

توان

★ هر عدد به توان صفر برسد حاصل یک می شود.

★ هر عدد منفی به توان زوج برسد حاصل مثبت خواهد شد.

★ هرگاه عددی بین صفر و یک باشد و به توان برسد هرچه توان بزرگتر باشد عدد کوچکتر خواهد شد.

$$\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27} \quad \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{243} \quad \text{مثال}$$

۱- پایه ها مساوی باشد :

الف) ضرب : یکی از پایه ها را نوشته و توانها را با هم جمع می کنیم.

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

ب) تقسیم : یکی از پایه ها را نوشته و توانها را از هم کم می کنیم.

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

۲- توانها مساوی باشد:

الف) ضرب : یکی از توانها را نوشته و پایه ها را در هم ضرب می کنیم.

$$a^m \times b^m = (ab)^m$$

ب) تقسیم : یکی از توانها را نوشته و پایه ها را برهم تقسیم می کنیم

$$a^m \div b^m = (a \div b)^m$$

۳- هیچکدام مساوی نباشد:

الف) با کمک تجزیه پایه ها، پایه ها را مساوی می کنیم. $4^3 \times 8^5 = (2^2)^3 \times (2^3)^5 = 2^6 \times 2^{15} = 2^{21}$

ب) با کمک «ب م م» توان ها، توانها را مساوی می کنیم. $4^6 \times 5^9 = (4^2)^3 \times (5^3)^3 = 16^3 \times 125^3 = 2000^3$

ضرب و تقسیم

اعداد تواندار

★ هر عدد به توان منفی برابر است با معکوس آن عدد به توان مثبت.

$$\left(\frac{2}{7}\right)^{-9} = \left(\frac{7}{2}\right)^9 \quad 3^{-5} = \left(\frac{1}{3}\right)^5 \quad \text{مثال:}$$

مثال: حاصل عبارت $\frac{0/125^{-9} \times 128^{-10}}{32^{-13} \times 0/25^{-11}}$ برابر است با:

$$\frac{0/125^{-9} \times 128^{-10}}{32^{-13} \times 0/25^{-11}} = \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^{-9} \times (2^7)^{-10}}{(2^5)^{-13} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{-11}} = \frac{(2^{-3})^{-9} \times 2^{-70}}{2^{-65} \times (2^{-2})^{-11}} = \frac{2^{27} \times 2^{-70}}{2^{-65} \times 2^{22}} = \frac{2^{-43}}{2^{-43}} = 1$$

★ برای پیدا کردن حاصل جمع اعداد تواندار، اگر پایه ها و توانها مساوی بودند می توان آنها را به حاصل ضرب تبدیل کرد و جواب را به صورت یک عدد تواندار نوشت. اما اگر همهی پایه ها و توانها با هم برابر نبودند به شرط آنکه قسمت های مشترک (پایه مشترک با کوچک ترین توان) داشته باشند از فاکتورگیری می توان استفاده کرد.

مثال: حاصل عبارت های زیر را به صورت عدد تواندار بنویسید.

$$4^9 + 4^9 + 4^9 + 4^9 = 4 \times 4^9 = 4^{10} \quad \text{الف)}$$

$$\begin{aligned} 12 \times 2^9 + 10 \times 2^{10} + 12 \times 2^8 - 24 \times 2^7 - 2^{14} &= 2^7 (12 \times 2^2 + 10 \times 2^3 + 12 \times 2^1 - 24 - 2^7) = \\ \text{ب)} \quad 2^7 (48 + 80 + 24 - 24 - 128) &= 0 \end{aligned}$$

★ برای ساده کردن کسرهایی که صورت و مخرج آنها از جمع اعداد تواندار تشکیل شده اند از پایه مشترک با کوچک ترین توان (صورت جدا و مخرج هم جدا) فاکتور گرفته و سپس ساده می کنیم.

$$\text{مثال: حاصل عبارت } \frac{7^{2014} + 7^{2013} + 7^{2012} + \dots + 7^{1014}}{7^{1393} + 7^{1392} + 7^{1391} + \dots + 7^{393}} \text{ به صورت عدد تواندار برابر است با:}$$

$$\frac{7^{1014} (7^{1000} + 7^{999} + 7^{998} + \dots + 1)}{7^{393} (7^{1000} + 7^{999} + 7^{998} + \dots + 1)} = 7^{621} \quad \text{حل)}$$

★ برای پیدا کردن مجموع چند عبارت تواندار با پایه های مساوی که توانهای آنها اعداد متوالی باشند می توان کل عبارت را برابر یک حرف انگلیسی قرار داد و سپس دو طرف تساوی را در پایه مشترک آنها ضرب کرد و سپس این دو تساوی را از هم کم نمود و حاصل را به کمک معادله پیدا کرد.

$$1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \dots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} \quad \text{و یا از فرمول مقابل کمک می گیریم:}$$

$$\text{مثال: حاصل عبارت } 5^4 + 5^5 + 5^6 + \dots + 5^{97} \text{ را به دست آورید.}$$

$$\left. \begin{aligned} A &= 5^4 + 5^5 + 5^6 + \dots + 5^{97} \\ 5A &= 5^5 + 5^6 + 5^7 + \dots + 5^{98} \end{aligned} \right\} \Rightarrow 5A - A = 5^5 + 5^6 + 5^7 + \dots + 5^{98} - 5^4 - 5^5 - 5^6 - \dots - 5^{97} = 5^{98} - 5^4$$

$$\Rightarrow 4A = 5^{98} - 5^4 \Rightarrow A = \frac{5^{98} - 5^4}{4}$$

★ مجموع هر دنباله ی هندسی **نامتناهی** که هر جمله از ضرب عدد ثابت q که $0 < q < 1$ و یا $-1 < q < 0$ می باشد از فرمول زیر به دست می آید.

