

مثال: حاصل عبارت $M = \left[1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{6}{7} + \dots + \frac{100}{101}\right] + \left[1 + \frac{3}{2} + \frac{5}{4} + \dots + \frac{101}{100}\right]$ کدام است؟

$$(1) M \leq 100 \quad (2) M = 100 \quad (3) M < 100 \quad (4) M > 100$$

حل) چون هر عدد دافل گروهی اول معکوسش دافل گروهی دوم قرار دارد پس طبق نکته بالا حاصل جمع هر دو عدد از ۲ بزرگتر می شود و چون دافل هر گروه ۵۱ عدد وجود دارد پس ۵۱ هفت عدد داریم: $M = 51 \times 2 > 100$

بین هر دو عدد دلخواه حقیقی، بی شمار عدد گویا و بی شمار عدد گنگ وجود دارد.

روشهای نوشتن کسرهایی بین دو کسر:

۱- یکی کردن مخرج ها

تذکر: در این حالت اگر صورت دو کسر اعداد متوالی شد آنها را در عددی که یکی بیشتر از تعداد کسر های خواسته شده است ضرب می کنیم.

مثال: سه کسر بین $\frac{3}{5}$ و $\frac{4}{7}$ بنویسید. $\frac{3}{5} = \frac{21}{35}$ و $\frac{4}{7} = \frac{20}{35}$ چون ۲۰ و ۲۱ متوالی هستند باید صورت و مخرج را در

$$\frac{80}{140} < \frac{81}{140} < \frac{82}{140} < \frac{83}{140} < \frac{84}{140}$$

یکی بیشتر از تعداد خواسته شده یعنی ۴ ضرب می کنیم

تذکر مهم: اگر بین دو کسر، کسری با مخرج عددی خاص بخواهند باید «ک م م» آن عدد خاص را با مخرج های دو کسر پیدا کرده و سپس کسر خواسته شده را بنویسیم:

$$[14, 15, 88] = 9240 \Rightarrow \frac{1}{15} = \frac{616}{9240} < \frac{6}{88} = \frac{660}{9240}$$

مثال: کسری بین $\frac{1}{15}$ و $\frac{1}{14}$ پیدا کنید که مخرج آن ۸۸ باشد.

۲- نوشتن کسری که صورتش حاصل جمع صورت های دو کسر و مخرجش حاصل جمع مخرج های دو کسر باشد.

مثال: سه کسر بین $\frac{3}{5}$ و $\frac{4}{7}$ بنویسید. $\frac{3}{5} < \frac{7+3}{12+5} = \frac{10}{17} < \frac{4}{7}$ و $\frac{4}{7} < \frac{4+7}{7+12} = \frac{11}{19} < \frac{3}{5}$ و $\frac{3}{5} < \frac{4+3}{7+5} = \frac{7}{12} < \frac{4}{7}$

۳- پیدا کردن میانگین دو کسر:

نکته: در روش پیدا کردن میانگین دو کسر جواب به دست آمده دقیقاً وسط دو کسر قرار می گیرد.

مثال: کسری بین $\frac{7}{12}$ و $\frac{8}{13}$ پیدا کنید. میانگین دو کسر را پیدا می کنیم $\left(\frac{7}{12} + \frac{8}{13}\right) \div 2 = \left(\frac{91+96}{156}\right) \times \frac{1}{2} = \frac{187}{156} \times \frac{1}{2} = \frac{187}{312}$

۴- پیدا کردن مقدار تقریبی هر کسر با تقسیم صورت بر مخرج و نوشتن اعداد بین این دو مقدار

$$x = 0.\overline{27} \Rightarrow 100x - x = 27/\overline{27} - 0.\overline{27} = 27 \Rightarrow 99x = 27 \Rightarrow x = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}$$

$$100x = 27/\overline{27}$$

راه حل تستی:

اگر عدد اعشاری عدد صحیح دارد آن را می نویسیم سپس ارقام دوره گردش را در صورت نوشته و در مخرج به تعداد ارقام دوره گردش ۹ می گذاریم.

$$0.\overline{295} = \frac{295}{999} \quad 4/\overline{37} = 4 \frac{37}{99} = \frac{433}{99} \quad \text{مثال:}$$

پیدا کردن کسرهایی مولد عدد اعشاری متناوب مرکب :

عدد اعشاری را مساوی x فرض کرده و طرفین تساوی حاصل را با در نظر گرفتن ارقامی که بعد از ممیز تکرار نمی شوند (دوره غیر گردش) در اعداد ۱۰ یا ۱۰۰ یا ۱۰۰۰ و... ضرب می کنیم تا عدد اعشاری متناوب مرکب به عدد اعشاری متناوب ساده تبدیل شود و سپس مانند تبدیل عدد اعشاری متناوب ساده به نماد متعارفی عمل می کنیم.

