

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}}$$

تذکر مهم: این گونه عبارت ها را با کمک تجزیه با اتحاد مربع دو جمله ای $(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})^2 = a + b \pm 2\sqrt{ab}$ می توان تجزیه کرد. که در فصل پنجم در قسمت تجزیه توضیح کامل این روش داده شده است.

مثال: ساده شده رادیکال $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ برابر است با:

$$(1) \quad 2 + \sqrt{3} \quad (2) \quad -2 - \sqrt{3} \quad (3) \quad 2 - \sqrt{3} \quad (4) \quad -2 + \sqrt{3}$$

حل) $B = 48 \Rightarrow B = 48 \Rightarrow \sqrt{48} = \sqrt{4^2 \times 3} = 4\sqrt{3} = \sqrt{7-4\sqrt{3}}$ پس $7^2 - 48 = 1$ مربع کامل است در نتیجه $1 = \sqrt{1} = C$ بنابراین داریم:

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}} \Rightarrow \sqrt{7-4\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{7+1}{2}} - \sqrt{\frac{7-1}{2}} = \sqrt{4} - \sqrt{3} = 2 - \sqrt{3}$$

عبارت های جبری

یک جمله ای: ساده ترین نوع عبارت های جبری است که به صورت ضرب یک عدد حقیقی در توانهای صحیح و نامنفی از یک یا چند متغیر می باشد.

تذکره ۱: اگر در عبارتی حروف (متغیرها) در توان، در مخرج یا در قدر مطلق و یا در زیر رادیکال باشند و یا توان آنها منفی باشد. آن عبارت یک جمله ای نیست.

تذکره ۲: اعداد حقیقی یک جمله ای محسوب می شوند. مانند: $\sqrt{2}$ و $-\frac{3}{4}$ و π

جملات متشابه: جملاتی که قسمت حرفی و توان حروف آنها با هم برابر باشد.

***** درجه یک چند جمله ای: در چند جمله ای ها درجه نسبت به یک متغیر عبارت است از بزرگ ترین توان آن متغیر در تمام جمله های آن چند جمله ای.

مثال: درجه چند جمله ای $x^{10} + (x^2 + x^5 + 7)^5 (x^4 + 3x^2 + 5x - x^3)^3$ چقدر است؟

$$(1) \quad 10 \quad (2) \quad 17 \quad (3) \quad 35 \quad (4) \quad 37$$

حل) بزرگترین توان هر پوانت را پیدا کرده و به توان بیرون پوانت می رسانیم و چون بین دو پوانت ضرب است توان آنها را جمع می کنیم.

$$(x^4)^3 \times (x^5)^5 = x^{12} \times x^{25} = x^{37}$$

★ **چند جمله ای متقارن:** چند جمله ای که با هر تبدیل چرخشی تغییر نکند.

مثال: عبارت $2x^3 + 2y^3 + 1$ نسبت به x و y متقارن است. زیرا با جابجا کردن x و y عبارت تغییر نمی کند.

$$2x^3 + 2y^3 + 1 \longrightarrow 2y^3 + 2x^3 + 1$$

★ **چند جمله ای همگن:** اگر همه ی جمله های یک چند جمله ای با یک دیگر هم درجه باشند به آن چند جمله ای همگن یا متجانس می گویند.

مثال: درپند جمله ای $t^7 + 2y^7 - 2x^6y - 2x^3y^4 + 7x^3y^4$ همه جمله ها دارای درجه ۷ هستند پس همگن است.

★ **چند جمله ای استاندارد:** چند جمله ای که بر حسب توانهای نزولی متغیرمورد نظرش مرتب شده باشد.

★ در ضرب جملات جبری در هم می توان تعداد جملات هر پرانتز را پیدا کرد و سپس در هم ضرب نمود تا تعداد جملات حاصل جمع را مشخص کنیم.

★ هر گاه صورت کسری صفر باشد به شرط صفر نبودن مخرج، حاصل کسر همواره صفر است.

$$\frac{(2016-x)(2015-x)(2014-x)\dots(1357-x)}{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 2016^2} = \text{مثال: مقدار کسر مقابل به ازای } x = 1394 \text{ پیدا کنید}$$

$$\frac{(2016-x)(2015-x)(2014-x)\dots(1357-x)}{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 2016^2} = \frac{(2016-1394)(2015-1394)\overbrace{\dots(1394-1394)}^{\text{صفر}}\dots(1357-1394)}{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 2016^2} = 0$$

★ هرگاه مجموع دو یا چند عبارت نامنفی، برابر صفر باشد هر یک از آن عبارت ها برابر صفر است.

$$\text{مثال: در صورتی که برانیم } (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0 \text{ آنگاه حاصل } \frac{a}{b+c} \text{ چند است؟}$$

حل) چون حاصل جمع چند عبارت که هر کدام نامنفی هستند صفر شده است. تک تک عبارت ها باید صفر باشند پس

$$a-b=0, b-c=0, c-a=0 \Rightarrow a=b=c \Rightarrow \frac{a}{b+c} = \frac{a}{a+a} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

★ هرگاه حاصل ضرب چند عبارت صفر باشد حداقل باید یکی از آن عبارت ها باید صفر باشد.

$$\text{مثال: } (3a-6)(2b+4)=0 \Rightarrow \begin{aligned} 3a-6=0 &\Rightarrow a=2 \\ 2b+4=0 &\Rightarrow b=-2 \end{aligned}$$

★ اگر $n \in \mathbb{Z}$ باشد به شرط تعریف شدن $(a-b)^{2n}$ همواره داریم: $(a-b)^{2n} = (b-a)^{2n}$

یعنی هر عبارت وقرینه اش وقتی به توان عددی زوج برسند با هم برابرند.