$$S = \frac{a_1}{1 - q} \quad (a_1 \text{ اولین جمله ی دنباله است.})$$

مثال: حاصل عبارت $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots$ برابر است با:

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

حل) از فرمول بالا: $a_1 = \frac{1}{2}, q = \frac{1}{2}$

روش دوم: با ضرب دو طرف تساوی در ۲ و سپس کم کردن دو طرف نیز می توان حاصل را پیدا کرد. (مانند مثال قبل)

★ در یک کسر که بین اعداد آن عمل ضرب وجود دارد می توانیم اعدادی را از صورت به مخرج و یا از مخرج به صورت ببریم به شرطی که **توان آنها را قرینه** کنیم.

مثال: حاصل عبارت $\frac{x^{-4}y^{-3}}{y^{-4}x^{-4}} \div \frac{(x^{-2}y^{-1})^3}{\left(\frac{x}{y}\right)^4}$ برابر است با

$$\frac{x^{-4}y^{-3}}{y^{-4}x^{-4}} \div \frac{(x^{-2}y^{-1})^3}{\left(\frac{x}{y}\right)^4} = \frac{x^{-4}y^{-3}}{y^{-4}x^{-4}} \times \frac{\left(\frac{x}{y}\right)^4}{(x^{-2}y^{-1})^3} = \frac{x^4y^4}{x^4y^3} \times \frac{\frac{x^4}{y^4}}{x^{-6}y^{-3}} = \frac{x^4y^4x^4}{x^4y^3x^{-6}y^{-3}y^4} =$$

$$\frac{x^8y^4}{x^{-2}y^4} = x^8x^2 = x^{10}$$

★ **عدد به توان کسر**: هر عدد به توان کسر برابر رادیکالی است که مخرج کسرفرجه رادیکال و صورت کسر توان آن عدد خواهد بود.

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

بود. (به شرط آنکه آن رادیکال تعریف شده باشد).

مثال: $5^{\frac{2}{7}} = \sqrt[7]{5^2}$

★ اگر پایه یک عدد تواندار عددی **منفی** باشد و **توان آن کسری** باشد که مخرجش زوج باشد عدد حقیقی نخواهد بود.

مثال: $(-3)^{\frac{5}{8}} = \sqrt[8]{(-3)^5}$

★ **معادله توانی**: معادله‌ای که مجهول آن در توانش باشد. برای حل معادله‌ی توانی کارهای زیر را انجام می دهیم.

ابتدا در دو طرف تساوی پایه ها را برابر می کنیم و سپس توانها را مساوی قرار می دهیم و معادله را حل می کنیم در بعضی از مسائل باید از فاکتور گیری نیز استفاده کنیم.

تذکر مهم: اگر پایه ها را نتوان مساوی قرار داد، آنگاه توانها را مساوی **صفر** قرار می دهیم و حل می کنیم.

مثال: در معادله $8^{4x+15} = 4^{3x+6} \times 2^{6x+3}$ مقدار x کد ام است؟

$$\begin{aligned} (1) \quad \frac{-10}{8} \quad (2) \quad \frac{-4}{5} \quad (3) \quad \text{بی شمار جواب دارد} \quad (4) \quad \text{جواب ندارد.} \\ 8^{4x+15} = 4^{3x+6} \times 2^{6x+3} \Rightarrow 2^{6x+3} \times (2^2)^{3x+6} = (2^3)^{4x+15} \Rightarrow 2^{6x+3} \times 2^{6x+12} = 2^{12x+45} \Rightarrow \\ 2^{12x+15} = 2^{12x+45} \Rightarrow 12x+15 = 12x+45 \Rightarrow 15 = 45 \end{aligned}$$

این غیر ممکن است و معادله جواب ندارد

مثال) در عبارت $3^{2x-y+1} = 5^{y+3}$ مقادیر x و y را پیدا کنید.

حل) چون پایه ها را نمی توان مساوی کرد پس توانها را برابر صفر قرار می دهیم در نتیجه:

$$\begin{cases} y+3=0 \\ 2x-y+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-3 \\ 2x-(-3)+1=0 \Rightarrow 2x=-4 \Rightarrow x=-2 \end{cases}$$

مثال) معادله توانی $6^{x-1} + 6^x = 252$ را حل کنید.

$$6^{x-1} + 6^x = 252 \Rightarrow 6^{x-1}(1+6) = 252 \Rightarrow 6^{x-1}(7) = 252 \Rightarrow 6^{x-1} = 252 \div 7 = 36 = 6^2 \Rightarrow x-1=2 \Rightarrow x=3$$

* مقایسه‌ی اعداد تواندار:

۱- مساوی کردن پایه ها با استفاده از **تجزیه** و سپس انجام عمل مقایسه.

مثال: کدامیک از اعداد زیر از بقیه کوچک تر است؟

$$\begin{aligned} \text{الف) } \checkmark 18 \times 3^8 \quad \text{ب) } 8 \times 64^3 \quad \text{ج) } 2048 \times 9^5 \quad \text{د) } 50 \times 625^2 \\ 18 \times 3^8 = 2 \times 3^2 \times 3^8 = 2 \times 3^{10} \quad 8 \times 64^3 = 2^3 \times (2^6)^3 = 2^3 \times 2^{18} = 2 \times 2^{20} = 2 \times 4^{10} \\ 2048 \times 9^5 = 2^{11} \times 3^{10} = 2 \times 2^{10} \times 3^{10} = 2 \times 6^{10} \\ 2 \times 5^2 \times (5^4)^2 = 2 \times 5^{10} \end{aligned}$$

۲- مساوی کردن توانها با استفاده از **«ب.م.م»** توانها، که توان را بر «ب.م.م» تقسیم می کنیم و جواب را داخل پرانتز به عنوان توان می نویسیم و «ب.م.م» را به عنوان **بیرونی ترین توان** می نویسیم.