مثال: کسر مولد عدد $0.\overline{468}$ را به دست آورید.

$$x = 0.\overline{468} \Rightarrow 100x = 46/\overline{8} \Rightarrow 1000x - 100x = 468/\overline{8} - 46/\overline{8} \Rightarrow 900x = 422 \Rightarrow x = \frac{422}{900} = \frac{211}{450}$$

راه حل تستی:

در صورت تمام ارقام بعد از ممیز را منهای ارقام اعشاری غیر گردش می کنیم و در مخرج به تعداد ارقام دوره گردش ۹ و به تعداد ارقام غیر گردش صفر قرار می دهیم.

$$0.\overline{153} = \frac{153 - 15}{900} = \frac{138}{900} \quad 7/\overline{123} = 7 \frac{123 - 1}{990} = 7 \frac{122}{990} = \frac{7052}{990} \quad \text{مثال:}$$

پیدا کردن رقم n ام اعشار از یک عدد اعشاری متناوب

اگر عدد متناوب ساده باشد عدد n را تقسیم بر تعداد رقمهای دوره گردش کرده و باقیمانده را پیدا می کنیم اگر باقیمانده این تقسیم صفر شود. رقم مورد نظر، آخرین رقم اعشار دوره گردش از چپ می باشد ولی اگر باقیمانده عددی غیر از صفر شد شماره رقم دوره گردش از سمت چپ می شود.

در مورد اعداد اعشاری متناوب مرکب نیز باید ابتدا تعداد ارقام اعشاری غیر گردش را از n کم کرده و سپس مثل بالا عمل کنیم.

مثال (۱۳۹۹ امین رقم اعشار عدد $5/34879$ چند است؟)
 پس چون باقیمانده ۲ شد دومین رقم اعشار گردش از چپ یعنی ۷ پاسخ سوال است.

$$1399 - 2 = 1397 \quad \begin{array}{r} 1397 \overline{) 3} \\ \underline{465} \end{array}$$

مثال: به ازای چند مقدار طبیعی n بسط اعشاری کوپک تر از واحد $\frac{5n}{126}$ متناوب مرکب است؟

(حل) باید $n = 1, 2, 3, 4, \dots, 25$ $\Rightarrow n < 25/2 \Rightarrow n < 12.5$ و n های صورت در مخرج نیز نباشند. $126 = 2 \times 3^2 \times 7$

تذکر مهم: برای به دست آوردن حاصل جمع یا ضرب یا تفریق اعداد اعشاری متناوب باید ابتدا کسر مولد آنها را به دست آوریم و پس از پیدا کردن حاصل کسرها دوباره آن را به اعشاری متناوب تبدیل کنیم.

مثال) آیا می توان گفت حاصل $0.\overline{12} + 0.\overline{5} = 0.\overline{67}$ ؟ **فیر** زیرا:

$$0.\overline{5} + 0.\overline{7} = \frac{5}{9} + \frac{7}{9} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3} = 1.\overline{3}$$

نکته: حاصل جمع، تفریق، ضرب یا تقسیم هر دو عدد گنگ، **گاهی گنگ و گاهی گویا** می شود.