مثال) حاصل $(a-b)^{200} - (b-a)^{200}$ برابر است با:

(۱) $2a^{200} - 2b^{200}$ (۲) $b^{200} - a^{200}$ (۳) صفر (۴) $2(a-b)^2$

حل) با توجه به نکته بالا $(a-b)^{200} = (b-a)^{200}$ است پس در نتیجه حاصل برابر صفر می شود.

★ هرگاه مجموع دو عدد حقیقی مثبت مقدار ثابتی باشد بیشترین مقدار برای حاصل ضرب آنها در صورتی حاصل می شود که دو عدد باهم برابر باشند. در صورت متمایز بودن دو عدد بیشترین مقدار برای حاصل ضرب آنها در صورتی حاصل می شود که آن دو عدد کمترین اختلاف را داشته باشند.

★ هرگاه حاصل ضرب دو عدد حقیقی مقدار ثابتی باشد. مجموع آنها وقتی بیشترین مقدار را دارد که یکی از آنها ۱ باشد.

مثال) اگر x, y, z اعداد طبیعی باشند و $x + y + z = 9$ باشد بیشترین مقدار عبارت xyz چند است؟

حل) اگر x, y, z اعداد متمایز نباشند بیشترین مقدار وقتی است که با هم برابر باشند یعنی $xyz = 27 \Rightarrow x = y = z = 3$ ولی اگر متمایز باشند باید کمترین اختلاف را داشته باشند که سه عدد طبیعی متوالی می شوند در نتیجه $xyz = 2 \times 3 \times 4 = 24$

مثال) فرض کنید x عددی حقیقی باشد در این صورت بزرگ ترین مقدار حقیقی که عبارت $\sqrt{2008-x} + \sqrt{x-2000}$ می تواند داشته باشد پقدر است؟

$$A = \sqrt{2008-x} + \sqrt{x-2000} \Rightarrow A^2 = 2008-x + x-2000 + 2\sqrt{(2008-x)(x-2000)} = 8 + 2\sqrt{(2008-x)(x-2000)} \Rightarrow A = \sqrt{8+2(2008-x)(x-2000)}$$

الکون به دلیل این که دو عدد $2008-x$ و $x-2000$ اعداد مثبت و مجموع آنها $2008-x + x-2000 = 8$ پس بیشترین مقدار حاصل ضرب آنها وقتی است که هر کدام ۴ باشند پس بیشترین مقدار عبارت A برابر است با:

$$A = \sqrt{8+2\sqrt{(2008-x)(x-2000)}} = \sqrt{8+2\sqrt{4 \times 4}} = \sqrt{8+2\sqrt{16}} = \sqrt{8+2 \times 4} = \sqrt{16} = 4$$

★ کمترین مقدار عبارت $ax^2 + bx + c$ که در آن $a > 0$ همواره به ازای $x = \frac{-b}{2a}$ به دست می آید.

مثال) کمترین مقدار عبارت $x^2 + 10x + 32$ چند است؟

★ بیشترین مقدار عبارت $ax^2 + bx + c$ که در آن $a < 0$ همواره به ازای $x = \frac{-b}{2a}$ به دست می آید.

★ برای پیدا کردن بیشترین و یا کمترین مقدار یک عبارت به روش زیر نیز می توان عمل کرد.

ابتدا ضریب x^2 اگر ۱ نبود با تقسیم تمام جملات بر ضریب x^2 آن را به ۱ تبدیل می کنیم. سپس مربع «نصف ضریب x » را به عبارت اضافه و کم می کنیم. بعد سه جمله ای که مربع کامل می سازند را باهم گرفته و حاصل بقیه جملات را نیز حساب می کنیم. سپس اگر در ابتدا بر ضریب x^2 تقسیم کرده بودیم این حاصل را در همان عدد ضرب می کنیم تا بیشترین یا کمترین مقدار عبارت به دست آید.

مثلا در مثال بالا داریم: ابتدا چون ضریب x^2 برابر ۱ می باشد مربع نصف ۱۰ را به عبارت یک بار اضافه و یکبار کم می کنیم.

$$x^2 + 10x + 32 = x^2 + 10x + 32 + 25 - 25 = (x^2 + 10x + 25) + 32 - 25 = (x + 5)^2 + 7$$

اکنون کمترین مقدار عبارت وقتی است که داخل پرانتز صفر شود پس کمترین مقدار برابر ۷ می شود.