تذکر مهم: در مورد اعداد بین صفر و یک هر چقدر توان بزرگتر باشد عدد کوچکتر است. و در مورد اعداد منفی اگر توان زوج باشد هر چقدر هم کوچکتر باشد از توان فرد بزرگ تر می شود.

$$\text{مثال: کدامیک از اعداد مقابل از بقیه بزرگ ترند؟} \quad (1) \quad 2^{107} \quad (2) \quad 3^{84} \quad (3) \quad 5^{64} \quad (4) \quad 7^{42}$$

مل) «ب م م» اعداد ۱۰۵ و ۸۴ و ۶۳ و ۱۴۲ پیدا می‌کنیم که عدد ۲۱ می‌شود و آن را به عنوان بیرونی ترین توان می‌نویسیم داریم:

$$\begin{aligned} 2^{107} &= 2^2 \times 2^{105} = 4 \times (2^5)^{21} = 4 \times 32^{21} \\ 3^{84} &= (3^4)^{21} = 81^{21} \\ 5^{64} &= 5 \times 5^{63} = 5 \times (5^3)^{21} = 5 \times 125^{21} \\ 7^{42} &= (7^2)^{21} = 49^{21} \end{aligned}$$

۳- برای مقایسه مجموع یا ضرب چند عبارت تواندار بعضی مواقع می‌توان از رابطه‌ی $2^n > n^2$ با شرط: $n \geq 5, n \in N$ یا از رابطه‌ی $4^n > n^4$ می‌توان استفاده کرد.

مثال: اگر دو عدد $A = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2$ و $B = 1^1 + 2^2 + 3^3 + \dots + 10^{10}$ را باهم مقایسه کنیم کدام گزینه درست است؟

(۱) A (۲) B (۳) $A = B$ (۴) قابل مقایسه نیست

مل) طبق رابطه‌های بالا می‌دانیم $2^{10} > 10^2$ و $2^9 > 9^2$ و $2^8 > 8^2$ و ... و $2^5 > 5^2$ بقیه توانها به جز $2^3 < 3^2$ یا مساویند یا مثل موارد قبلی بزرگترند پس در نتیجه B بزرگتر است.

★ **عدد مربع کامل:** هرگاه در تجزیه‌ی یک عدد به عوامل اول، توان عاملها عددی زوج باشد آن عدد مربع کامل است.

مثال: کوچک ترین عدد طبیعی که وقتی آن را در عدد $3^{11} \times 2^5 \times 7^4$ ضرب کنیم مربع کامل شود؟

مل باید توانهای عامل ها زوج شود پس در 2×3 باید ضرب کنیم.

★ **عدد مکعب کامل:** هرگاه در تجزیه‌ی یک عدد به عوامل اول، توان عاملها مضرب ۳ باشد آن عدد مکعب کامل است.

مثال: عدد $5^6 \times 7^3$ یک عدد مکعب کامل است.

تذکر مهم: عدد یک، هم مربع کامل است و هم مکعب کامل.

★ اعدادی که **مربع کاملند** همیشه تعداد شمارنده هایشان عددی **فرد** است.

★ اعدادی که **مربع کاملند** رقم یکانشان، هیچ گاه ۲ یا ۳ یا ۷ یا ۸ نمی شود.

★ حاصل ضرب هیچ دو عدد طبیعی متوالی مجذور کامل نیست.

★ اولین عدد **مربع کامل** بعد از عدد مربع کامل n عدد $(\sqrt{n} + 1)^2$ می‌باشد که برابر است با: $(\sqrt{n} + 1)^2 = n + 2\sqrt{n} + 1$

مثال: اولین عدد مربع کامل بعد از 9^{19} چه عددی است؟

$$(\sqrt{9^{19}} + 1)^2 = (3^{19} + 1)^2 = (3^{19})^2 + 2(3^{19}) + 1$$

★ k آمین عدد مربع کامل بعد از عدد مربع کامل n ، عدد $(\sqrt{n} + k)^2$ می‌باشد که برابر است با:

$$(\sqrt{n} + k)^2 = n + 2k\sqrt{n} + k^2$$

مثال: هفتمین عدد مربع کامل بعد از 9^{19} چه عددی است؟

$$(\sqrt{9^{19}} + 7)^2 = (3^{19} + 7)^2 = (3^{19})^2 + 14(3^{19}) + 49$$

★ برای پیدا کردن اعداد مربع کامل در بین یک **سری از اعداد منظم** باید اولین عددی که مربع کامل است و آخرین عددی که مربع کامل است را پیدا کرده و با توان ۲ بنویسیم و سپس این دو عدد را (بدون توان ۲) از هم کم کرده و به اضافه ۱ کنیم.

تذکر: برای پیدا کردن تعداد اعداد مکعب کامل باید اولین عدد مکعب کامل و آخرین عدد مکعب کامل را پیدا کرده و آنها را با توان ۳ بنویسیم و سپس مثل بالا عمل کنیم.