نکته: حاصل جمع یا تفریق یک عدد گنگ و یک عدد گویا، **همیشه گنگ** است. $\sqrt{3} + 1 \in Q'$

نکته: حاصل ضرب یا تقسیم یک عدد گویا (غیر از صفر) و یک عدد گنگ، **همیشه گنگ** است. $4 \times \sqrt{2} = 4\sqrt{2} = \sqrt{32} \in Q'$

کسره های تلسکوپی

اگر در مخرج کسری دو عدد در هم ضرب شوند و در صورت آن کسر:

الف) تفاضل دو عدد مخرج باشد می توان آن کسر را به شکل تفاضل دو کسر با صورت ۱ نوشت

$$\frac{b-a}{a \times b} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$$

مثال)

$$\frac{2}{3 \times 5} + \frac{2}{5 \times 7} + \frac{2}{7 \times 9} + \dots + \frac{2}{29 \times 31} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{29} - \frac{1}{31} = \frac{1}{3} - \frac{1}{31} = \frac{31-3}{93} = \frac{28}{93}$$

تذکر: در کسره های تلسکوپی که در صورت آنها عددی غیر از تفاضل دو عدد مخرج وجود دارد می توان آن عبارت را به تلسکوپی تبدیل کرده و حاصل را در کسر $\frac{\text{عدد صورت}}{\text{اختلاف دو عدد مخرج}}$ ضرب کرد.

$$\frac{2}{5 \times 8} + \frac{2}{8 \times 11} + \frac{2}{11 \times 14} + \dots + \frac{2}{29 \times 32} = \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{32} \right) \times \frac{2}{3} = \left(\frac{32}{160} - \frac{5}{160} \right) \times \frac{2}{3} = \frac{27}{160} \times \frac{2}{3} = \frac{9}{80}$$

ب) مجموع دو عدد مخرج باشد می توان آن کسر را به شکل مجموع دو کسر با صورت ۱ نوشت.

$$\frac{a+b}{a \times b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

مثال: حاصل عبارت $\frac{5}{1 \times 4} - \frac{13}{4 \times 9} + \frac{25}{9 \times 16} - \frac{41}{16 \times 25} + \dots + \frac{221}{100 \times 121}$ **پقرار** است؟

نکته: برای پیدا کردن بیشترین و کمترین مقدار عبارتی مانند $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$ از **نکته** $\frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)}$ می توان استفاده کرد.

کسره های مسلسل:

برای محاسبه کسر های مسلسل از آخرین کسر شروع به حل می کنیم.

مثال (حاصل کسر مقابل را پیدا کنید).

$$2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{3}{2}}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{2}{3}} = 2 + \frac{1}{\frac{5}{3}} = 2 + \frac{3}{5} = \frac{13}{5}$$

روش تبدیل کسرها به شکل کسر مسلسل:

برای انجام این کار باید دو مرحله عملیات انجام دهیم که هر کدام از این مراحل ممکن است چندین بار تکرار شود.

۱- اگر کسر کوچکتر از واحد باشد باید آن را معکوس کرده و به صورت یک کسر که صورت آن عدد ۱ و مخرج آن معکوس همین

کسر است را بنویسیم یعنی مثلاً در مورد کسر $\frac{3}{7}$ می نویسیم:

$$\frac{3}{7} = \frac{1}{\frac{7}{3}}$$

۲- اگر کسر بزرگتر از واحد باشد آن را به شکل عدد مخلوط می نویسیم. مثال:

$$\frac{5}{3} = 1 + \frac{2}{3}$$

دو مرحله بالا را آنقدر ادامه می دهیم تا به کسری برسیم که مخرج آن بر صورتش بخشپذیر شود. به این ترتیب به کسر مسلسل مساوی آن کسر می رسیم. به مثال مقابل دقت کنید:

$$\frac{32}{19} = 1 + \frac{13}{19} = 1 + \frac{1}{\frac{19}{13}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{6}{13}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{13}{6}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{6}}$$

دقت کنید در مخرج کسر آخر چون عدد ۶ (مخرج کسر) بر صورتش (یعنی عدد ۱) بخشپذیر است پس عملیات، پایان می یابد.

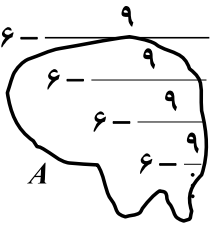
کسرهاى مسلسل نامتناهى :

برای پیدا کردن این گونه کسرها ابتدا کل عبارت را برابر A قرار می دهیم سپس آن قسمت از عبارت را نیز که مانند کل عبارت می باشد برابر A قرار داده و سپس به کمک معادله و یا تجزیه با استفاده از اتحادها (خصوصاً اتحاد جمله مشترک) مقدار A را به دست می آوریم.

مثال: حاصل $6 - \frac{9}{6 - \frac{9}{6 - \frac{9}{\ddots}}}$ را پیدا کنید.

حل (کل عبارت را برابر A می گیریم داریم:

$$A = 6 - \frac{9}{A} \Rightarrow A = 6 - \frac{9}{A} \Rightarrow A^2 = 6A - 9 \Rightarrow A^2 - 6A + 9 = 0 \Rightarrow (A-3)(A-3) = 0 \Rightarrow A = 3$$



$$\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1$$

★ اگر x عددی دلخواه و غیر صفر باشد همواره داریم:

برابر است با:

$$\frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \dots + \frac{1}{1991}}}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \dots + \frac{1}{1991}}}} = 1$$

حل) در کسر اول عدد ۲ را به صورت ۱+ می نویسیم داریم:

$$\frac{1}{1 + 1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \dots + \frac{1}{1991}}}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \dots + \frac{1}{1991}}}} = \frac{1}{1+A} + \frac{1}{1+\frac{1}{A}} = 1$$

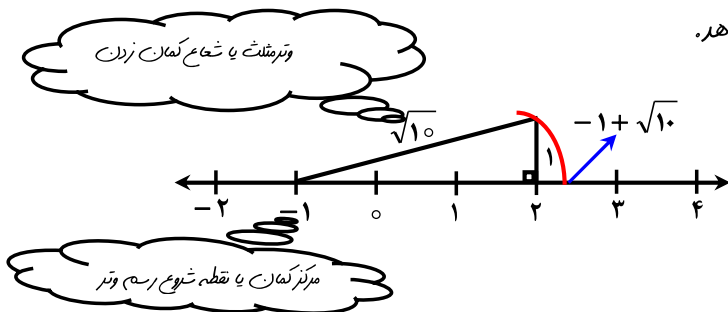
نمایش اعداد رادیکالی $a \pm \sqrt{b}$ روی محور اعداد

عدد a مرکز کمان زدن یا نقطه شروع رسم وتر مثلث را نشان می دهد.

علامت $\pm$ جهت کمان زدن را نشان می دهند.

عدد $\sqrt{b}$ شعاع کمان زدن یا اندازه وتر مثلث را نشان می دهد.

مثال: عدد $-1 + \sqrt{10}$ را روی محور نمایش دهید



قدر مطلق

قدر مطلق هر عبارت و یا هر عدد همواره مقداری مثبت یا صفر (نامنفی) است.

نکته: قدر مطلق هر عبارت مثبت، **خود** عبارت می شود و قدر مطلق هر عبارت که حاصلش منفی شود، **قرینه** آن عبارت میشود.

نکته: $|x| - |y| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$ و $|x - y| = |y - x|$

مثال: اگر $|x| + |y| = 7$ باشد آنگاه بیشترین مقدار $|x + y|$ برابر ۷ و کمترین مقدار $|x + y|$ برابر صفر می شود.

نکته: مجموع هر عدد با قدر مطلقش همواره مقداری نامنفی است. یعنی: $a + |a| \geq 0$

نکته: در مورد ضرب و تقسیم عبارت های قدر مطلق دار نیز رابطه های زیر برقرار است. $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$ و $|xy| = |x||y|$

نکته: $\sqrt{x^2} = |x|$

مثال: حاصل عبارت مقابل را پیدا کنید. $\sqrt{(\sqrt{11} - 11)^2} = |\sqrt{11} - 11| = -(\sqrt{11} - 11) = 11 - \sqrt{11}$

معادلات قدر مطلق دار: اگر a عدد حقیقی نامنفی باشد آنگاه همواره داریم: $|x| = a \Rightarrow x = \pm a$

مثال: تعداد جوابهای معادله $|1 + |x + 2|| = 7$ برابر است با:

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) جواب ندارد.

$$|1 + |x + 2|| = 7 \Rightarrow 1 + |x + 2| = \pm 7 \Rightarrow \begin{cases} 1 + |x + 2| = 7 \Rightarrow |x + 2| = 6 \Rightarrow x + 2 = \pm 6 \Rightarrow x = 4, x = -8 \\ 1 + |x + 2| = -7 \Rightarrow |x + 2| = -8 \end{cases}$$

نکته: فاصله ی نقطه ی x از a را با نماد $|x - a|$ نمایش می دهیم.

مثال: فاصله ی نقطه ی x از -3 برابر ۴ می باشد x را پیدا کنید.

$$|x - (-3)| = 4 \Rightarrow |x + 3| = 4 \Rightarrow |x + 3| = \pm 4 \Rightarrow x = 1, x = -7$$

اگر a عدد حقیقی نامنفی باشد آنگاه همواره داریم: $|x| \leq a \Rightarrow -a \leq x \leq a$

مثال: در عبارت $|x - 2| \leq 5$ درود x را مشخص کنید.

$$|x - 2| \leq 5 \Rightarrow -5 \leq x - 2 \leq 5 \Rightarrow -3 \leq x \leq 7$$

تناسب معکوس

در تناسب معکوس بر خلاف تناسب مستقیم با افزایش یک کمیت، کمیت دیگر به همان نسبت کاهش می یابد.

★ برای حل تناسب معکوس کمیت های هم جنس را زیر هم می نویسیم اما به جای طرفین وسطین کردن به صورت مستقیم کمیت ها را در هم ضرب می کنیم.

★ نکته ی مهم: در تناسب معکوس و مرکب معمولاً کنندگان کار، با زمان (ساعت و روز و...) رابطه ی معکوس دارند.

مثال: ۸ کارگر کاری را در ۱۴ روز انجام می دهند اگر نصف این کارگران همین کار را انجام می دهند کار چند روز به تمام می شد.

$$\begin{array}{l} 8 \text{ ————— } 14 \\ 4 \text{ ————— } x \end{array} \quad x = \frac{8 \times 14}{4} = 28$$

تناسب معکوس شکسته: تناسب معکوسی که از جایی به بعد شرایط مساله تغییر می کند.

مثال: ۸ کارگر سافتمانی را ۲۳ روز رنگ می کنند پس از ۳ روز ۲ نفر به آنها اضافه شدند بقیه کار چند روز به تمام می شود؟

$$\begin{array}{l} 8 \text{ ————— } 20 \\ 10 \text{ ————— } x \end{array} \quad \Rightarrow x = \frac{8 \times 20}{10} = 16$$

روز باقیمانده

$$23 - 3 = 20$$

تناسب مرکب:

تناسبی که در آن بیش از دو کمیت وجود داشته باشد. برای حل مسائل این نوع تناسب وضعیت هر ستون را با ستون بعدی آن از نظر مستقیم یا معکوس بودن جنس کمیت آنها می سنجیم و آن را با خط مستقیم برای معکوس بودن و خط مورب برای مستقیم بودن جنس کمیتها مشخص می کنیم و با حرکت بر روی این خطوط کمیت ها را در هم ضرب کرده و مقدار مجهول را مشخص می کنیم.

مثال: ۱۴ کارگر با روزی ۶ ساعت کاری را ۲۰ روز تمام می کنند اگر ۲۱ کارگر بفراهند همان کار را در ۳۰ روز تمام کنند باید روزی چند ساعت کار کنند.

$$x = \frac{14 \times 6 \times 20}{21 \times 30} = \frac{8}{3} = 2 \frac{2}{3}$$

$$\begin{array}{l} 14 \text{ ————— } 6 \text{ ————— } 20 \\ 21 \text{ ————— } x \text{ ————— } 30 \end{array}$$

مثال: مأمور و مسعود با هم کاری را در ۱۸ ساعت و مسعود به تنهایی کار را در ۲۴ ساعت انجام می دهد مأمور به تنهایی کار را در چند ساعت انجام می دهد؟

حل) با توجه به صورت سوال مسعود در یک ساعت $\frac{1}{24}$ از کار را و دو نفری با هم در یک ساعت $\frac{1}{18}$ از کار را انجام می دهند پس داریم:

$$\frac{1}{24} + \frac{1}{x} = \frac{1}{18} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{18} - \frac{1}{24} = \frac{4-3}{72} = \frac{1}{72} \Rightarrow x = 72$$