قبول شود). اکنون

$$p = (0.7 \times 0.4) + (0.3 \times 0.6) = 0.46$$

با توجه به این عبارت احتمال را پیدا می کنیم:

★ همچنین در سوالاتی که «حداقل» یا «حداکثر» را خواسته باشند تعداد پیشامدها را با هم جمع می کنیم.

مثال: ۴ سکه را با هم پرتاب می کنیم احتمال اینکه حداقل یک سکه رو بیاید کدام است؟

$$\frac{12}{16} \quad (1) \quad \frac{13}{16} \quad (2) \quad \frac{14}{16} \quad (3) \quad \frac{15}{16} \quad (4)$$

کل حالتها برابر $2^4 = 16$ حالت می شود و چون فقط یک حالت داریم که هردو پشت بیاورد در بقیه حالتها حداقل یکی رو خواهد آمد پس ۱۵ حالت خواهیم داشت بنا براین جواب $\frac{15}{16}$ است.

★ در برداشتن تصادفی r شیئی از میان n شیئی تعداد کل پیشامد های ممکن از را بطه ی زیر به دست می آید.

$$\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

مثال: ۹ عدد گوی یکسان با شماره های ۱ تا ۹ در داخل ظرفی قرار دارند به طور تصادفی ۲ گوی از ظرف بیرون می آوریم احتمال آنکه شماره هر دو

گوی عدد زوج باشد کدام است؟ (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{3}{8}$ (۴) $\frac{1}{6}$

$$n(A) = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{2! \times 3 \times 4}{2! \times 2!} = 6 \quad (n=4, r=2) \text{ (زوج) } 4 \text{ گوی از بین } 2 \text{ گوی های انتخاب}$$

تعداد حالت های انتخاب ۲ گوی از بین ۹ گوی

$$n(S) = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{9!}{2!(9-2)!} = \frac{7! \times 8 \times 9}{2! \times 7!} = 36$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

در نتیجه داریم :