مثال: در بین اعداد $9^5, \dots, 3, 4^5 + 2, 4^5 + 1, 4^5$ چند عدد مربع کامل وجود دارد؟

حل) اولین عدد مربع کامل عدد 4^5 است که با توان ۲ به صورت $(2^5)^2 = (2^2)^5 = 2^{10}$ نوشته می شود و آخرین عدد مربع کامل نیز 9^5

می باشد که با توان ۲ به صورت $(3^5)^2 = (3^2)^5 = 3^{10}$ نوشته می شود بنابراین تعداد اعداد مربع کامل در این مجموعه برابر است با:

$$243 - 32 + 1 = 212$$

مثال) چند عدد از اعداد از ۱ تا 1392^{1392} هم مربع کامل و هم مکعب کاملند؟

حل) باید اعداد با توان ۶ را پیدا کنیم. این اعداد عبارتند از $1, 6^6, 12^6, 18^6, 24^6, \dots, (1392^{222})^6$ که تعداد این اعداد عبارتند از:

$$(1392^{222})^6 - 1 + 1 = 1392^{222}$$

★ اگر n عددی زوج باشد عدد n^n مربع کامل است و اگر n فرد باشد عدد n^n به شرطی مربع کامل می شود که عدد n مربع کامل باشد.

مثال: اعداد $1, 8^8, 27^8, 64^8, 125^8, \dots$ و $1, 9^9, 27^9, 81^9, \dots$ مربع کاملند.

مثال) به ازای چند عدد طبیعی n و $1 \leq n \leq 200$ عدد n^n مربع کامل است؟ (۱) ۷ (۲) ۱۰۰ (۳) ۱۰۷ ✓ (۴) ۱۱۴

رقم یکان اعداد تواندار:

★ برای تعیین رقم یکان اعداد توانداری که یکان آنها رقم های ۲ و ۳ و ۷ و ۸ می باشد توان عدد را بر ۴ تقسیم می کنیم و سپس یکان عدد را به توان باقیمانده این تقسیم می رسانیم.

تذکر مهم: اگر باقیمانده صفر شود رقم یکان برابر است با یکان عدد به توان ۴

مثال: رقم یکان حاصل عبارت $۱۳۴۸^{۲۴۸} + ۱۳۸۷^{۱۲۵} + ۱۳۹۳^{۵۱۴} + ۱۳۹۲^{۴۳}$ چه عددی است؟

حل: رقم یکان تک تک اعداد را پیدا کرده و با هم جمع می‌کنیم.

$$\begin{array}{r} 43 \\ \times 4 \\ \hline 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 514 \\ \times 4 \\ \hline 128 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 125 \\ \times 4 \\ \hline 31 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 248 \\ \times 4 \\ \hline 62 \end{array}$$

$$۲^۳ = ۸ \text{ یکان}$$

$$۳^۲ = ۹ \text{ یکان}$$

$$۷^۱ = ۷ \text{ یکان}$$

$$۸^۴ = ۴۰۹۶ \Rightarrow ۶ \text{ یکان}$$

پس یکان حاصل برابر است با: $۸ + ۹ + ۷ + ۶ = ۳۰$ یعنی صفر می‌شود.

★ برای تعیین رقم یکان اعداد توانداری که یکان آنها رقم های ۴ و یا ۹ باشد. با توجه به زوج و فرد بودن توانشان مشخص می‌کنیم. یعنی اگر توان عدد فرد بود یکان عدد همان رقم ۴ و یا ۹ می‌شود ولی اگر توان زوج بود و یکان رقم ۴ بود یکان حاصل، عدد ۶ می‌شود و اگر یکان عدد رقم ۹ بود یکان حاصل، عدد ۱ خواهد شد.

مثال: رقم یکان حاصل عبارت $۱۳۹۴^{۷۴۱} + ۱۹۹۹^{۲۸۲}$ چه عددی می‌شود؟

حل: چون ۷۴۱ عددی فرد است یکان $۱۳۹۴^{۷۴۱}$ رقم ۴ می‌شود و چون ۲۸۲ زوج است یکان $۱۹۹۹^{۲۸۲}$ رقم ۱ می‌شود و در نتیجه رقم یکان حاصل $۴ + ۱ = ۵$ می‌شود.

★ اگر یکان عددی یکی از رقم های ۰، ۱، ۵ یا ۶ باشد و به توان برسد یکان آن **خودش** می‌شود.

★ اگر **دورقم سمت راست عددی ۰۱ باشد به هر توانی که برسد باز هم دورقم سمت راست ۰۱ می‌شود.**

★ اگر یکان عددی که مربع کامل است ۵ باشد، دهگان آن هتماً ۲ خواهد بود.

★ **تعداد صفرهای سمت راست عددتواندار:**

ابتدا عدد را به عامل های اول تجزیه می‌کنیم و سپس در صورت داشتن عامل های ۵ و ۲ (چون $۵ \times ۲ = ۱۰$ میشود یعنی یک صفر تولید می‌کند) توانهای ۲ و ۵ را مشخص می‌کنیم آنکه کمتر بود تعداد صفرهای سمت راست عدد را مشخص می‌کند.

مثال: حاصل ضرب $۵۵^۷ \times ۱۵^۶ \times ۲۸^۵$ به چند صفر ختم می‌شود؟ ۱۰ صفر زیرا:

$$(۲^۲ \times ۷)^۵ \times (۳ \times ۵)^۶ \times (۱۱ \times ۵)^۷ = ۲^{۱۰} \times ۷^۵ \times ۳^۶ \times ۵^۶ \times ۱۱^۷ \times ۵^۷ = ۲^{۱۰} \times ۵^{۱۰} \times ۵^۳ \times ۷^۵ \times ۳^۶ \times ۱۱^۷ = ۱۰^{۱۰} \times \dots$$

★ **تعداد رقمهای یک عدد:**

با استفاده از روش های زیر می‌توان تعداد رقمهای حاصل ضرب اعداد و یا اعداد تواندار را پیدا کرد.