★ برای به دست آوردن **مجموع ضرایب** در هر عبارت به جای هر یک از حروف **عدد ۱** قرار می دهیم و حاصل را به دست می آوریم.

مثال: مجموع ضرایب بسط عبارت $(3x^2 + x - 3)^{90}$ چند می شود؟ $(3x^2 + x - 3)^{90} = 1^{90} = 1$

★ برای پیدا کردن **جمله ثابت** یک چند جمله ای به جای تمام متغیرهای آن **صفر** قرار می دهیم و حاصل را به دست می آوریم.

معادله

تعداد جوابهای معادله درجه یک:

هر معادله درجه یک به صورت $ax = b$ قابل نمایش دادن است که در این معادله سه حالت برای جواب ممکن است پیش بیاید.

حالت اول: اگر در $ax = b$ مقدار a غیر از صفر باشد معادله یک جواب دارد. مانند $3x = -12 \Rightarrow x = \frac{-12}{3} = -4$

حالت دوم: اگر در $ax = b$ مجهول حذف شود یعنی $a = 0, b \neq 0$ معادله غیر ممکن است و جواب ندارد.

مثال: $4x - 2 = 5 + 4x \Rightarrow 4x - 4x = 5 + 2 \Rightarrow 0 = 7 \Rightarrow$ جواب ندارد $\Rightarrow$ غیر ممکن

حالت سوم: اگر در معادله $ax = b$ هر دو عدد a, b صفر باشند معادله مبهم است و بی شمار جواب دارد.

مثال: معادله بی شمار جواب دارد. $5x - 2 = 5x - 2 \Rightarrow 0 = 0$

تذکر: هر گاه یک معادله را ساده کردید و به یک تساوی درست عددی مانند $2 = 2$ و $-6 = -6$ و ... رسیدید معادله شما بیشمار جواب دارد.

تذکر مهم: هر معادله می تواند حداکثر به تعداد درجه ی مجهول خود جواب داشته باشد. مثلا معادله درجه ۲ می تواند ۲ جواب داشته باشد.

معادله رادیکالی (اصم):

در این نوع معادلات مجهول زیر رادیکال قرار گرفته است برای حل این نوع معادلات بهتر است ابتدا کاری کنید که بخش رادیکالی در یک طرف تساوی و قسمت های دیگر در مقابل آن قرار گیرند سپس دو طرف تساوی را به توان ۲ (یا هر فرجه ای که رادیکال دارد) برسانید تا رادیکال از بین برود.

مثال: معادله های زیر را حل کنید

$$\text{پ) } \sqrt{\sqrt{3x-9}} + 1 = 4 \quad \text{ب) } \sqrt[3]{8-4x} = -2 \quad \text{الف) } \sqrt{-5x-9} - 4 = 0$$

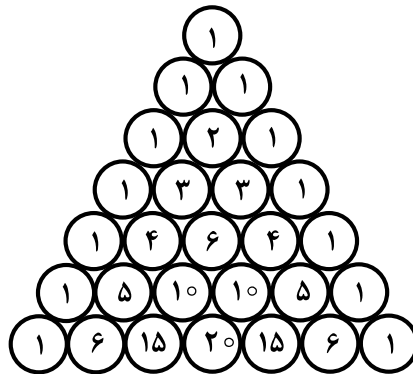
$$\sqrt{-5x-9} - 4 = 0 \Rightarrow \sqrt{-5x-9} = 4 \Rightarrow (\sqrt{-5x-9})^2 = 4^2 \Rightarrow -5x-9 = 16 \Rightarrow -5x = 25 \Rightarrow x = \frac{25}{-5} = -5$$

الف)

$$\text{ب) } \sqrt[3]{8-4x} = -2 \Rightarrow (\sqrt[3]{8-4x})^3 = (-2)^3 \Rightarrow 8-4x = -8 \Rightarrow -4x = -8-8 = -16 \Rightarrow x = \frac{-16}{-4} = 4$$

$$\text{پ) } \sqrt{\sqrt{3x-9}} + 1 = 4 \Rightarrow \sqrt{\sqrt{3x-9}} = 3 \Rightarrow (\sqrt{\sqrt{3x-9}})^4 = 3^4 \Rightarrow 3x-9 = 81 \Rightarrow 3x = 90 \Rightarrow x = \frac{90}{3} = 30$$

★ از مثلث **خیام-پاسکال** می توان برای پیدا کردن ضرایب عبارت $(a+b)^n$ می توان استفاده کرد به این صورت که اعداد سطر n ام این مثلث ضرایب جمله های این عبارت می شود و توان n در اولین جمله n و توان n در جمله های بعدی هربار یکی کم می شود و به توان b اضافه می شود تا در آخرین جمله که توان b به n می رسد.



$$\text{مثال) با کمک سطر پنجم حاصل } (a+b)^5 \text{ را پیدا کنید. } (a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5a^4b + b^5$$

★ در بسط دو جمله ای $(a+b)^n$ جمله هایی که از دو طرف به یک فاصله اند دارای **ضریب برابر** هستند.