روش اول: مانند نکته قبل ابتدا تعداد صفرهای سمت راست عدد را مشخص می‌کنیم سپس عاملهای باقیمانده و بقیه توانها را نیز جداگانه حساب می‌کنیم و در آخر تعداد رقمهای حاصل را با تعداد صفرهای سمت راست عدد جمع می‌زنیم.

مثال: تعداد ارقام حاصل ضرب $5^{104} \times 4^{52}$ برابر است با:

$$5^{104} \times 4^{52} = 5^{104} \times (2^2)^{52} = 5^{104} \times 2^{104} = 10^{104} = \overbrace{1000 \dots 0}^{104} \Rightarrow 1 + 104 = 105 \text{ رقم}$$

روش دوم: اگر عددی بین 10^n و 10^{n+1} قرار داشته باشد. آنگاه آن عدد $n+1$ رقمی است.

مثال: اگر بدانیم 3^{40} بین دو عدد 10^{20} و 10^{19} قرار دارد می توانیم نتیجه بگیریم که 3^{40} یک عدد 20 رقمی است.

روش سوم: اگر بتوانیم عدد تواندار داده شده را به صورت توانی از عدد ۲ بنویسیم آنگاه می توانیم 2^{10} را تقریباً 1000 در نظر بگیریم و تعداد رقمهای عدد را محاسبه کنیم.

مثال: اگر مقدار عدد 2^{40} را مناسبه کنیم چند رقمی می شود؟

$$2^{40} = (2^{10})^4 \approx (1000)^4 = (10^3)^4 = 10^{12} = 1000000000000 \Rightarrow 13 \text{ رقمی است}$$

روش چهارم: اگر تعداد رقمهای حاصل ضرب دو عدد صحیح را خواسته باشند می توان ابتدا آنها را به صورت نماد علمی نوشت و سپس دو عدد را تا یک رقم اعشار در هم ضرب کرد و در آخر تعداد رقم های این حاصل ضرب را با توانهای عدد ۱۰ با هم جمع کرد.

$$932569842 \times 98678278 = 9/3 \times 10^8 \times 9/8 \times 10^7 = 91/14 \times 10^{15}$$

مثال: حاصل عبارت مقابل چند رقمی می شود؟

۱۳ تا صفر

$$91/14 \times 10^{15} = 9114 \times 10^{13} = 9114 \overbrace{000 \dots 0}^{13} \text{ پس}$$

* مجموع رقمهای یک عدد تواندار:

مانند نکته ی قبل عمل کرده تعداد رقمها را مشخص می کنیم و در آخر مجموع رقمها را به دست می آوریم.

مثال: مجموع ارقام حاصل ضرب $5^{104} \times 4^{52}$ برابر است با:

$$5^{104} \times 4^{52} = 5^{104} \times (2^2)^{52} = 5^{104} \times 2^{104} = 10^{104} = 1000 \dots 0 \Rightarrow 1 + 0 + 0 + 0 + \dots + 0 = 1$$

* اگر عددی بخواهد **مضربی از ۱۰** باشد اولاً باید عملهای ۲ و ۵ را با هم داشته باشد و ثانياً توانهای این دو عامل (۵ و ۲) صفر یا کسری و یا منفی نباشند.

مثال: به ازای چند مقدار صحیح n عدد $4^{n+3} \times 25^{2-n}$ مضرب ۱۰ می باشد؟ ۴ مقدار صحیح

$$4^{n+3} \times 25^{2-n} = (2^2)^{n+3} \times (5^2)^{2-n} = 2^{2n+6} \times 5^{4-2n} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} 2n+6 > 0 &\Rightarrow 2n > -6 \Rightarrow n > -3 \\ 4-2n > 0 &\Rightarrow 4 > 2n \Rightarrow n < 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -3 < n < 2$$

★ اگر دو عدد به صورت $x \times a^b$ و $y \times a^b$ داشته باشیم و بخواهیم عددی بین آنها پیدا کنیم کافیه عددی طبیعی بین x و y پیدا کنیم و در a^b ضرب کنیم. (یعنی باید قسمت تواندار هر دو عدد را به صورتی بنویسیم که پایه هایشان باهم برابر و توان های آنها با هم برابر باشد).

مثال: کدام گزینه بین 7^{18} و 7^{19} قرار دارد و بر ۸ بخشپذیر است؟

$$(1) \quad 7^{17} + 7^{18} \quad (2) \quad 7^{18} + 7^{18} \quad (3) \quad 64 \times 7^{17} \quad (4) \quad 56 \times 7^{17}$$

$$(1) \quad 7^{17} + 7^{18} = 7^{17}(1+7) = 7^{17} \times 8 \quad \text{حل) با بررسی گزینه ها داریم:}$$

$$\text{بر ۸ بخشپذیر نیست} \quad 7^{18} + 7^{18} = 7^{18}(1+1) = 7^{18} \times 2 \quad \text{بین } 7^{18} \text{ و } 7^{19} \text{ نیست} \quad 64 \times 7^{17} = 8^2 \times 7^{17} > 7^{19}$$

$$\text{بین } 7^{18} \text{ و } 7^{19} \text{ نیست} \quad 56 \times 7^{17} = 8 \times 7 \times 7^{17} = 8 \times 7^{18}$$

مثال) کدام یک از اعداد زیر بین 3^{19} و 3^{20} قرار ندارد؟

$$(1) \quad 7 \times 3^{18} \quad (2) \quad 111 \times 3^{15} \quad (3) \quad \frac{2}{5} \times 3^{20} \quad (4) \quad 27 \times 3^{16}$$

★ اگر کاغذی را n بار فقط به صورت افقی یا فقط به صورت عمودی تا بزنیم تعداد خطوط ایجاد شده روی آن $2^n - 1$ می باشد.

★ اگر هر دو کار بالا را باهم انجام دهیم یعنی مثلا m بار افقی و n بار عمودی تا بزنیم تعداد خطوط ایجاد شده برابر است با:

$$(2^m - 1) + (2^n - 1)$$

مثال) اگر کاغذی را ۷ بار به صورت افقی و ۲ بار به صورت عمودی تا بزنیم تعداد خطوط ایجاد شده روی آن چند تا است؟

$$(2^m - 1) + (2^n - 1) = 2^7 - 1 + 2^2 - 1 = 128 - 1 + 4 - 1 = 130$$

نکته: اگر اعداد طبیعی کمتر از n را در نظر بگیریم و تعداد سوالهایی که باید بپرسیم تا به جواب برسیم را n فرض کنیم (جواب بله یا خیر) آنگاه n را می توان از رابطه ی $2^{n-1} \leq a \leq 2^n$ به دست آورد.

مثلا اگر $a = 50$ باشد داریم $2^5 \leq 50 \leq 2^6$ یعنی با ۶ سوال می توانیم به جواب برسیم.

نکته: اگر n سکه داشته باشیم که یکی از آنها تقلبی باشد و بخواهیم با حداقل n با وزن کردن سکه تقلبی را پیدا کنیم n از رابطه ی $3^{n-1} < a \leq 3^n$ به دست می آید.

مثلا برای $a = 20$ داریم: یعنی حداقل با ۳ بار وزن کردن می توان سکه تقلبی را پیدا کرد $n = 3 \Rightarrow 3^3 \leq 20 < 3^4$

روش عدد گذاری برای حل سریع بعضی تستها

در مسائلی که هم صورت سوال و هم گزینه ها شامل متغیر باشند ویا برای پیدا کردن حاصل یک عبارت تواندار که شامل متغیر باشد از این روش می توانید استفاده کنید برای این منظور کافیست یک عدد مناسب به جای متغیر قرار بدهید و حاصل را بر حسب عدد داده شده به دست آورید سپس همان عدد را در هر یک از گزینه ها قرار دهید و مقدار آنها را نیز حساب کنید هر کدام از گزینه ها مقدارش با مقدار عبارت داخل سوال یکی شد همان گزینه ، جواب مورد نظر است.

تذکر مهم: عددی که به جای متغیر قرار می دهید نباید به گونه ای باشد که جواب همه گزینه ها یکسان شود. برای مهارت پیدا کردن در این زمینه باید تمرین زیاد داشته باشید. اگر جواب چند تا از گزینه ها یکسان شد با اعداد دیگری نیز امتحان کنید و هرگزینه ای که حاصلش با حاصل خود عبارت یکسان نشد آنرا حذف کنید و این کار را تکرار کنید تا فقط به یک گزینه برسید که حاصلش با حاصل عبارت داده شده برابر شود.

مثال: نصف عدد 4^{2a-4} برابر است با: (۱) 2^{2a-6} (۲) 2^{2a-5} (۳) 2^{4a-9} (۴) 2^{4a-5}

حل) با روش معمولی باید 4^{2a-4} تقسیم بر ۲ کرده و سپس پایه ها را برابر کنیم تا به جواب برسیم اما به روش عدد گذاری داریم:

مثلا به جای متغیر a عدد ۳ را قرار میدهم داریم: $4^{2 \times 3 - 4} \div 2 = 4^{2 \times 3 - 4} \div 2 = 4^2 \div 2 = 8$ حالا به جای a در هر یک از گزینه ها نیز عدد ۳ را قرار می دهیم حاصل هر گزینه ای که ۱۶ شد جواب تست همان گزینه خواهد بود.

$$(1) \quad 2^{2a-6} = 2^{2 \times 3 - 6} = 2^0 = 1$$

$$(2) \quad 2^{2a-5} = 2^{2 \times 3 - 5} = 2^1 = 2$$

$$(3) \quad 2^{4a-9} = 2^{4 \times 3 - 9} = 2^3 = 8$$

$$(4) \quad 2^{4a-5} = 2^{4 \times 3 - 5} = 2^7 = 128$$

حالا شما سوالهای زیر را با همین روش حل کنید.

۱- اگر $x^3 = p$ باشد حاصل $x^{3^{j-1}}$ کدام است؟ (۱) $p^{9^{j-1}}$ (۲) $p^{3^{j-2}}$ (۳) $x^{9^{j-9}}$ (۴) $x^{3^{j-3}}$

۲- حاصل عبارت $\frac{7^{2n-3} \times 4^{n+1}}{7^{\frac{n-3}{2}} \times 4^{n+2}}$ کدام است؟ (۱) ۶۴ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۱۶

جذر و ریشه

★ هر عدد حقیقی مثبت دارای دو ریشه n ام زوج می باشد. (به جز صفر که فقط یک ریشه ی زوج دارد.)

★ هر عدد حقیقی دارای یک ریشه n ام فرد است.

★ اگر n زوج باشد ریشه ی n ام a^n برابر $|a|$ می شود.

$$\sqrt[n]{a^n} = |a| \quad (a \in E)$$

★ ریشه های اعداد بین صفر و یک، بزرگتر از خود آن اعداد و ریشه های اعداد بزرگتر از یک، کوچکتر از خود آن اعداد هستند.