اتحادها

نکته: دو چند جمله‌ای را نسبت به یک متغیر **متحد** می‌گوییم هرگاه **ضرایب جملات هم درجه در دو طرف برابر هم باشند**.

تذکر: یک **پنر جمله** ای را **متحد با صفر** می‌گوییم هرگاه **تمام ضرایب آن برابر با صفر باشند**.

مثال: اگر تساوی $ax^2 + bx - 2 = 2x^2 - 3x - c$ به ازای تمامی مقادیر x برقرار باشد مقدار عددی عبارت $a + b + c$ کدام است؟

اتحاد مربع دو جمله‌ای:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

مثال: اگر $a^2 + b^2 + 5ab = 0$ باشد حاصل $\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2$ را حساب کنید.

$$a^2 + b^2 + 5ab = 0 \Rightarrow a^2 + b^2 = -5ab \Rightarrow \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{a^2 + b^2 + 2ab} = \frac{-5ab - 2ab}{-5ab + 2ab} = \frac{-7ab}{-3ab} = \frac{7}{3} \quad (\text{حل})$$

نتایج اتحاد مربع دو جمله‌ای:

$$a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2ab$$

$$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$$

$$(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$$

$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$$

مثال: اگر $x - \frac{1}{x} = 5$ باشد $3x^2 + \frac{3}{x^2}$ مقدار است؟

(حل) طبق نتیجه اتحاد $a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2ab$ داریم:

$$a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2ab \Rightarrow 3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 3\left[\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2x \frac{1}{x}\right] = 3(5^2 + 2) = 3(27) = 81$$

نکته مهم: برای مشخص کردن اینکه چه عددی به عبارت $ax^2 + bx + c$ اضافه کنیم تا حاصل مربع کامل شود باید

مربع نصف ضریب x یعنی $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ را تقسیم بر ضریب x^2 کنیم و حاصل این عبارت را از عدد ثابت در عبارت اولیه کم کنیم.

مثال: چه عددی را به عبارت $4x^2 - 5x + 3$ اضافه کنیم تا حاصل مربع کامل شود؟

مربع نصف ضریب x یعنی $\left(\frac{-5}{2}\right)^2$ را تقسیم بر ضریب x^2 یعنی ۴ می‌کنیم و حاصل آن را از عدد ثابت یعنی ۳ کم می‌کنیم

$$\left(\frac{-5}{2}\right)^2 \div 4 - 3 = \frac{25}{4} \times \frac{1}{4} - 3 = \frac{25}{16} - 3 = \frac{25 - 48}{16} = \frac{-23}{16}$$

اتحاد مزدوج:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

مثال) حاصل عبارت $(2 - \sqrt{3})^{23} (2 + \sqrt{3})^{25}$ را به دست آورید.

$$(2 - \sqrt{3})^{23} (2 + \sqrt{3})^{25} = [(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})]^{23} (2 - \sqrt{3})^2 = [4 - 3]^{23} (2 - 4\sqrt{3} + 3) = 1^{23} (5 - 4\sqrt{3}) = 5 - 4\sqrt{3}$$

*** نکته:** گاهی مواقع حاصل ضرب چند پرانتز با ضرب در یک پرانتز دیگر و تقسیم بر همان پرانتز تشکیل یک اتحاد مزدوج

می دهد که با انجام این کار و تشکیل اتحاد مزدوج می توانیم حاصل عبارت را به صورت ساده تر بنویسیم.

مثال: اگر $a = \sqrt{2} + 1$ و $b = \sqrt{2}$ حاصل عبارت $(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)+b^8$ بفرمایید؟

حل) چون $a - b = \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} = 1$ شده است ضرب عدد ۱ در هر عبارتی بی تاثیر است پس فقط کل عبارت را در $a - b$ ضرب می کنیم.

داریم:

$$(a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)+b^8 = (a^2-b^2)(a^2+b^2)(a^4+b^4)+b^8 = (a^4-b^4)(a^4+b^4)+b^8 = (a^8-b^8)+b^8 = a^8 = (\sqrt{2}+1)^8$$

$$\frac{(2+3)(2^2+3^2)(2^4+3^4)\dots(2^{2048}+3^{2048})+2^{4096}}{3^{2048}}$$

مثال: حاصل عبارت مقابل برابر است با:

$$3^{2048} + 2^{2048} \quad (4)$$

$$3^{4096} \quad (3)$$

$$3^{2048} \quad (2)$$

$$2^{4096} \quad (1)$$

حل) صورت و مخرج کسر را در $(3-2)$ ضرب و تقسیم می کنیم

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

اتحاد جمله مشترک:

$$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3 \quad (a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3 \quad \text{اتحاد مکعب دو جمله ای (چاق ولاغر):}$$

$$(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\dots+b^{n-1}) = a^n+b^n$$

تعمیم اتحاد چاق ولاغر:

$$(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\dots+b^{n-1}) = a^n-b^n$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

اتحاد مکعب مجموع:

$$a^3+b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$$

اتحاد فرعی مکعب دو جمله ای:

$$a^3-b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$$

مثال) اگر $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$ باشد حاصل $x^3 + \frac{1}{x^3}$ را حساب کنید.

$$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) \Rightarrow$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3x \cdot \frac{1}{x} \left(x + \frac{1}{x}\right) = \left(\frac{5}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{125}{8} - \frac{15}{2} = \frac{65}{8}$$

تجزیه

تجزیه یک عبارت جبری، یعنی تبدیل آن عبارت به ضرب دو یا چند عبارت جبری

مهمترین روش های تجزیه:

۱- فاکتورگیری ۲- استفاده از اتحادها ۳- دسته بندی ۴- افزودن و کاستن ۵- شکستن یک یا چند جمله عبارت جبری

★ ۱- فاکتورگیری: در این روش «ب م م» ضرایب و حروف مشترک با کوچکترین توان را پیدا کرده و در پشت پرانتز می نویسیم (فاکتور). سپس تک تک جملات عبارت را بر فاکتور تقسیم کرده و حاصل را داخل پرانتز می نویسیم.

مثال) تجزیه کنید $6ab^2c + 2a^2bc = 2abc(3b + a)$

مثال) اگر $a(c + d) + b(c + d) = 42$ و $c + d = 3$ باشد حاصل $a + b + c + d$ چقدر است؟

$$(1) \quad 14 \quad (2) \quad 56 \quad (3) \quad 17 \quad (4) \quad 39$$

$$a(c + d) + b(c + d) = 42 \Rightarrow (c + d)(a + b) = 42 \Rightarrow 3(a + b) = 42 \Rightarrow a + b = \frac{42}{3} = 14 \Rightarrow$$

$$a + b + c + d = 14 + 3 = 17$$

مثال) کدام عامل زیر در تجزیه عبارت $(a + b + c)(ab + bc + ca) - abc = 0$ وجود ندارد؟

$$(1) \quad a + c \quad (2) \quad a - c \quad (3) \quad b + c \quad (4) \quad a + b$$

ابتدا دو پرانتز را در هم ضرب می کنیم و سپس فاکتورگیری می کنیم.

$$\begin{aligned} (a + b + c)(ab + bc + ca) - abc &= a^2b + abc + a^2c + b^2a + b^2c + bca + cab + c^2b + c^2a - abc = \\ (a^2b + b^2a) + (a^2c + abc) + (b^2c + abc) + (c^2a + c^2b) &= ab(a + b) + ac(a + b) + bc(a + b) + c^2(a + b) = \\ (a + b)(ab + ac + bc + c^2) &= (a + b)[a(b + c) + c(b + c)] = (a + b)[(b + c)(a + c)] \end{aligned}$$

★ ۲ - تجزیه با استفاده از اتحادها:

*** الف) تجزیه با کمک اتحاد مربع دو جمله ای:** ۱- عبارت جبری شامل ۳ جمله باشد ۲- دو جمله عبارت باید مربع کامل باشند. ۳- جمله سوم دو برابر جذر جملات اول و دوم باشد. پس برای تجزیه دو پرانتز باز و بسته کرده و جذر هر یک از جملات مربع کامل را داخل هر دو پرانتز می نویسیم و علامت جمله ی سوم را بین آنها در هر دو پرانتز قرار می دهیم.

$$\text{مثال: عبارت } x^4 - 18x^2 + 81 \text{ را تجزیه کنید.} \quad x^4 - 18x^2 + 81 = (x^2 - 9)^2$$

نکته مهم:

برای تجزیه عبارت های رادیکالی که به صورت $m \pm 2\sqrt{n}$ میباشند به شرط آنکه $m = a \pm b$ و $n = ab$ باشد تجزیه عبارت به صورت $(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})^2$ می شود. و علامت بین دو $\sqrt{a}$ و $\sqrt{b}$ علامت پشت $2\sqrt{n}$ می شود. مثال:

$$7 + 2\sqrt{10} \Rightarrow n = 2 \times 5, m = 2 + 5 \Rightarrow 7 + 2\sqrt{10} = (\sqrt{2} + \sqrt{5})^2$$

تذکر: حتما باید عدد ۲ پشت $\sqrt{n}$ باشد. اگر عدد ۲ پشت $\sqrt{n}$ نبود شما باید از زیر رادیکال عدد ۴ را در زیر رادیکال ساخته تا وقتی آنرا از زیر رادیکال بیرون می آورید عدد ۲ به دست آید. مثال:

$$\sqrt{24} + 5 \Rightarrow \sqrt{4 \times 6} + 5 = 2\sqrt{6} + 5 \Rightarrow n = 2 \times 3, m = 2 + 3 \Rightarrow 2\sqrt{6} + 5 = (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2$$

*** ب) تجزیه با کمک اتحاد مزدوج:** ۱- عبارت جبری شامل دو جمله باشد. ۲- هر دو جمله مربع کامل باشند. ۳- عمل بین دو جمله منها باشد. پس اول دو تا پرانتز باز و بسته می کنیم و داخل هر دو پرانتز جذر هر دو جمله را می نویسیم. و داخل یکی از پرانتزها علامت منها و داخل دیگری علامت به اضافه قرار می دهیم.

مثال: در تجزیه کامل $a^9 - a$ تعداد کل عامل ها برابر است با:

$$(1) \text{ بیش از } 5 \quad (2) \checkmark 5 \quad (3) 4 \quad (4) 13$$

$$a^9 - a = a(a^8 - 1) = a(a^4 - 1)(a^4 + 1) = a(a^2 + 1)(a^2 - 1)(a^4 + 1) = a(a^2 + 1)(a^2 + 1)(a + 1)(a - 1)$$

مثال: حاصل عبارت $45^8 - 9^4$ بر کدام عدد بخشپذیر نیست؟

$$(1) 3 \quad (2) 5 \quad (3) 6 \quad (4) 11$$

با توجه به حاصل هر پرانتز در هیچ کدام عامل ۵ وجود ندارد پس عبارت بر ۵ بخشپذیر نیست.

*** پ) تجزیه به کمک اتحاد جمله مشترک:** ۱- عبارت جبری شامل سه جمله باشد. ۲- یک جمله آن مربع کامل باشد ۳- دو عدد بتوان یافت که حاصل جمع آنها برابر ضریب متغیر بوده و حاصل ضرب آنها برابر جمله ی سوم (عدد ثابت) باشد. پس برای تجزیه دو پرانتز باز و بسته کرده و داخل هر دو پرانتز جذر جمله ی مشترک را می نویسیم. و داخل هر کدام از پرانتزهایی که از آن اعداد ی را که در شرایط بالا گفتیم. قرار می دهیم.

مثال: عبارت $x^4 - 3x^2 - 4$ بر کدام یک از عبارت های زیر بخشپذیر است؟

$$(1) \quad x^2 + 2 \quad (2) \quad x + 1 \quad (3) \quad x - 1 \quad (4) \quad x + 2$$

$$x^4 - 3x^2 - 4 = (x^2 + 1)(x^2 - 4) = (x^2 + 1)(x - 2)(x + 2)$$

با کمک اتحاد جمله مشترک:

تذکر مهم: در صورتیکه در تجزیه با اتحاد جمله مشترک ضریب x^2 مربع کامل نباشد از روشی به نام **روش A (روش روسی)** برای مربع کردن استفاده می کنیم. به صورت زیر:

۱- عبارت را برابر A قرار می دهیم ۲- دو طرف تساوی را در ضریب x^2 ضرب می کنیم. ۳- عبارت حاصل را به کمک اتحاد جمله مشترک تجزیه می کنیم ۴- هر یک از عامل های به دست آمده را در صورت امکان تجزیه می کنیم ۵- طرفین تساوی را در عدد ضرب شده تقسیم می کنیم.

مثال: عبارت $6x^2 + 7x + 2$ را تجزیه کنید. حل: چون ضریب x^2 مربع کامل نیست از روش A استفاده می کنیم داریم:

$$A = 6x^2 + 7x + 2 \Rightarrow 6A = 36x^2 + 42x + 12 \Rightarrow 6A = (6x + 3)(6x + 4) \Rightarrow 6A = 3(2x + 1)2(3x + 2) \Rightarrow A = (2x + 1)(3x + 2)$$

تذکر مهم: گاهی مواقع در تجزیه به جای اعداد، از عبارت ها یا پرانتزها استفاده می کنند.

مثال در تجزیه عبارت زیر ضریب x از مجموع دو پرانتزی که در قسمت سوم ضرب شده اند به دست آمده است پس با کمک اتحاد جمله مشترک می توان آن را تجزیه کرد.

$$x^2 + x \underbrace{(-2y - 1)}_{\text{جمع دو عبارت}} + \underbrace{(-3y + 1)(y - 2)}_{\text{ضرب دو عبارت}} = (x - 3y + 1)(x + y - 2)$$

*** (ت) تجزیه به کمک اتحاد چاق ولاغر:** ۱- عبارت جبری شامل دو جمله باشد ۲- هر دو جمله مکعب کامل باشد.

$$a^6 - 64 = (a^2 - 4)(a^4 + 4a^2 + 16)$$

مثال) عبارت مقابل را تجزیه کنید.

*** (ث) تجزیه به کمک اتحاد مکعب دو جمله ای:**

$$27x^3 - 54x^2 + 36x - 8 = (3x - 2)^3$$

مثال: عبارت مقابل را تجزیه کنید.

*** ۲- تجزیه به کمک دسته بندی:**

در بعضی از عبارات لازم است که جملات آن را به صورت چندین دسته مناسب در نظر گرفته و سپس با استفاده از روش فاکتور گیری یا اتحادهای جبری هر دسته و در نهایت کل عبارت را تجزیه کنیم.

$$\text{مثال: عبارت } 5a^2 + 5b^2 + 10ab + 3a + 3b \text{ را تجزیه کنید.}$$

$$\begin{aligned} \Delta a^2 + \Delta b^2 + 10ab + 3a + 3b &\Rightarrow (\Delta a^2 + \Delta b^2 + 10ab) + (3a + 3b) = \Delta(a^2 + b^2 + 2ab) + 3(a + b) = \\ \Delta(a + b)^2 + 3(a + b) &= (a + b)[\Delta(a + b) + 3] \end{aligned}$$

★ ۴- تجزیه با افزودن و کاستن:

در این روش جمله ای را به عبارت جبری اضافه واز آن کم می کنیم سپس با کمک اتحادها آن را تجزیه می کنیم.

مثال: عبارت $x^4 + 4$ را تجزیه کنید.

$$x^4 + 4 = x^4 + 4 + 4x^2 - 4x^2 = (x^4 + 4 + 4x^2) - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - 4x^2 = (x^2 + 2 - 2x)(x^2 + 2 + 2x)$$

مثال: عبارت $a^4 + a^2b^2 + b^4$ را تجزیه کنید.

★ ۵- تجزیه به کمک شکستن برخی جملات:

در این روش بعضی از جملات را به صورت مجموع یا تفاضل دو جمله دیگر می نویسیم سپس به روش دسته بندی و فاکتور گیری و یا اتحادها عبارت جبری را تجزیه می کنیم.

مثال: عبارت $x^4 + x^2 + 1$ را تجزیه کنید.

$$\begin{aligned} x^4 + x^2 + 1 &= x^4 + 2x^2 - x^2 + 1 = (x^4 + 2x^2 + 1) - x^2 = \\ \text{حل) به جای } x^2 \text{ عبارت } 2x^2 - x^2 \text{ را قرار می دهیم.} \\ (x^2 + 1)^2 - x^2 &= [(x^2 + 1) - x][(x^2 + 1) + x] \end{aligned}$$

مثال: عبارت $x^3 + 5x^2 + 3x - 9$ را تجزیه کنید. حل: به جای $5x^2$ دو جمله ی $4x^2$ و x^2 را قرار می دهیم داریم:

تذکر مهم: هر چند جمله ای بر عوامل خود در تجزیه آن بخشپذیر است.

اگر مجموع ضرایب یک چند جمله ای صفر شود یکی از عاملهای آن $x - 1$ خواهد بود.

روش عدد گذاری برای حل سریع بعضی تستها

الف) در تست هایی که از شما می خواهد حاصل یک عبارت را به دست آورده و به ساده ترین صورت بنویسید.

مثال: حاصل عبارت $(x^2 + x + 1)^2 + (x + 1)^2 - 2(x + 1)(x^2 + x + 1)$ کدام است؟

$$(1) \quad x^4 - x^2 + 1 \quad (2) \quad x^4 \quad (3) \quad x^2 - 2x + 1 \quad (4) \quad x^4 + x^2 + 1$$

حل) با کمک اتحادها می توان حاصل عبارت را پیدا کرد و به گزینه مورد نظر رسید اما به روش عدد گذاری داریم:

به جای x در عبارت عدد ۲ را قرار می دهیم داریم:

$$(2^2 + 2 + 1)^2 + (2 + 1)^2 - 2(2 + 1)(2^2 + 2 + 1) = 8^2 + 4^2 - 2(4)(8) = 80 - 64 = 16$$

فالا به بای x در هر یک از گزینه ها نیز عدد 2 را قرار می دهیمو حاصل را به دست می آوریم حاصل هر کدام 16 شد ان گزینه جواب است.

$$y^x + y^y + 1 = y1 \quad (p) \qquad y^y - y \times y + 1 = 1 \quad (u) \qquad \checkmark y^x = 17 \quad (v) \qquad y^x - y^y + 1 = 13 \quad (l)$$

تذکره: دقت کنید اگر در تست بالا به جای متغیر عدد یک را قرار دهید جواب دو تا از گزینه ها با جواب عبارت یکی خواهد شد یعنی اینکه عدد یک، عدد مناسبی برای بایگذاری در این سوال نخواهد بود.

ب) در بعضی از تست های مربوط به تجزیه که از شما می خواهد مشخص کنید در تجزیه عبارت داده شده کدام عامل وجود دارد یا کدام عامل وجود ندارد؟

مثال: تجزیه عبارت $(a + 2b - c)^2 + c^2 + 2c(a + 2b - c)$ به کدام صورت است؟

$$(\mathfrak{y}b-c)^{\mathfrak{r}} \ (\mathfrak{f}) \qquad (a+\mathfrak{y}b)^{\mathfrak{r}} \ (\mathfrak{r}) \qquad (a-\mathfrak{y}b)^{\mathfrak{r}} \ (\mathfrak{r}) \qquad (c+\mathfrak{y}b)^{\mathfrak{r}} \quad (1)$$

حل) با روش معمول باید هر پیرانتز را به عنوان یک جمله در نظر بگیریم تا با کمک اتحاد مربع دو جمله ای بتوانیم آن را تجزیه کنیم اما به روش عددگذاری داریم: به جای متغیرها $a=1, b=2, c=3$ را در عبارت سوال و در هریک از گزینه ها قرار می دهیم و حاصل گزینه ها را به دست آورده با حاصل عبارت داخل سوال مقایسه میکنیم.

هالا در گزینہ ها جایگذاری می کنیم.

$$(1 - r \times r)^r = (-r)^r = r \quad (r)$$

$$(r + r \times r)^r = r^r = r \cdot r \quad (r)$$

$$(Y \times Y - Y)^Y = 1^Y = 1 \quad (\mu)$$

ج) با پیدا کردن مقدار عددی عبارت داخل سوال به کمک ریشه‌های گزینده‌ها

ریشه‌ی هر گزینۀ را پیدا کرده و در عبارت داخل سوال جایگذاری می‌کنیم اگر مقدار عبارت صفر شد آن گزینۀ عامل آن عبارت هست در غیر اینصورت فیر

حالا شما سوالهای زیر را با همین روش حل کنید

۳- کدام عامل در تجزیه $x^4 + y^4 - 11x^2y^2$ وجود دارد؟

$$x^{\mathfrak{f}} + \mathfrak{f}xy + y \quad (\mathfrak{f}) \qquad x^{\mathfrak{f}} - \mathfrak{f}xy - y^{\mathfrak{f}} \quad (\mathfrak{f}) \qquad x^{\mathfrak{f}} - \mathfrak{f}xy + y^{\mathfrak{f}} \quad (\mathfrak{f}) \qquad x^{\mathfrak{f}} + \mathfrak{f}xy + y^{\mathfrak{f}} \quad (\mathfrak{f})$$

۴- کدام نامساوی برای هر مقدار حقیقی و مثبت a, b, c برقرار است؟

$$(a+b)(a+c)(b+c) \geq \mathfrak{r}abc \quad (\mathfrak{r})$$

$$(a+b)(a+c)(b+c) \leq 4abc \quad (\text{r}) \qquad (a+b)(a+c)(b+c) \geq 4abc \quad (\text{r})$$

نابرابریها و نامعادله

خاصیت نابرابریها:

۱- اگر به دو طرف یک نابرابری یک مقدار مساوی را اضافه و یا کم کنیم جهت نابرابری تغییر نمی کند.

$$a > b \Rightarrow a + c > b + c \quad a > b \Rightarrow a - c > b - c$$

۲- اگر دو طرف یک نابرابری را در عددی **مثبت** ضرب یا تقسیم کنیم جهت نابرابری تغییر نمی کند.

$$a > b \Rightarrow \frac{a}{c} > \frac{b}{c} \text{ و } c > 0 \quad a > b \Rightarrow ac > bc \text{ و } c > 0$$

۳- اگر دو طرف یک نابرابری را در عددی **منفی** ضرب یا تقسیم کنیم جهت نابرابری **عوض می شود**.

$$a > b \Rightarrow \frac{a}{c} < \frac{b}{c} \text{ و } c < 0 \quad a > b \Rightarrow ac < bc \text{ و } c < 0$$

۴- اگر دو طرف یک نابرابری هم علامت باشند با **معکوس** کردن آنها جهت نابرابری **عوض می شود**.

$$a < b < 0 \Rightarrow a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b} \quad a > b > 0 \Rightarrow a > b \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$$

۵- اگر دو طرف یک نابرابری هم علامت **نباشند** با معکوس کردن آنها جهت نابرابری **عوض نمی شود**.

$$\text{مثال: } a < 0, b > 0 \Rightarrow a < b \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b} \quad -3 < 0, 2 > 0 \Rightarrow -3 < 2 \Rightarrow -\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$$

۶- اگر دو طرف یک نابرابری به توان عددی **فرد** برسند جهت نامساوی تغییر نمی کند.

(الف) دو طرف **مثبت** باشند جهت **عوض** نمی شود.

۷- اگر دو طرف یک نابرابری به توان عددی **زوج** برسند سه حالت وجود دارد:

(ب) دو طرف **منفی** باشند جهت **عوض** می شود

(ج) اگر یکی منفی و دیگری مثبت باشد **قدر مطلق**

هر کدام بزرگتر بود موقع به توان زوج رساندن همان طرف بزرگتر می شود.

$$\text{مثال (الف): } 4 > 2 \Rightarrow 4^4 > 2^4 \quad \text{(ب)} \quad -3 > -5 \Rightarrow (-3)^4 < (-5)^4$$

$$\text{(ج) چون } |-7| > |4| \Rightarrow (-7)^2 > 4^2 \quad -7 < 4 \Rightarrow (-7)^2 > 4^2$$

مساله: طول مستطیلی ۳ برابر عرض آن است اگر محیط این مستطیل از ۲۰ سانتیمتر بیشتر نباشد عرض مستطیل چه مقادیری را می تواند اختیار کند؟

$$x = 3y \Rightarrow 2(x + y) = 2(3y + y) = 8y \Rightarrow \text{محیط} < 20 \Rightarrow 8y < 20 \Rightarrow y < \frac{20}{8} = 2.5$$

و چون عرض نمی تواند مقادیر منفی اختیار کند پس $0 < y \leq 2.5$