✱ اعداد منفی ریشه‌ی زوج ندارند. مثلاً $\sqrt{-۶}$ و $\sqrt[۴]{-۲۰}$ و $\sqrt[n]{-۱}$ ریشه ندارند

✱ برای **جذر گرفتن** از اعداد تواندار دو روش وجود دارد:

(۱) پایه را تغییر نداده و **توان را نصف** کنیم.

مثال: حاصل $\sqrt{۴^{-۴۰}}$ برابر است با: (۱) $۴^{-۲۰}$ (۲) $۴^{-۴۰}$ (۳) $۴^{-۱۰}$ (۴) $-۴^{۲۰}$

توان را نصف می‌کنیم. $\sqrt{۴^{-۴۰}} = ۴^{-۴۰ \div ۲} = ۴^{-۲۰}$

(۲) توان را تغییر نداده و **جذر پایه** را بگیریم.

مثال: پذیر عدد ۴ عدد ۲ می‌شود پس: $\sqrt{۴^{-۴۰}} = ۲^{-۴۰}$

نکته: جمع و تفریق رادیکال‌ها را به شرطی می‌توان انجام داد که فرجه و عبارت زیر رادیکالها با هم برابر باشد. (مانند عبارت‌های جبری می‌گوییم با هم متشابه باشند).

$$۵\sqrt[۳]{۷} - ۲\sqrt[۳]{۷} = ۳\sqrt[۳]{۷} \quad (\text{مثال})$$

✱ قبل از جمع و تفریق رادیکال‌ها ابتدا در صورت امکان عدد زیر رادیکال را تجزیه یا به ضرب تبدیل کرده آن را ساده و سپس عبارت‌های متشابه را با هم جمع و یا تفریق می‌کنیم.

مثال: مقدار عبارت $\sqrt{۴۵} - ۲\sqrt{۵} - ۳\sqrt{۱۲۵} + \sqrt{۲۰}$ برابر است با:

$$\begin{aligned} & (۱) ۱۰\sqrt{۵} \quad (۲) ۱۲\sqrt{۵} \quad (۳) -۱۲\sqrt{۳} \quad (۴) -۱۰\sqrt{۲} \\ & \sqrt{۲۰} + ۳\sqrt{۱۲۵} - ۲\sqrt{۵} - \sqrt{۴۵} = \sqrt{۴ \times ۵} + ۳\sqrt{۲۵ \times ۵} - ۲\sqrt{۵} - \sqrt{۹ \times ۵} = ۲\sqrt{۵} + ۱۵\sqrt{۵} - ۲\sqrt{۵} - ۳\sqrt{۵} = ۱۲\sqrt{۵} \end{aligned}$$

✱ برای به دست آوردن حاصل عبارت‌هایی که شامل چند رادیکال تو در تو باشند باید از داخلی‌ترین رادیکال شروع کنیم.

مثال: مقدار عبارت $\sqrt{۱+۲۰۰\sqrt{۱+۲۰۰\sqrt{۱+۲۰۰۲\sqrt{۱+۲۰۰۳ \times ۲۰۰۵}}}}$ برابر است با: (مسابقات جهانی ریاضی)

$$(۱) ۲۰۰۰ \quad (۲) ۲۰۰۱ \quad (۳) ۲۰۰۲ \quad (۴) ۲۰۰۳ \quad (۵) ۲۰۰۴$$

حل:

$$\begin{aligned} \sqrt{۱+۲۰۰\sqrt{۱+۲۰۰\sqrt{۱+۲۰۰۲\sqrt{۱+۲۰۰۳ \times ۲۰۰۵}}}} &= \sqrt{۱+۲۰۰\sqrt{۱+۲۰۰\sqrt{۱+۲۰۰۲\sqrt{(۲۰۰۴-۱)(۲۰۰۴+۱)}}}} = \\ \sqrt{۱+۲۰۰\sqrt{۱+۲۰۰\sqrt{۱+۲۰۰۲\sqrt{(۲۰۰۴)^۲-۱}}}} &= \sqrt{۱+۲۰۰\sqrt{۱+۲۰۰\sqrt{۱+(۲۰۰۳-۱)(۲۰۰۳+۱)}}} = \\ \sqrt{۱+۲۰۰\sqrt{۱+۲۰۰\sqrt{۱+۲۰۰۳^۲-۱}}} &= \sqrt{۱+۲۰۰\sqrt{۱+۲۰۰۱ \times ۲۰۰۳}} = \sqrt{۱+۲۰۰\sqrt{۱+(۲۰۰۲-۱)(۲۰۰۲+۱)}} = \\ \sqrt{۱+۲۰۰\sqrt{۱+۲۰۰۱^۲-۱}} &= \sqrt{۱+۲۰۰ \times ۲۰۰۱} = \sqrt{۲۰۰۱^۲} = ۲۰۰۱ \end{aligned}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}}} = \sqrt[m \times n \times p]{a}$$

★ برای پیدا کردن رادیکال های تو در تو به شکل مقابل داریم:

★ هرگاه بخواهیم ضریب یک رادیکال را به داخل رادیکال ببریم باید ضریب را به توان فرجه رسانده و در عبارت زیر رادیکال ضرب کنیم.

تذکر مهم: در این حالت دقت کنید که علامت حاصل تغییر نکند.

$$a^n \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$$

$$\sqrt[3]{4\sqrt{3}} = \sqrt[3]{\sqrt{4^2} \times 3} = \sqrt[6]{48}$$

مثال: حاصل $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$ چه عددی می شود؟

★ **عبارت های رادیکالی نامتناهی:** برای پیدا کردن حاصل عبارت های رادیکالی نامتناهی از روش A استفاده می کنیم به این صورت که کل عبارت را مساوی A قرار داده و سپس دو طرف را به توان فرجه می رسانیم و سپس آن قسمتی از عبارت را که شبیه کل عبارت است دوباره برابر A قرار داده و با کمک معادله مقدار A را حساب می کنیم.

مثال: حاصل عبارت $2\sqrt{3+2\sqrt{3+2\sqrt{3+2\sqrt{\dots}}}}$ کدام است؟

$$(1) \quad 4\sqrt{3} \quad (2) \quad 6 \quad (3) \quad 2\sqrt{6} \quad (4) \quad 6\sqrt{2}$$

$$A = 2\sqrt{3+2\sqrt{3+2\sqrt{3+2\sqrt{\dots}}}} \Rightarrow A^2 = 4 \left(3 + \underbrace{2\sqrt{3+2\sqrt{3+2\sqrt{3+2\sqrt{\dots}}}}}_{A} \right) = 12 + 4A \Rightarrow A^2 = 12 + 4A$$

$$\Rightarrow A^2 - 4A - 12 = 0 \Rightarrow (A-6)(A+2) = 0 \Rightarrow A = 6 \quad \text{یا} \quad A = -2 \quad \text{غیر قابل قبول}$$

مثال: کدام رابطه در مورد عبارت $M = \sqrt{7\sqrt{7\sqrt{7\sqrt{7\sqrt{\dots}}}}}$ درست است؟ (حل به عهده دانش آموز)

$$(1) \quad M^2 = 49M \quad (2) \quad M^2 = 7M \quad (3) \quad M^2 = M \quad (4) \quad M^2 = 343M$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

توان کسری: اگر $\sqrt[n]{a^m}$ در مجموعه اعداد حقیقی تعریف شده باشد می توان نوشت:

$$(-216)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(-216)^2} = (-6)^2 = 36$$

مثال:

★ می توان **فرجه** را با **توان** عدد زیر رادیکال ساده کرد به شرط آنکه پس از ساده شدن، حاصل عبارت تعریف شده باشد. (زیر رادیکال با فرجه زوج منفی نشود) و علامت عبارت زیر رادیکال حفظ شود و تغییر نکند.

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[kn]{a^{km}}$$

$$\sqrt[2]{2^7} = 2^{1 \div \sqrt[7]{2^{7 \div 7}}} = \sqrt[7]{2}$$

$$\sqrt{8} \times \sqrt[6]{8} = \sqrt{8} \times \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{8} \times \sqrt[6 \div 3]{2^{3 \div 3}} = \sqrt{8} \times \sqrt{2} = \sqrt{16} = 4$$

گویا کردن مخرج کسرها :

★ الف) مخرج کسر $\frac{B}{\sqrt[n]{a^m}}$ را به شرط آنکه $a \neq 0$ و $m < n$ را با ضرب صورت و مخرج آن در $\sqrt[n]{a^{n-m}}$ به عددی گویا تبدیل کرد.

مثال: حاصل $\frac{6}{5\sqrt[5]{3^2}}$ برابر است با: (۱) $\frac{2}{5}$ (۲) $\frac{2\sqrt[5]{3^3}}{5}$ (۳) $\frac{2}{5} \times \sqrt[5]{27}$ (۴) $10 \times \sqrt[5]{27}$

$$\frac{6}{5\sqrt[5]{3^2}} = \frac{6}{5\sqrt[5]{3^2}} \times \frac{\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^3}} = \frac{6\sqrt[5]{3^3}}{5\sqrt[5]{3^5}} = \frac{6\sqrt[5]{3^3}}{5 \times 3} = \frac{2\sqrt[5]{3^3}}{5} = \frac{2}{5}\sqrt[5]{27}$$

★ ب) برای گویا کردن مخرج کسرهایی که مخرج آنها از **مجموع یا تفاضل** دو یا چند رادیکال تشکیل شده اند کافیست صورت و مخرج آن را در **مزدوج مخرج** ضرب کنیم.

مثال: معکوس کسر $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ کدام گزینه است؟ (تیزهوشان)

(۱) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (۳) $\frac{1}{\sqrt{5}-1}$ (۴) $\frac{1}{\sqrt{5}+1}$

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2} \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{2}{\sqrt{5}+1} \times \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1} = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{5-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

★ اعداد متوالی هر چقدر که **بزرگتر** شوند **حاصل اختلاف جذر هایشان کمتر** می شود.

مثال: $\sqrt{8} - \sqrt{7} < \sqrt{6} - \sqrt{5}$

★ در عبارت های رادیکالی که در صورت و مخرج جمع یا تفریق رادیکالها قرار دارد می توان با فاکتور گیری آن را ساده کرد.

مثال: حاصل عبارت $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6} + \sqrt{8} + 2}{\sqrt{3} + \sqrt{6} + \sqrt{12} + 3}$ برابر است با:

$$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6} + \sqrt{8} + 2}{\sqrt{3} + \sqrt{6} + \sqrt{12} + 3} = \frac{\sqrt{2}(1 + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{2})}{\sqrt{3}(1 + \sqrt{2} + \sqrt{4} + \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

رادیکال مرکب خاص :

★ در رادیکال مرکب $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$ با فرض آنکه $A^2 - B$ مربع کامل باشد و با فرض $C = \sqrt{A^2 - B}$ داریم: