



تقسیم چند جمله ای با زبان ساده: روش ها، مثال ها و نوآوری ها

یوسف قله نونی

با همکاری: رسول محمدی نژاد مقدم

۲۵ اردیبهشت ۱۴۰۵

تلگرام: @Rasoul_mn @yousof_lhc
ایتا: @yousof_lhc
رویکا: @yousof_lhc
سروش: @yousof_lhc
بله: @yousof_lhc
ایمیل: rasoul.mnm@gmail.com y.ghalenoiei@gmail.com

alphaamath.com

با آرزوی موفقیت و شادکامی برای تمامی دانش آموزان و دانشجویان عزیز

۱ داستان تقسیم

تقسیم چند جمله ای یعنی چی؟

از اعداد شروع کنیم

تقسیم اعداد صحیح را که خوب می شناسید:

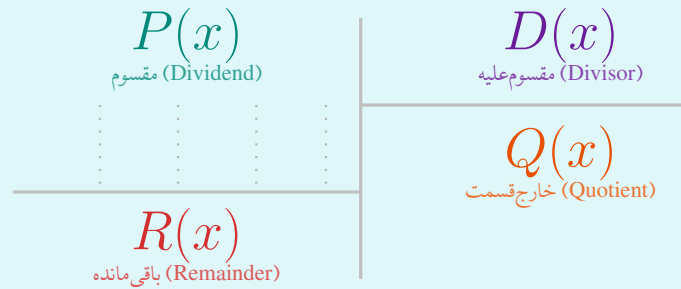
$$۱۷ = (۵ \times ۳) + ۲$$

اینجا ۱۷ مقسوم است، ۵ مقسوم علیه، ۳ خارج قسمت و ۲ باقی مانده. نکته کلیدی این که باقی مانده همیشه از مقسوم علیه کوچک تر است ($۲ < ۵$).

تعمیم به چند جمله‌ای‌ها

همین ایده را به عبارت‌های جبری می‌بریم. به جای «کوچک‌تر بودن»، از درجه کمتر استفاده می‌کنیم. الگوریتم تقسیم برای دو چندجمله‌ای $P(x)$ و $D(x) \neq 0$ ، دو چندجمله‌ای یکتا مثل $Q(x)$ و $R(x)$ را ضمانت می‌کند که:

$$P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x) \quad \text{با شرط} \quad \deg(R) < \deg(D) \text{ یا } R(x) \equiv 0$$



نقطه چین‌های عمودی = مراحل میانی فرآیند تقسیم

خلاصه نقش‌ها

- **مقسوم (P):** عبارتی که تقسیم می‌شود.
مثال عددی: ۱۷
 - **مقسوم علیه (D):** عبارتی که بر آن تقسیم می‌کنیم.
مثال عددی: ۵
 - **خارج قسمت (Q):** نتیجه اصلی — چند بار D در P جا می‌گیرد.
مثال عددی: ۳
 - **باقی مانده (R):** ته مانده با درجه کمتر از D .
مثال عددی: ۲
- شرط طلایی:** $\deg(R) < \deg(D)$. **حالت خاص:** اگر $R(x) = 0$ ، آن‌گاه $D(x)$ یک عامل $P(x)$ است. در بخش بعد، تقسیم طولی را گام به گام می‌آموزیم.

یک پیش‌نیاز کوچک اما مهم

پیش از هر تقسیمی، مطمئن شوید که هر دو چندجمله‌ای به صورت استاندارد (نزولی) نوشته شده‌اند. یعنی توان‌ها از بزرگ به کوچک مرتب باشند و هر توان غایب، با ضریب صفر پر شود. برای مثال، $x^3 - 2x + 5$ را به شکل $x^3 + 0x^2 - 2x + 5$ می‌نویسیم. این کار، چینش ستون‌ها را در مراحل بعدی تقسیم، منظم و بی‌خطا نگه می‌دارد.

۲ روش اصلی: تقسیم طولی

روش تقسیم طولی — مادر همه روش‌ها

تقسیم طولی پایه‌ای‌ترین و کامل‌ترین روش برای تقسیم چندجمله‌ای‌هاست. در این روش، درست مانند تقسیم عددهای معمولی، مرحله به مرحله پیش می‌رویم و از بزرگ‌ترین جمله مقسوم شروع می‌کنیم. برای این که به‌خوبی یاد بگیری، یک مثال را با هم از ابتدا

تا انتها حل می‌کنیم.

مثال: $x^2 + 5x + 6$ را بر $x + 2$ تقسیم کنید.

مرحله صفر: پیش از شروع، مطمئن می‌شویم که هر دو چندجمله‌ای به صورت استاندارد (نزولی) نوشته شده‌اند و در صورت نبودن یک توان، ضریب صفر جای آن گذاشته شده است. اینجا

$x + 2$: مقسوم‌علیه $x^2 + 5x + 6$: مقسوم

هر دو کامل هستند. حالا جدول تقسیم را تشکیل می‌دهیم: مقسوم در سمت چپ و مقسوم‌علیه در سمت راست یک خط عمودی قرار می‌گیرد.

$$\begin{array}{r|l} x^2 + 5x + 6 & x + 2 \\ \hline & \text{(اینجا خارج قسمت نوشته می‌شود)} \end{array}$$

گام ۱: نخستین تقسیم
اولین جمله مقسوم یعنی x^2 را بر اولین جمله مقسوم‌علیه یعنی x تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{x^2}{x} = x$$

این x اولین جمله خارج قسمت است. آن را در جای خود می‌نویسیم:

$$\begin{array}{r|l} x^2 + 5x + 6 & x + 2 \\ \hline & x \end{array}$$

گام ۲: ضرب و نوشتن زیر مقسوم
حالا x را در کل مقسوم‌علیه ضرب می‌کنیم:

$$x \cdot (x + 2) = x^2 + 2x$$

این عبارت را در زیر جمله‌های هم‌درجه مقسوم می‌نویسیم تا آماده تفریق شویم:

$$\begin{array}{r|l} x^2 + 5x + 6 & x + 2 \\ \hline -(x^2 + 2x) & x \end{array}$$

گام ۳: تفریق (به دست آوردن باقی‌مانده موقتی)
اکنون تفریق را انجام می‌دهیم. برای این کار، سطر اول را منهای سطر دوم می‌کنیم:

$$\begin{array}{r|l} x^2 + 5x + 6 & \\ \hline -(x^2 + 2x) & \\ \hline 0 & 3x + 6 \end{array}$$

نتیجه این تفریق $3x + 6$ است. این عبارت باقی‌مانده موقتی ماست و چون درجه آن (که ۱ است) از درجه مقسوم‌علیه (که ۱ است) کمتر نیست، باید به کار ادامه دهیم.
بنابراین جدول تقسیم اکنون به شکل زیر درآمده است:

$$\begin{array}{r|l} x^2 + 5x + 6 & x + 2 \\ -(x^2 + 2x) & \\ \hline 3x + 6 & \end{array}$$

گام ۴: دومین تقسیم — جمله بعدی خارج قسمت حالا با باقی مانده موقتی همان طور رفتار می کنیم که با مقسوم اولیه رفتار کردیم. اولین جمله آن یعنی $3x$ را بر اولین جمله مقسوم علیه x تقسیم می کنیم:

$$\frac{3x}{x} = 3$$

این ۳، دومین جمله خارج قسمت است. آن را در کنار x قرار می دهیم تا خارج قسمت به $x + 3$ بروز شود:

$$\begin{array}{r|l} x^2 + 5x + 6 & x + 2 \\ -(x^2 + 2x) & \\ \hline 3x + 6 & \end{array}$$

گام ۵: ضرب دوم و تفریق نهایی

حالا ۳ را در کل مقسوم علیه $x + 2$ ضرب می کنیم:

$$3 \cdot (x + 2) = 3x + 6$$

نتیجه را زیر باقی مانده موقتی می نویسیم و تفریق می کنیم:

$$\begin{array}{r|l} x^2 + 5x + 6 & x + 2 \\ -(x^2 + 2x) & \\ \hline 3x + 6 & \\ -(3x + 6) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

نتیجه:

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3) + 0$$

چون باقی مانده صفر شده است، بنابراین می گوئیم مقسوم علیه $x + 2$ یک عامل برای چند جمله ای $x^2 + 5x + 6$ می باشد.

چند نکته بسیار مهم:

- همیشه جمله های هم درجه را دقیقاً زیر هم بنویسید تا تفریق به راحتی انجام شود.
- در هر گام، فقط جمله اول مقسوم (باقی مانده موقت) را بر جمله اول مقسوم علیه تقسیم کنید.
- به محض این که درجه باقی مانده از درجه مقسوم علیه کمتر شود، تقسیم پایان می یابد. اگر باقی مانده صفر شود، تقسیم دقیق است.
- این روش عیناً برای مقسوم علیه های با درجه بالاتر نیز کار می کند (که بعداً خواهید دید).

مثال ۱: $(x^3 - 2x^2 - 4x + 8) \div (x - 2)$

مرحله صفر: هر دو چند جمله‌ای به صورت استاندارد نوشته شده‌اند. جدول تقسیم را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 2x^2 - 4x + 8 & x - 2 \\ \hline & \text{(خارج قسمت اینجا نوشته می‌شود)} \end{array}$$

گام ۱: نخستین تقسیم

جمله اول مقسوم، یعنی x^3 ، را بر جمله اول مقسوم علیه (x) تقسیم می‌کنیم. حاصل x^2 می‌شود که اولین جمله خارج قسمت است:

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 2x^2 - 4x + 8 & x - 2 \\ \hline & x^2 \end{array}$$

گام ۲: ضرب و نوشتن زیر مقسوم

حالا x^2 را در کل مقسوم علیه ($x - 2$) ضرب می‌کنیم: $x^3 - 2x^2$. نتیجه را زیر جمله‌های هم‌درجه مقسوم می‌نویسیم:

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 2x^2 - 4x + 8 & x - 2 \\ \hline -(x^3 - 2x^2) & x^2 \end{array}$$

گام ۳: تفریق — باقی مانده موقتی

تفریق را انجام می‌دهیم. از x^3 چیزی نمی‌ماند و از $-2x^2$ هم صفر می‌شود. سپس $-4x$ و $+8$ را پایین می‌آوریم. باقی مانده موقتی $-4x + 8$ است:

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 2x^2 - 4x + 8 & x - 2 \\ \hline -(x^3 - 2x^2) & x^2 \\ \hline -4x + 8 & \end{array}$$

گام ۴: دومین تقسیم

جمله اول باقی مانده ($-4x$) را بر جمله اول مقسوم علیه (x) تقسیم می‌کنیم: $\frac{-4x}{x} = -4$. این دومین جمله خارج قسمت است:

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 2x^2 - 4x + 8 & x - 2 \\ \hline -(x^3 - 2x^2) & x^2 \\ \hline -4x + 8 & -4 \end{array}$$

گام ۵: ضرب دوم و تفریق نهایی

حالا -4 را در $(x - 2)$ ضرب می‌کنیم: $-4x + 8$. آن را زیر باقی مانده موقتی نوشته و تفریق می‌کنیم. باقی مانده صفر می‌شود:

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 2x^2 - 4x + 8 & x - 2 \\ \hline -(x^3 - 2x^2) & x^2 \\ \hline -4x + 8 & -4 \\ \hline -(-4x + 8) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{x - 2} = x^2 - 4 \quad \text{نتیجه:}$$

مثال ۲: $(6 + 3x^2 + 2x^3 - 5x) \div (x + 1)$

مرحله صفر: چند جمله‌ای‌ها استاندارد هستند. جدول آغازین:

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 + 3x^2 - 5x + 6 & x + 1 \\ \hline & \text{(خارج قسمت اینجا)} \end{array}$$

گام ۱: جمله اول مقسوم $2x^3$ را بر x تقسیم می‌کنیم: $\frac{2x^3}{x} = 2x^2$.

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 + 3x^2 - 5x + 6 & x + 1 \\ \hline 2x^2 & \end{array}$$

گام ۲: $2x^2$ را در $(x + 1)$ ضرب می‌کنیم: $2x^3 + 2x^2$. نتیجه را زیر مقسوم می‌نویسیم:

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 + 3x^2 - 5x + 6 & x + 1 \\ \hline -(2x^3 + 2x^2) & 2x^2 \end{array}$$

گام ۳: تفریق را انجام می‌دهیم. باقی مانده موقتی $x^2 - 5x + 6$ است:

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 + 3x^2 - 5x + 6 & x + 1 \\ \hline -(2x^3 + 2x^2) & 2x^2 \\ \hline & x^2 - 5x + 6 \end{array}$$

گام ۴: جمله اول باقی مانده x^2 را بر x تقسیم می‌کنیم: $\frac{x^2}{x} = x$.

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 + 3x^2 - 5x + 6 & x + 1 \\ \hline -(2x^3 + 2x^2) & 2x^2 + x \\ \hline & x^2 - 5x + 6 \end{array}$$

گام ۵: x را در $(x + 1)$ ضرب می‌کنیم: $x^2 + x$. سپس تفریق را انجام می‌دهیم، باقی مانده $-6x + 6$ می‌شود:

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 + 3x^2 - 5x + 6 & x + 1 \\ \hline -(2x^3 + 2x^2) & 2x^2 + x \\ \hline & x^2 - 5x + 6 \\ \hline & -(x^2 + x) \\ \hline & -6x + 6 \end{array}$$

گام ۶: $-6x$ را بر x تقسیم می‌کنیم: $\frac{-6x}{x} = -6$.

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 + 3x^2 - 5x + 6 & x + 1 \\ \hline -(2x^3 + 2x^2) & 2x^2 + x - 6 \\ \hline & x^2 - 5x + 6 \\ \hline & -(x^2 + x) \\ \hline & -6x + 6 \end{array}$$

گام ۷: -۶ را در $(x + ۱)$ ضرب می‌کنیم: $-۶x - ۶$. سپس تفریق را انجام می‌دهیم، باقی‌مانده ۱۲ می‌شود:

$$\begin{array}{r|l}
 2x^3 + 3x^2 - 5x + 6 & x + 1 \\
 -(2x^3 + 2x^2) & 2x^2 + x - 6 \\
 \hline
 x^2 - 5x + 6 & \\
 -(x^2 + x) & \\
 \hline
 -6x + 6 & \\
 -(-6x - 6) & \\
 \hline
 0 & 12
 \end{array}$$

نتیجه: $\frac{2x^3 + 3x^2 - 5x + 6}{x + 1} = 2x^2 + x - 6 + \frac{12}{x + 1}$

مثال ۳: $(-۱ + 6x^3 + 6x - ۱۱x^2) \div (-۱ + 3x)$

مرحله صفر: هر دو به صورت استاندارد هستند.

$$\begin{array}{r|l}
 6x^3 - 11x^2 + 6x - 1 & 3x - 1 \\
 & \text{(خارج قسمت اینجا)}
 \end{array}$$

گام ۱: $6x^3$ را بر $3x$ تقسیم می‌کنیم: $2x^2$.

$$\begin{array}{r|l}
 6x^3 - 11x^2 + 6x - 1 & 3x - 1 \\
 2x^2 &
 \end{array}$$

گام ۲: $2x^2 \times (3x - 1) = 6x^3 - 2x^2$

$$\begin{array}{r|l}
 6x^3 - 11x^2 + 6x - 1 & 3x - 1 \\
 -(6x^3 - 2x^2) & 2x^2
 \end{array}$$

گام ۳: تفریق: باقی‌مانده موقتی $-9x^2 + 6x - 1$ می‌شود.

$$\begin{array}{r|l}
 6x^3 - 11x^2 + 6x - 1 & 3x - 1 \\
 -(6x^3 - 2x^2) & 2x^2 \\
 \hline
 0 & -9x^2 + 6x - 1
 \end{array}$$

گام ۴: $-9x^2$ را بر $3x$ تقسیم می‌کنیم: $-3x$.

$$\begin{array}{r|l}
 6x^3 - 11x^2 + 6x - 1 & 3x - 1 \\
 -(6x^3 - 2x^2) & 2x^2 - 3x \\
 \hline
 0 & -9x^2 + 6x - 1
 \end{array}$$

گام ۵: $-3x \times (3x - 1) = -9x^2 + 3x$

$$\begin{array}{r|l}
 6x^3 - 11x^2 + 6x - 1 & 3x - 1 \\
 -(6x^3 - 2x^2) & 2x^2 - 3x \\
 \hline
 -9x^2 + 6x - 1 & \\
 -(-9x^2 + 3x) & \\
 \hline
 0 & 3x - 1
 \end{array}$$

$$\frac{3x}{3x} = 1:6 \text{ گام}$$

$$\begin{array}{r|l} 6x^3 & 3x-1 \\ - (6x^3 & -2x^2 \\ \hline & -9x^2 + 6x -1 \\ - (-9x^2 & +3x \\ \hline & 3x -1 \\ & \circ \end{array}$$

$$\text{گام ۷: } 1 \times (3x-1) = 3x-1 \text{؛ تفریق نهایی:}$$

$$\begin{array}{r|l} 6x^3 & 3x-1 \\ - (6x^3 & -2x^2 \\ \hline & -9x^2 + 6x -1 \\ - (-9x^2 & +3x \\ \hline & 3x -1 \\ - (3x & -1 \\ \hline & \circ \end{array}$$

$$\frac{6x^3 - 11x^2 + 6x - 1}{3x-1} = 2x^2 - 3x + 1 \text{ نتیجه:}$$

$$\text{مثال ۴: } (x^3 - 6x^2 + 11x - 6) \div (x - 2)$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 6x^2 + 11x - 6 & x-2 \\ \hline & \text{(خارج قسمت)} \end{array}$$

$$x^3 \div x = x^2:1 \text{ گام}$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 & x-2 \\ - (x^3 & -2x^2 \\ \hline & -4x^2 + 11x -6 \\ - (-4x^2 & +8x \\ \hline & 3x -6 \end{array}$$

$$-4x^2 \div x = -4x:2 \text{ گام}$$

ضرب و تفریق:

$$\begin{array}{r|l} x^3 & x-2 \\ - (x^3 & -2x^2 \\ \hline & -4x^2 + 11x -6 \\ - (-4x^2 & +8x \\ \hline & 3x -6 \end{array}$$

$$3x \div x = 3:3 \text{ گام}$$

ضرب و تفریق نهایی:

$$\begin{array}{r|l}
 \begin{array}{rrrr}
 x^3 & -6x^2 & +11x & -6 \\
 -(x^3 & -2x^2 & &) \\
 \hline
 & -4x^2 & +11x & -6 \\
 & -(-4x^2 & +8x &) \\
 \hline
 & & 3x & -6 \\
 & & -(3x & -6) \\
 \hline
 & & & 0
 \end{array}
 & \begin{array}{l}
 x-2 \\
 \hline
 x^2-4x+3
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x - 2} = x^2 - 4x + 3 \quad \text{نتیجه:}$$

مثال ۵: $(x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 6x + 4) \div (x^2 + 2)$

$$\begin{array}{r|l}
 x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 6x + 4 & x^2 + 0x + 2 \\
 \hline
 & \text{(خارج قسمت)}
 \end{array}$$

$$\text{گام ۱: } x^4 \div x^2 = x^2$$

$$\begin{array}{r|l}
 \begin{array}{rrrrr}
 x^4 & -3x^3 & +2x^2 & -6x & +4 \\
 -(x^4 & +0x^3 & +2x^2 & &) \\
 \hline
 & -3x^3 & & -6x & +4
 \end{array}
 & \begin{array}{l}
 x^2 + 0x + 2 \\
 \hline
 x^2
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\text{گام ۲: } -3x^3 \div x^2 = -3x$$

ضرب و تفریق:

$$\begin{array}{r|l}
 \begin{array}{rrrrr}
 x^4 & -3x^3 & +2x^2 & -6x & +4 \\
 -(x^4 & +0x^3 & +2x^2 & &) \\
 \hline
 & -3x^3 & & -6x & +4 \\
 & -(-3x^3 & +0x^2 & -6x &) \\
 \hline
 & & & 0 & +4
 \end{array}
 & \begin{array}{l}
 x^2 + 0x + 2 \\
 \hline
 x^2 - 3x
 \end{array}
 \end{array}$$

باقی مانده ۴ (درجه اش از مقسوم علیه کمتر است) $\Leftarrow$ پایان.

$$\frac{x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 6x + 4}{x^2 + 2} = x^2 - 3x + \frac{4}{x^2 + 2} \quad \text{نتیجه:}$$

مثال ۶: $(4x^3 - 8x^2 - 3x + 9) \div (2x - 3)$

$$\begin{array}{r|l}
\begin{array}{rrrr}
4x^r & -8x^r & -3x & +9 \\
-(4x^r & -6x^r & &)
\end{array} & \begin{array}{l} 2x - 3 \\ 2x^r \end{array} \\
\hline
\begin{array}{rrrr}
-2x^r & -3x & +9 & \\
-(-2x^r & +3x & &)
\end{array} & -x \\
\hline
\begin{array}{rrrr}
-6x & +9 & & \\
-(-6x & +9 & &)
\end{array} & -3 \\
\hline
& 0
\end{array}$$

$$\frac{4x^r - 8x^r - 3x + 9}{2x - 3} = 2x^r - x - 3$$

مثال ٧: $(x^{\diamond} + 2x^{\heartsuit} - 3x^r + x - 5) \div (x^r + x - 1)$

$$\begin{array}{r|l}
\begin{array}{rrrrrr}
x^{\diamond} & +2x^{\heartsuit} & -3x^r & +0x^r & +x & -5 \\
-(x^{\diamond} & +x^{\heartsuit} & -x^r & & &)
\end{array} & \begin{array}{l} x^r + x - 1 \\ x^r \end{array} \\
\hline
\begin{array}{rrrrrr}
x^{\heartsuit} & -2x^r & +0x^r & +x & -5 & \\
-(x^{\heartsuit} & +x^r & -x^r & & &)
\end{array} & +x^r \\
\hline
\begin{array}{rrrrrr}
-3x^r & +x^r & +x & -5 & & \\
-(-3x^r & -3x^r & +3x & & &)
\end{array} & -3x \\
\hline
\begin{array}{rrrrrr}
4x^r & -2x & -5 & & & \\
-(4x^r & +4x & -4 & & &)
\end{array} & +4 \\
\hline
& -6x - 1
\end{array}$$

$$\frac{x^{\diamond} + 2x^{\heartsuit} - 3x^r + x - 5}{x^r + x - 1} = x^r + x^r - 3x + 4 + \frac{-6x - 1}{x^r + x - 1}$$

مثال ٨: $(3x^{\heartsuit} - 5x^r + 4x^r - 2x + 1) \div (x^r - x + 2)$

$$\begin{array}{r|l}
\begin{array}{rrrrr}
3x^{\heartsuit} & -5x^r & +4x^r & -2x & +1 \\
-(3x^{\heartsuit} & -3x^r & +6x^r & &)
\end{array} & \begin{array}{l} x^r - x + 2 \\ 3x^r \end{array} \\
\hline
\begin{array}{rrrrr}
-2x^r & -2x^r & -2x & +1 & \\
-(-2x^r & +2x^r & -4x & &)
\end{array} & -2x \\
\hline
\begin{array}{rrrrr}
-4x^r & +2x & +1 & & \\
-(-4x^r & +4x & -8 & &)
\end{array} & -4 \\
\hline
& -2x + 9
\end{array}$$

$$\frac{3x^{\heartsuit} - 5x^r + 4x^r - 2x + 1}{x^r - x + 2} = 3x^r - 2x - 4 + \frac{-2x + 9}{x^r - x + 2}$$

مثال ٩: $(٢x^٥ - ٧x^٤ + ٣x^٣ + ٥x^٢ - ٨x + ٦) \div (٢x^٢ - ٣x + ١)$

$$\begin{array}{r|l}
 \begin{array}{rrrrrr}
 ٢x^٥ & -٧x^٤ & +٣x^٣ & +٥x^٢ & -٨x & +٦ \\
 -(٢x^٥ & -٣x^٤ & +x^٣ & & &) \\
 \hline
 & -٤x^٤ & +٢x^٣ & +٥x^٢ & -٨x & +٦ \\
 & -(-٤x^٤ & +٦x^٣ & -٢x^٢ & &) \\
 \hline
 & & -٤x^٣ & +٧x^٢ & -٨x & +٦ \\
 & & -(-٤x^٣ & +٦x^٢ & -٢x &) \\
 \hline
 & & & x^٢ & -٦x & +٦ \\
 & & & -(x^٢ & -١/٥x & +٥/٥) \\
 \hline
 & & & & -٤/٥x & +٥/٥
 \end{array}
 &
 \begin{array}{l}
 ٢x^٢ - ٣x + ١ \\
 \hline
 x^٣ \\
 -٢x^٢ \\
 -٢x \\
 +٥/٥
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\frac{٢x^٥ - ٧x^٤ + ٣x^٣ + ٥x^٢ - ٨x + ٦}{٢x^٢ - ٣x + ١} = x^٣ - ٢x^٢ - ٢x + ٥/٥ + \frac{-٤/٥x + ٥/٥}{٢x^٢ - ٣x + ١}$$

مثال ١٠: $(x^٦ - ١) \div (x^٣ - ١)$

$$\begin{array}{r|l}
 \begin{array}{rrrrrrrr}
 x^٦ & +٥x^٥ & +٥x^٤ & +٥x^٣ & +٥x^٢ & +٥x & -١ \\
 -(x^٦ & & & -x^٣ & & &) \\
 \hline
 & & & x^٣ & +٥x^٢ & +٥x & -١ \\
 & & & -(x^٣ & & & -١) \\
 \hline
 & & & & & & ٥
 \end{array}
 &
 \begin{array}{l}
 x^٣ + ٥x^٢ + ٥x - ١ \\
 \hline
 x^٣ \\
 +١
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\frac{x^٦ - ١}{x^٣ - ١} = x^٣ + ١$$

مثال ١١: $(٣x^٥ + ٧x^٤ - ٢x^٣ - x^٢ + ٤x - ٥) \div (x^٢ + ٢x - ٣)$

$$\begin{array}{r|l}
 \begin{array}{rrrrrr}
 ٣x^٥ & +٧x^٤ & -٢x^٣ & -x^٢ & +٤x & -٥ \\
 -(٣x^٥ & +٦x^٤ & -٩x^٣ & & &) \\
 \hline
 & x^٤ & +٧x^٣ & -x^٢ & +٤x & -٥ \\
 & -(x^٤ & +٢x^٣ & -٣x^٢ & &) \\
 \hline
 & & ٥x^٣ & +٢x^٢ & +٤x & -٥ \\
 & & -(٥x^٣ & +١٥x^٢ & -١٥x &) \\
 \hline
 & & & -٨x^٢ & +١٩x & -٥ \\
 & & & -(-٨x^٢ & -١٦x & +٢٤) \\
 \hline
 & & & & ٣٥x & -٢٩
 \end{array}
 &
 \begin{array}{l}
 x^٣ + ٢x - ٣ \\
 \hline
 ٣x^٣ \\
 +x^٢ \\
 +٥x \\
 -٨
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\frac{٣x^٥ + ٧x^٤ - ٢x^٣ - x^٢ + ٤x - ٥}{x^٢ + ٢x - ٣} = ٣x^٣ + x^٢ + ٥x - ٨ + \frac{٣٥x - ٢٩}{x^٢ + ٢x - ٣}$$

مثال ١٢: $(x^v - ١٢٨) \div (x - ٢)$

x^v	$+ \circ x^{\circ}$	$+ \circ x^{\circ}$	$+ \circ x^{\circ}$	$+ \circ x^{\circ}$	$+ \circ x^{\circ}$	$+ \circ x$	$- ١٢٨$	$x - ٢$
$-(x^v$	$- ٢x^{\circ}$							x°
	$٢x^{\circ}$	$+ \circ x^{\circ}$	$+ \circ x^{\circ}$	$+ \circ x^{\circ}$	$+ \circ x^{\circ}$	$+ \circ x$	$- ١٢٨$	$+ ٢x^{\circ}$
	$-(٢x^{\circ}$	$- ٤x^{\circ}$						$+ ٤x^{\circ}$
		$٤x^{\circ}$	$+ \circ x^{\circ}$	$+ \circ x^{\circ}$	$+ \circ x^{\circ}$	$+ \circ x$	$- ١٢٨$	$+ ٨x^{\circ}$
		$-(٤x^{\circ}$	$- ٨x^{\circ}$					$+ ١٦x^{\circ}$
			$٨x^{\circ}$	$+ \circ x^{\circ}$	$+ \circ x^{\circ}$	$+ \circ x$	$- ١٢٨$	$+ ٣٢x^{\circ}$
			$-(٨x^{\circ}$	$- ١٦x^{\circ}$				$+ ٦٤x^{\circ}$
				$١٦x^{\circ}$	$+ \circ x^{\circ}$	$+ \circ x$	$- ١٢٨$	$+ ١٢٨x^{\circ}$
				$-(١٦x^{\circ}$	$- ٣٢x^{\circ}$			$+ ٢٥٦x^{\circ}$
					$٣٢x^{\circ}$	$+ \circ x$	$- ١٢٨$	$+ ٦٤x$
					$-(٣٢x^{\circ}$	$- ٦٤x$		$+ ١٢٨$
						$٦٤x$	$- ١٢٨$	$+ ١٢٨$
						$-(٦٤x$	$- ١٢٨)$	$+ ١٢٨$
							$\circ$	$\circ$

$$\frac{x^v - ١٢٨}{x - ٢} = x^{\circ} + ٢x^{\circ} + ٤x^{\circ} + ٨x^{\circ} + ١٦x^{\circ} + ٣٢x + ٦٤$$

مثال ١٣: $(٤x^{\circ} - ١٢x^{\circ} + ٩x^{\circ} + ٨x^{\circ} - ١٤x^{\circ} + ٤x - ١) \div (٢x^{\circ} - ٣x + ١)$

$٤x^{\circ}$	$- ١٢x^{\circ}$	$+ ٩x^{\circ}$	$+ ٨x^{\circ}$	$- ١٤x^{\circ}$	$+ ٤x$	$- ١$	$٢x^{\circ} - ٣x + ١$
$-(٤x^{\circ}$	$- ٦x^{\circ}$	$+ ٢x^{\circ}$					$٢x^{\circ}$
	$- ٦x^{\circ}$	$+ ٧x^{\circ}$	$+ ٨x^{\circ}$	$- ١٤x^{\circ}$	$+ ٤x$	$- ١$	$- ٣x^{\circ}$
	$-(- ٦x^{\circ}$	$+ ٩x^{\circ}$	$- ٣x^{\circ}$				$- x^{\circ}$
		$- ٢x^{\circ}$	$+ ١١x^{\circ}$	$- ١٤x^{\circ}$	$+ ٤x$	$- ١$	$- x^{\circ}$
		$-(- ٢x^{\circ}$	$+ ٣x^{\circ}$	$- x^{\circ}$			$+ ٤x$
			$٨x^{\circ}$	$- ١٣x^{\circ}$	$+ ٤x$	$- ١$	$- x^{\circ}$
			$-(٨x^{\circ}$	$- ١٢x^{\circ}$	$+ ٤x$		$- \circ / ٥$
				$- x^{\circ}$	$\circ$	$- ١$	$- \circ / ٥$
				$-(- x^{\circ}$	$+ ١ / ٥x$	$- \circ / ٥$	$- \circ / ٥$
					$- ١ / ٥x$	$- \circ / ٥$	$- \circ / ٥$

$$\frac{٤x^{\circ} - ١٢x^{\circ} + ٩x^{\circ} + ٨x^{\circ} - ١٤x^{\circ} + ٤x - ١}{٢x^{\circ} - ٣x + ١} = ٢x^{\circ} - ٣x^{\circ} - x^{\circ} + ٤x - \circ / ٥ + \frac{- ١ / ٥x - \circ / ٥}{٢x^{\circ} - ٣x + ١}$$

مثال ١٤: $(x^{\wedge} + x^{\circ} - ٢x^{\circ} + ٣x^{\circ} - ٥) \div (x^{\circ} - ١)$

$$\begin{array}{r|l}
\begin{array}{r}
x^{\wedge} + \circ x^{\vee} + x^{\phi} + \circ x^{\delta} - 2x^{\mathfrak{f}} + \circ x^{\mathfrak{r}} + 3x^{\mathfrak{y}} + \circ x - 5 \\
-(x^{\wedge} \phantom{+ \circ x^{\vee} + x^{\phi} + \circ x^{\delta} - 2x^{\mathfrak{f}} + \circ x^{\mathfrak{r}} + 3x^{\mathfrak{y}} + \circ x - 5} - x^{\mathfrak{f}}) \\
\hline
\phantom{-(x^{\wedge} + \circ x^{\vee} + x^{\phi} + \circ x^{\delta} - 2x^{\mathfrak{f}} + \circ x^{\mathfrak{r}} + 3x^{\mathfrak{y}} + \circ x - 5} x^{\phi} + \circ x^{\delta} - x^{\mathfrak{f}} + \circ x^{\mathfrak{r}} + 3x^{\mathfrak{y}} + \circ x - 5 \\
-(x^{\phi} \phantom{+ \circ x^{\delta} - x^{\mathfrak{f}} + \circ x^{\mathfrak{r}} + 3x^{\mathfrak{y}} + \circ x - 5} - x^{\mathfrak{y}}) \\
\hline
\phantom{-(x^{\phi} + \circ x^{\delta} - x^{\mathfrak{f}} + \circ x^{\mathfrak{r}} + 3x^{\mathfrak{y}} + \circ x - 5} - x^{\mathfrak{f}} + \circ x^{\mathfrak{r}} + 4x^{\mathfrak{y}} + \circ x - 5 \\
-(-x^{\mathfrak{f}} \phantom{+ \circ x^{\mathfrak{r}} + 4x^{\mathfrak{y}} + \circ x - 5} + 1) \\
\hline
\phantom{-(x^{\phi} + \circ x^{\delta} - x^{\mathfrak{f}} + \circ x^{\mathfrak{r}} + 4x^{\mathfrak{y}} + \circ x - 5} 4x^{\mathfrak{y}} + \circ x - 6
\end{array}
&
\begin{array}{l}
x^{\mathfrak{f}} + \circ x^{\mathfrak{r}} + \circ x^{\mathfrak{y}} + \circ x - 1 \\
\hline
x^{\mathfrak{f}} \\
+ x^{\mathfrak{y}} \\
- 1
\end{array}
\end{array}$$

$$\frac{x^{\wedge} + x^{\phi} - 2x^{\mathfrak{f}} + 3x^{\mathfrak{y}} - 5}{x^{\mathfrak{f}} - 1} = x^{\mathfrak{f}} + x^{\mathfrak{y}} - 1 + \frac{4x^{\mathfrak{y}} - 6}{x^{\mathfrak{f}} - 1}$$

مثال ١٥: $(2x^{\vee} - 3x^{\phi} + 5x^{\mathfrak{f}} - 4x^{\mathfrak{r}} + 6x^{\mathfrak{y}} - 2x + 3) \div (x^{\mathfrak{r}} - x + 2)$

$$\begin{array}{r|l}
\begin{array}{r}
2x^{\vee} - 3x^{\phi} + \circ x^{\delta} + 5x^{\mathfrak{f}} - 4x^{\mathfrak{r}} + 6x^{\mathfrak{y}} - 2x + 3 \\
-(2x^{\vee} \phantom{- 3x^{\phi} + \circ x^{\delta} + 5x^{\mathfrak{f}} - 4x^{\mathfrak{r}} + 6x^{\mathfrak{y}} - 2x + 3} - 2x^{\delta} + 4x^{\mathfrak{f}}) \\
\hline
\phantom{-(2x^{\vee} - 3x^{\phi} + \circ x^{\delta} + 5x^{\mathfrak{f}} - 4x^{\mathfrak{r}} + 6x^{\mathfrak{y}} - 2x + 3} - 3x^{\phi} + 2x^{\delta} + x^{\mathfrak{f}} - 4x^{\mathfrak{r}} + 6x^{\mathfrak{y}} - 2x + 3 \\
-(-3x^{\phi} \phantom{+ 2x^{\delta} + x^{\mathfrak{f}} - 4x^{\mathfrak{r}} + 6x^{\mathfrak{y}} - 2x + 3} + 2x^{\mathfrak{f}} - 6x^{\mathfrak{r}}) \\
\hline
\phantom{-(2x^{\vee} - 3x^{\phi} + \circ x^{\delta} + 5x^{\mathfrak{f}} - 4x^{\mathfrak{r}} + 6x^{\mathfrak{y}} - 2x + 3} 2x^{\delta} - 2x^{\mathfrak{f}} + 2x^{\mathfrak{r}} + 6x^{\mathfrak{y}} - 2x + 3 \\
-(2x^{\delta} \phantom{- 2x^{\mathfrak{f}} + 2x^{\mathfrak{r}} + 6x^{\mathfrak{y}} - 2x + 3} - 2x^{\mathfrak{r}} + 4x^{\mathfrak{y}}) \\
\hline
\phantom{-(2x^{\vee} - 3x^{\phi} + \circ x^{\delta} + 5x^{\mathfrak{f}} - 4x^{\mathfrak{r}} + 6x^{\mathfrak{y}} - 2x + 3} - 2x^{\mathfrak{f}} + 4x^{\mathfrak{r}} + 2x^{\mathfrak{y}} - 2x + 3 \\
-(-2x^{\mathfrak{f}} \phantom{+ 4x^{\mathfrak{r}} + 2x^{\mathfrak{y}} - 2x + 3} + 2x^{\mathfrak{y}} - 4x) \\
\hline
\phantom{-(2x^{\vee} - 3x^{\phi} + \circ x^{\delta} + 5x^{\mathfrak{f}} - 4x^{\mathfrak{r}} + 6x^{\mathfrak{y}} - 2x + 3} 4x^{\mathfrak{r}} + \circ x^{\mathfrak{y}} + 2x + 3 \\
-(4x^{\mathfrak{r}} \phantom{+ \circ x^{\mathfrak{y}} + 2x + 3} - 4x^{\mathfrak{y}} + 8x) \\
\hline
\phantom{-(2x^{\vee} - 3x^{\phi} + \circ x^{\delta} + 5x^{\mathfrak{f}} - 4x^{\mathfrak{r}} + 6x^{\mathfrak{y}} - 2x + 3} 4x^{\mathfrak{y}} - 6x + 3
\end{array}
&
\begin{array}{l}
x^{\mathfrak{r}} + \circ x^{\mathfrak{y}} - x + 2 \\
\hline
2x^{\mathfrak{f}} \\
- 3x^{\mathfrak{r}} \\
+ 2x^{\mathfrak{y}} \\
- 2x \\
+ 4
\end{array}
\end{array}$$

$$\frac{2x^{\vee} - 3x^{\phi} + 5x^{\mathfrak{f}} - 4x^{\mathfrak{r}} + 6x^{\mathfrak{y}} - 2x + 3}{x^{\mathfrak{r}} - x + 2} = 2x^{\mathfrak{f}} - 3x^{\mathfrak{r}} + 2x^{\mathfrak{y}} - 2x + 4 + \frac{4x^{\mathfrak{y}} - 6x + 3}{x^{\mathfrak{r}} - x + 2}$$

مثال ١٦: $(x^{\wedge} - 256) \div (x - 2)$

$$\begin{array}{r}
 x^8 \\
 \hline
 -(x^8 - 2x^7) \\
 \hline
 2x^7 \\
 -(2x^7 - 4x^6) \\
 \hline
 4x^6 \\
 -(4x^6 - 8x^5) \\
 \hline
 8x^5 \\
 -(8x^5 - 16x^4) \\
 \hline
 16x^4 \\
 -(16x^4 - 32x^3) \\
 \hline
 32x^3 \\
 -(32x^3 - 64x^2) \\
 \hline
 64x^2 \\
 -(64x^2 - 128x) \\
 \hline
 128x \\
 -(128x - 256) \\
 \hline
 256
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 x - 2 \\
 \hline
 x^7 \\
 + 2x^6 \\
 + 4x^5 \\
 + 8x^4 \\
 + 16x^3 \\
 + 32x^2 \\
 + 64x \\
 + 128 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

$$\frac{x^8 - 256}{x - 2} = x^7 + 2x^6 + 4x^5 + 8x^4 + 16x^3 + 32x^2 + 64x + 128$$

۴ میان‌بر برای مقسوم‌علیه‌های $x - c$: تقسیم ترکیبی (هورنر)

روش سریع: تقسیم ترکیبی یا هورنر

زمانی که مقسوم‌علیه به صورت $x - c$ باشد، می‌توانیم به جای نوشتن کل عبارت x ، تنها با ضرایب کار کنیم. این روش سریع و بسیار ساده، تقسیم ترکیبی نام دارد.

دستورالعمل گام به گام

۱. ضرایب **مقسوم** را به ترتیب نزولی بنویسید. هر توانی که وجود نداشت، ضریب آن را صفر بگذارید.
۲. عدد c را سمت چپ جدول قرار دهید.
۳. اولین ضریب را عیناً به ردیف پایین بیاورید. این عدد، ضریب اولین جمله **خارج‌قسمت** است.
۴. عدد پایین آمده را در c ضرب کنید و حاصل را زیر ضریب بعدی بنویسید.
۵. ستون را جمع جبری کنید و نتیجه را در همان ردیف پایین بنویسید.
۶. عدد تازه را دوباره در c ضرب کنید و به ستون بعدی بروید. این کار را تا آخرین ضریب تکرار کنید.
۷. آخرین عدد ردیف پایین، **باقی مانده** است؛ سایر اعداد، ضرایب **خارج‌قسمت** هستند که یک درجه از مقسوم کمتر دارد.

مثال ۱: $(x^2 - 4x + 3) \div (x - 1)$

$c = 1$. ضرایب مقسوم: ۳، -۴، ۱.

گام ۱: ضرایب را ردیف کرده و C را سمت چپ می‌گذاریم. اولین ضریب (۱) را مستقیم به ردیف پایین می‌آوریم:

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -4 & 3 & \\ \hline & & & & 1 \end{array}$$

گام ۲: عدد ۱ را در ۱ ضرب می‌کنیم و زیر ۴ می‌نویسیم. سپس جمع می‌زنیم: $-4 + 1 = -3$.

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -4 & 3 & \\ \hline & & 1 & & \\ & & & & 1 \end{array}$$

گام ۳: عدد ۳ را در ۱ ضرب کرده، زیر ۳ می‌گذاریم و جمع می‌زنیم: $3 + (-3) = 0$. این عدد آخری، باقی‌مانده است.

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -4 & 3 & \\ \hline & & 1 & -3 & \\ & & & & 0 \end{array}$$

نتیجه: خارج قسمت $x - 3$ و باقی‌مانده ۰ است. (کنترل با قضیه باقی‌مانده: $P(1) = 1 - 4 + 3 = 0$)

مثال ۲: $(2x^3 - 3x^2 + 0x + 5) \div (x + 2)$

مقسوم‌علیه $x + 2 = x - (-2)$ است، پس $C = -2$. ضرایب مقسوم: ۵، ۰، -۳، ۲.

گام ۱: اولین ضریب را پایین می‌آوریم.

$$\begin{array}{c|cccc} -2 & 2 & -3 & 0 & 5 \\ \hline & & & & 2 \end{array}$$

گام ۲: $(-2) \times 2 = -4$ ؛ با ۳ جمع می‌شود: -۷.

$$\begin{array}{c|cccc} -2 & 2 & -3 & 0 & 5 \\ \hline & & -4 & & \\ & & & & 2 \end{array}$$

گام ۳: $(-2) \times (-7) = 14$ ؛ با ۰ جمع می‌شود: ۱۴.

$$\begin{array}{c|cccc} -2 & 2 & -3 & 0 & 5 \\ \hline & & -4 & 14 & \\ & & & & 2 \end{array}$$

گام ۴: $(-2) \times 14 = -28$ ؛ با ۵ جمع می‌شود: -۲۳. این باقی‌مانده است.

$$\begin{array}{c|cccc} -2 & 2 & -3 & 0 & 5 \\ \hline & & -4 & 14 & -28 \\ & & & & -23 \end{array}$$

نتیجه: خارج قسمت $2x^2 - 7x + 14$ و باقی‌مانده -۲۳.

(کنترل: $P(-2) = 2(-8) - 3(4) + 0 + 5 = -16 - 12 + 5 = -23$)

این روش دقیقاً همان تقسیم طولی، اما بدون نوشتن متغیر است و سرعت محاسبات را چندین برابر می‌کند.

مثال ۱: $(x^2 + 5x + 6) \div (x + 2)$

$c = -2$ ضرایب مقسوم: ۶، ۵، ۱

گام ۱: اولین ضریب (۱) را پایین می‌آوریم:

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 5 & 6 & \\ & & & & 1 \end{array}$$

گام ۲: $-2 \times 1 = -2$ ؛ با ۵ جمع می‌شود: ۳.

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 5 & 6 & \\ & & -2 & & \\ \hline & 1 & 3 & & \end{array}$$

گام ۳: $-2 \times 3 = -6$ ؛ با ۶ جمع می‌شود: ۰.

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 5 & 6 & \\ & & -2 & -6 & \\ \hline & 1 & 3 & 0 & \end{array}$$

$$(x^2 + 5x + 6) \div (x + 2) = x + 3$$

کنترل با قضیه باقی‌مانده: $P(-2) = (-2)^2 + 5(-2) + 6 = 4 - 10 + 6 = 0$ (برابر با باقی‌مانده)

مثال ۲: $(x^3 - 8) \div (x - 2)$

$c = 2$ ضرایب: -۸، ۰، ۰، ۱ (جمله‌های x^3 و x صفرند)

گام ۱:

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 0 & 0 & -8 \\ & & & & 1 \end{array}$$

گام ۲: $2 \times 1 = 2$ ؛ $0 + 2 = 2$

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 0 & 0 & -8 \\ & & 2 & & \\ \hline & 1 & 2 & & \end{array}$$

گام ۳: $2 \times 2 = 4$ ؛ $0 + 4 = 4$

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 0 & 0 & -8 \\ & & 2 & 4 & \\ \hline & 1 & 2 & 4 & \end{array}$$

گام ۴: $۸ = ۴ \times ۲$ ؛ $-۸ + ۸ = ۰$

$$\begin{array}{r|rrrr} ۲ & ۱ & ۰ & ۰ & -۸ \\ & & ۲ & ۴ & ۸ \\ \hline & ۱ & ۲ & ۴ & ۰ \end{array}$$

$$\frac{x^3 - ۸}{x - ۲} = x^2 + ۲x + ۴$$

کنترل: $P(۲) = ۲^3 - ۸ = ۰$ (برابر با باقی مانده)

مثال ۳: $(۳x^2 - ۵x + ۲) \div (x - ۱)$
 $c = ۱$ ضرایب: ۳، -۵، ۲

$$\begin{array}{r|rrrr} ۱ & ۳ & -۵ & ۲ \\ & & ۳ & -۲ \\ \hline & ۳ & -۲ & ۰ \end{array}$$

گام‌ها: $۳ \xrightarrow{\times ۱} ۳$ ؛ $-۵ + ۳ = -۲$ ؛ $-۲ \xrightarrow{\times ۱} -۲$ ؛ $۲ - (-۲) = ۰$

$$\frac{۳x^2 - ۵x + ۲}{x - ۱} = ۳x - ۲$$

کنترل: $P(۱) = ۳ - ۵ + ۲ = ۰$ (برابر با باقی مانده)

مثال ۴: $(۲x^3 + ۳x^2 - ۵x + ۶) \div (x + ۱)$
 $c = -۱$ ضرایب: ۲، ۳، -۵، ۶

گام ۱: ۲ را پایین می‌آوریم.

$$\begin{array}{r|rrrrr} -۱ & ۲ & ۳ & -۵ & ۶ \\ & & & & & \\ \hline & ۲ & & & & \end{array}$$

گام ۲: $۲ \times (-۱) = -۲$ ؛ $۳ + (-۲) = ۱$

$$\begin{array}{r|rrrrr} -۱ & ۲ & ۳ & -۵ & ۶ \\ & & -۲ & & & \\ \hline & ۲ & ۱ & & & \end{array}$$

گام ۳: $۱ \times (-۱) = -۱$ ؛ $-۵ + (-۱) = -۶$

$$\begin{array}{r|rrrrr} -۱ & ۲ & ۳ & -۵ & ۶ \\ & & -۲ & -۱ & & \\ \hline & ۲ & ۱ & -۶ & & \end{array}$$

گام ۴: $-6 \times (-1) = 6$ ؛ $6 + 6 = 12$

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 2 & 3 & -5 & 6 \\ & & -2 & -1 & 6 \\ \hline & 2 & 1 & -6 & 12 \end{array}$$

$$\frac{2x^3 + 3x^2 - 5x + 6}{x + 1} = 2x^2 + x - 6 + \frac{12}{x + 1}$$

کنترل: $P(-1) = 2(-1)^3 + 3(-1)^2 - 5(-1) + 6 = -2 + 3 + 5 + 6 = 12$ (برابر با باقی مانده)

مثال ۵: $(x^4 - 16) \div (x - 2)$
 $c = 2$ ضرایب: $1, 0, 0, 0, -16$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -16 \\ & & 2 & 4 & 8 & 16 \\ \hline & 1 & 2 & 4 & 8 & 0 \end{array}$$

$$\frac{x^4 - 16}{x - 2} = x^3 + 2x^2 + 4x + 8$$

کنترل: $P(2) = 2^4 - 16 = 16 - 16 = 0$ (برابر با باقی مانده)

مثال ۶: $(x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 5) \div (x + 3)$
 $c = -3$ ضرایب: $1, -3, 2, -1, 5$

$$\begin{array}{r|rrrrr} -3 & 1 & -3 & 2 & -1 & 5 \\ & & -3 & 18 & -60 & 183 \\ \hline & 1 & -6 & 20 & -61 & 188 \end{array}$$

$$\frac{x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 5}{x + 3} = x^3 - 6x^2 + 20x - 61 + \frac{188}{x + 3}$$

کنترل: $P(-3) = 81 + 81 + 18 + 3 + 5 = 188$ (برابر با باقی مانده)

مثال ۷: $(2x^5 - 3x^4 + 5x^3 - x + 1) \div (x - 1)$
 $c = 1$ ضرایب: $2, -3, 5, -1, 1$ (جمله x^3 صفر)

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 1 & 2 & -3 & 0 & 5 & -1 & 1 \\ & & 2 & -1 & -1 & 4 & 3 \\ \hline & 2 & -1 & -1 & 4 & 3 & 4 \end{array}$$

$$\frac{2x^5 - 3x^4 + 5x^3 - x + 1}{x - 1} = 2x^4 - x^3 - x^2 + 4x + 3 + \frac{4}{x - 1}$$

کنترل: $P(1) = 2 - 3 + 0 + 5 - 1 + 1 = 4$ (برابر با باقی مانده)

مثال ۸: $(x^5 + 1) \div (x + 1)$

$c = -1$ ضرایب: ۱, ۰, ۰, ۰, ۰, ۱

$$\begin{array}{r|rrrrrr} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\frac{x^5 + 1}{x + 1} = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$$

کنترل: $P(-1) = -1 + 1 = 0$ (برابر با باقی مانده)

مثال ۹: $(4x^4 - 3x^3 + 2x - 5) \div (x - 2)$

$c = 2$ ضرایب: ۴, ۰, -۳, ۲, -۵

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 4 & 0 & -3 & 2 & -5 \\ & & 8 & 16 & 26 & 56 \\ \hline & 4 & 8 & 13 & 28 & 51 \end{array}$$

$$\frac{4x^4 - 3x^3 + 2x - 5}{x - 2} = 4x^3 + 8x^2 + 13x + 28 + \frac{51}{x - 2}$$

کنترل: $P(2) = 4(16) - 3(4) + 4 - 5 = 64 - 12 + 4 - 5 = 51$ (برابر با باقی مانده)

مثال ۱۰: $(x^6 - 64) \div (x - 2)$

$c = 2$ ضرایب: ۱, ۰, ۰, ۰, ۰, ۰, -۶۴

$$\begin{array}{r|rrrrrrr} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -64 \\ & & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & 64 \\ \hline & 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & 0 \end{array}$$

$$\frac{x^6 - 64}{x - 2} = x^5 + 2x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 16x + 32$$

کنترل: $P(2) = 64 - 64 = 0$ (برابر با باقی مانده)

مثال ۱۱: $(3x^4 + 5x^3 - 2x^2 + x - 4) \div (x + 2)$

$c = -2$ ضرایب: $3, 5, -2, 1, -4$

-2	3	5	-2	1	-4
		-6	2	0	-2
	3	-1	0	1	-6

$$\frac{3x^4 + 5x^3 - 2x^2 + x - 4}{x + 2} = 3x^3 - x^2 + 0x + 1 - \frac{6}{x + 2}$$

کنترل: $P(-2) = 3(16) + 5(-8) - 2(4) - 2 - 4 = 48 - 40 - 8 - 2 - 4 = -6$ (برابر با باقی مانده)

مثال ۱۲: $(2x^3 - 5x^2 + 3x - 7) \div (x - 3)$

$c = 3$ ضرایب: $2, -5, 3, -7$

3	2	-5	3	-7
		6	3	18
	2	1	6	11

$$\frac{2x^3 - 5x^2 + 3x - 7}{x - 3} = 2x^2 + x + 6 + \frac{11}{x - 3}$$

کنترل: $P(3) = 2(27) - 5(9) + 9 - 7 = 54 - 45 + 9 - 7 = 11$ (برابر با باقی مانده)

۵ روش جدول ضرایب

روش جدول ضرایب

این تعمیم، نخستین بار در این جزوه به این شکل آموزشی ارائه می شود.

تقسیم ترکیبی (هورنر) یک میان بر فوق العاده برای مقسوم علیه های خطی $(x - c)$ بود. اما آیا می توان همین ایده را برای مقسوم علیه های با درجه دلخواه نیز به کار گرفت؟ پاسخ مثبت است! روشی که پیش رو دارید، روش جدول ضرایب یا روش ضرایب جدا نام دارد و در واقع همان تقسیم طولی است که تنها با ضرایب و بدون نوشتن متغیر x انجام می شود.

چرا این روش را یاد بگیریم؟

- سرعت بالا: حذف نوشتن x ها و نمادها، خطا را کاهش می دهد.
- نظم و ترتیب: ساختار جدولی، دید کاملاً روشنی از هر مرحله به ما می دهد.
- عمومیت کامل: درست مانند تقسیم طولی، برای هر مقسوم علیه ای (با هر درجه و هر ضریب پیشرو) کار می کند.
- قابلیت برنامه نویسی: به راحتی می توان آن را در یک صفحه گسترده یا کد کامپیوتری پیاده کرد.

دستور گام به گام

۱. ضرایب را مرتب کن: ضرایب **مقسوم** P و **مقسوم علیه** D را به ترتیب نزولی در یک سطر بنویس. جاهای خالی را با صفر پر کن.

۲. اولین ضریب خارج قسمت: اولین ضریب P را بر اولین ضریب D تقسیم کن. این می شود اولین ضریب **خارج قسمت**.

۳. ضرب ردیفی: همه ضرایب D را در همین ضریب Q که پیدا کردی ضرب کن.

۴. تفریق ستونی: نتیجه ضرب را زیر ضرایب متناظر باقی مانده فعلی بنویس (با رعایت ستون هم درجه) و کم کن (یا با قرینه جمع کن).

۵. ادامه بده: اولین ضریب غیر صفر باقی مانده جدید را بر اولین ضریب D تقسیم کن تا ضریب بعدی Q به دست آید. باز هم ضرب ردیفی و تفریق ستونی را تکرار کن.

۶. توقف: آنقدر ادامه بده تا تعداد ضرایب باقی مانده از تعداد ضرایب D کم تر شود. این یعنی درجه R از درجه D کم تر شده است.

یک ترفند مهم و زیبا: اگر ضریب اول **مقسوم علیه** (a) برابر ۱ نباشد، ممکن است در میانه راه به کسر برخورد کنیم. برای اجتناب از این کسر ها، کافی است ابتدا کل **مقسوم** را در a^m ضرب کنیم (m تفاضل درجه P و D است)، سپس تقسیم را با اعداد صحیح انجام دهیم و سرانجام جواب را بر a^m تقسیم کنیم.

مثال ۱: تقسیم بر **مقسوم علیه** درجه ۲

$$P(x) = 4x^3 + 0x^2 - 3x + 2x - 5, \quad D(x) = 2x^2 - x + 1$$

ضرایب P : $4, 0, -3, 2, -5$ ضرایب D : $2, -1, 1$

گام ۱: $2 : 4 = 2$. سطر ضرب را تشکیل می دهیم:

	4	0	-3	2	-5
$2 \times (2, -1, 1)$	4	-2	2		
	0	2	-5	2	-5

گام ۲: اولین ضریب غیر صفر ۲ را بر ۲ تقسیم می کنیم: $2 : 2 = 1$. ضرب و تفریق:

	4	0	-3	2	-5
$2 \times (2, -1, 1)$	4	-2	2		
	0	2	-5	2	-5
$1 \times (2, -1, 1)$		2	-1	1	
	0	0	-4	1	-5

گام ۳: $2 : -4 = -2$. ضرب و تفریق:

	4	0	-3	2	-5
$2 \times (2, -1, 1)$	4	-2	2		
	0	2	-5	2	-5
$1 \times (2, -1, 1)$		2	-1	1	
	0	0	-4	1	-5
$-2 \times (2, -1, 1)$			-4	2	-2
باقی مانده	0	0	0	-1	-3

درجه باقی مانده $(-x - 3)$ از مقسوم علیه کم تر است، پایان.

$$\frac{4x^5 - 3x^4 + 2x - 5}{2x^2 - x + 1} = 2x^3 + x - 2 + \frac{-x - 3}{2x^2 - x + 1}$$

مثال ۲: تقسیم بر مقسوم علیه درجه ۳

$$P(x) = 2x^5 - 3x^4 + 0x^3 + x^2 - x + 4, \quad D(x) = x^3 + 2x - 1$$

ضرایب P : ۴, -۱, ۱, ۰, -۳, ۲, ضرایب D : -۱, ۲, ۰, ۱

گام ۱: $2 \div 1 = 2$. ضرب و تفریق:

	۲	-۳	۰	۱	-۱	۴
$2 \times (1, 0, 2, -1)$	۲	۰	۴	-۲		
	۰	-۳	-۴	۳	-۱	۴

گام ۲: $-3 \div 1 = -3$. ضرب و تفریق:

	۲	-۳	۰	۱	-۱	۴
$2 \times (1, 0, 2, -1)$	۲	۰	۴	-۲		
	۰	-۳	-۴	۳	-۱	۴
$-3 \times (1, 0, 2, -1)$		-۳	۰	-۶	۳	
	۰	۰	-۴	۹	-۴	۴

گام ۳: $-4 \div 1 = -4$. ضرب و تفریق:

	۲	-۳	۰	۱	-۱	۴
$2 \times (1, 0, 2, -1)$	۲	۰	۴	-۲		
	۰	-۳	-۴	۳	-۱	۴
$-3 \times (1, 0, 2, -1)$		-۳	۰	-۶	۳	
	۰	۰	-۴	۹	-۴	۴
$-4 \times (1, 0, 2, -1)$			-۴	۰	-۸	۴
باقی مانده	۰	۰	۰	۹	۴	۰

باقی مانده $9x^2 + 4x$ (درجه ۲) از مقسوم علیه (درجه ۳) کم تر است.

$$\frac{2x^5 - 3x^4 + x^2 - x + 4}{x^3 + 2x - 1} = 2x^2 - 3x - 4 + \frac{9x^2 + 4x}{x^3 + 2x - 1}$$

مثال ۳: فرار از کسر با ترفند مقیاس بندی

$$P(x) = 6x^5 + 5x^4 - 10x + 7, \quad D(x) = 3x^2 + 2x - 1$$

در این جا $a = 3$ (ضریب اول D) و $m = 4 - 2 = 2$ پس $a^m = 9$. مقسوم را در ۹ ضرب می کنیم و سپس تقسیم را با اعداد صحیح انجام می دهیم:

$$9P(x) = 54x^5 + 45x^4 + 0x^3 - 90x + 63$$

	۵۴	۴۵	۰	-۹۰	۶۳
$۱۸ \times (۳, ۲, -۱)$	۵۴	۳۶	-۱۸		
	۰	۹	۱۸	-۹۰	۶۳
$۳ \times (۳, ۲, -۱)$		۹	۶	-۳	
	۰	۰	۱۲	-۸۷	۶۳
$۴ \times (۳, ۲, -۱)$			۱۲	۸	-۴
باقی مانده	۰	۰	۰	-۹۵	۶۷

حال جواب‌ها را بر ۹ تقسیم می‌کنیم:

$$Q(x) = \frac{۱۸x^۲ + ۳x + ۴}{۹} = ۲x^۲ + \frac{۱}{۳}x + \frac{۴}{۹}, \quad R(x) = \frac{-۹۵x + ۶۷}{۹} = -\frac{۹۵}{۹}x + \frac{۶۷}{۹}$$

می‌بینید که تمام طول مسیر، فقط با اعداد صحیح کار شد و هیچ کسری در میانه محاسبات ظاهر نشد. این روش، قدرت و زیبایی تقسیم طولی را با سرعت و دقت یک جدول منظم ترکیب می‌کند.

مثال ۴: $(x^۳ - ۲x^۲ - ۵x + ۶) \div (x^۲ + ۲x - ۱)$

ضرایب مقسوم: ۶، -۵، -۲، ۱؛ ضرایب مقسوم‌علیه: ۱، ۲، -۱

گام ۱: $۱:۱ = ۱$

	۱	-۲	-۵	۶
$۱ \times (۱, ۲, -۱)$	۱	۲	-۱	
	۰	-۴	-۴	۶

گام ۲: $-۴:۱ = -۴$

	۱	-۲	-۵	۶
$۱ \times (۱, ۲, -۱)$	۱	۲	-۱	
	۰	-۴	-۴	۶
$-۴ \times (۱, ۲, -۱)$		-۴	-۸	۴
باقی مانده	۰	۰	-۴	۲

$$\frac{x^۳ - ۲x^۲ - ۵x + ۶}{x^۲ + ۲x - ۱} = x - ۴ + \frac{-۴x + ۲}{x^۲ + ۲x - ۱}$$

مثال ۵: $(۳x^۴ + ۵x^۳ - ۲x^۲ + x - ۴) \div (x^۲ + ۲x + ۲)$

ضرایب مقسوم: -۴، ۱، -۲، ۵، ۳؛ ضرایب مقسوم‌علیه: ۲، ۲، ۱

گام ۱: $۳:۱ = ۳$

	۳	۵	-۲	۱	-۴
$۳ \times (۱, ۲, ۲)$	۳	۶	۶		
	۰	-۱	-۸	۱	-۴

گام ۲: $-۱ \div ۱ = -۱$

	۳	۵	-۲	۱	-۴
$۳ \times (۱, ۲, ۲)$	۳	۶	۶		
	۰	-۱	-۸	۱	-۴
$-۱ \times (۱, ۲, ۲)$		-۱	-۲	-۲	
	۰	۰	-۶	۳	-۴

گام ۳: $-۶ \div ۱ = -۶$

	۳	۵	-۲	۱	-۴
$۳ \times (۱, ۲, ۲)$	۳	۶	۶		
	۰	-۱	-۸	۱	-۴
$-۱ \times (۱, ۲, ۲)$		-۱	-۲	-۲	
	۰	۰	-۶	۳	-۴
$-۶ \times (۱, ۲, ۲)$			-۶	-۱۲	-۱۲
باقی مانده	۰	۰	۰	۱۵	۸

$$\frac{۳x^۳ + ۵x^۲ - ۲x^۲ + x - ۴}{x^۲ + ۲x + ۲} = ۳x^۲ - x - ۶ + \frac{۱۵x + ۸}{x^۲ + ۲x + ۲}$$

مثال ۶: $(۲x^۵ - ۳x^۴ + ۵x^۲ - ۱) \div (x^۳ - x + ۲)$

ضرایب مقسوم: $-۱, ۰, ۵, ۰, -۳, ۲$ ضرایب مقسوم علیه: $۲, -۱, ۰, -۱, ۰, ۱$

گام ۱: $۲ \div ۱ = ۲$

	۲	-۳	۰	۵	۰	-۱
$۲ \times (۱, ۰, -۱, ۲)$	۲	۰	-۲	۴		
	۰	-۳	۲	۱	۰	-۱

گام ۲: $-۳ \div ۱ = -۳$

	۲	-۳	۰	۵	۰	-۱
$۲ \times (۱, ۰, -۱, ۲)$	۲	۰	-۲	۴		
	۰	-۳	۲	۱	۰	-۱
$-۳ \times (۱, ۰, -۱, ۲)$		-۳	۰	۳	-۶	
	۰	۰	۲	-۲	۶	-۱

گام ۳: $۲ \div ۱ = ۲$

	۲	-۳	۰	۵	۰	-۱
$۲ \times (۱, ۰, -۱, ۲)$	۲	۰	-۲	۴		
	۰	-۳	۲	۱	۰	-۱
$-۳ \times (۱, ۰, -۱, ۲)$		-۳	۰	۳	-۶	
	۰	۰	۲	-۲	۶	-۱
$۲ \times (۱, ۰, -۱, ۲)$			۲	۰	-۲	۴
باقی مانده	۰	۰	۰	-۲	۸	-۵

$$\frac{2x^5 - 3x^4 + 5x^3 - 1}{x^2 - x + 2} = 2x^3 - 3x + 2 + \frac{-2x^2 + 8x - 5}{x^2 - x + 2}$$

مثال ۷: $(x^4 - 10x^2 + 9) \div (x^2 - 4)$

ضرایب مقسوم: ۹، ۰، -۱۰، ۰، ۱، ضرایب مقسوم علیه: -۴، ۰، ۱

گام ۱: $1 \div 1 = 1$

	۱	۰	-۱۰	۰	۹
$1 \times (1, 0, -4)$	۱	۰	-۴		
	۰	۰	-۶	۰	۹

گام ۲: $-6 \div 1 = -6$

	۱	۰	-۱۰	۰	۹
$1 \times (1, 0, -4)$	۱	۰	-۴		
	۰	۰	-۶	۰	۹
$-6 \times (1, 0, -4)$			-۶	۰	۲۴
باقی مانده	۰	۰	۰	۰	-۱۵

$$\frac{x^4 - 10x^2 + 9}{x^2 - 4} = x^2 - 6 - \frac{15}{x^2 - 4}$$

مثال ۸: $(12x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 9x - 3) \div (3x^2 + 2x - 1)$

$a^m = 9, m = 2, a = 3$ ابتدا مقسوم را در ۹ ضرب می کنیم:

$$9P = 108x^4 + 45x^3 - 63x^2 + 81x - 27$$

ضرایب $9P$: ۱۰۸، ۴۵، -۶۳، ۸۱، -۲۷، ضرایب مقسوم علیه: -۱، ۲، ۳

گام ۱: $108 \div 3 = 36$

	۱۰۸	۴۵	-۶۳	۸۱	-۲۷
$36 \times (3, 2, -1)$	۱۰۸	۷۲	-۳۶		
	۰	-۲۷	-۲۷	۸۱	-۲۷

گام ۲: $-27 \div 3 = -9$

	۱۰۸	۴۵	-۶۳	۸۱	-۲۷
$36 \times (3, 2, -1)$	۱۰۸	۷۲	-۳۶		
	۰	-۲۷	-۲۷	۸۱	-۲۷
$-9 \times (3, 2, -1)$			-۲۷	-۱۸	۹
	۰	۰	-۹	۷۲	-۲۷

گام ۳: $-3 \div 3 = -9$:

	۱۰۸	۴۵	-۶۳	۸۱	-۲۷
$36 \times (3, 2, -1)$	۱۰۸	۷۲	-۳۶		
	۰	-۲۷	-۲۷	۸۱	-۲۷
$-9 \times (3, 2, -1)$		-۲۷	-۱۸	۹	
	۰	۰	-۹	۷۲	-۲۷
$-3 \times (3, 2, -1)$			-۹	-۶	۳
باقی مانده	۰	۰	۰	۷۸	-۲۴

حال جواب‌ها را بر ۹ تقسیم می‌کنیم:

$$Q = \frac{36x^2 - 9x - 3}{9} = 4x^2 - x - \frac{1}{3}, \quad R = \frac{78x - 24}{9} = \frac{26}{3}x - \frac{8}{3}$$

مثال ۹: $(2x^3 - 5x^2 + 4x - 3) \div (x^2 - x + 1)$

ضرایب مقسوم: $-3, 4, -5, 2$ ضرایب مقسوم‌علیه: $1, -1, 1$

گام ۱: $2 \div 1 = 2$:

	۲	-۵	۴	-۳
$2 \times (1, -1, 1)$	۲	-۲	۲	
	۰	-۳	۲	-۳

گام ۲: $-3 \div 1 = -3$:

	۲	-۵	۴	-۳
$2 \times (1, -1, 1)$	۲	-۲	۲	
	۰	-۳	۲	-۳
$-3 \times (1, -1, 1)$		-۳	۳	-۳
باقی مانده	۰	۰	-۱	۰

$$\frac{2x^3 - 5x^2 + 4x - 3}{x^2 - x + 1} = 2x - 3 + \frac{-x}{x^2 - x + 1}$$

مثال ۱۰: $(x^5 + x^3 + x) \div (x^2 + 1)$

ضرایب مقسوم: $0, 1, 0, 1, 0$ ضرایب مقسوم‌علیه: $1, 0, 1$

گام ۱: $1 \div 1 = 1$:

	۱	۰	۱	۰	۱	۰
$1 \times (1, 0, 1)$	۱	۰	۱			
	۰	۰	۰	۰	۱	۰

درجه باقی مانده (x) از درجه مقسوم علیه (۲) کمتر است، پس کار پایان می یابد.

$$\frac{x^5 + x^3 + x}{x^2 + 1} = x^3 + \frac{x}{x^2 + 1}$$

مثال ۱۱: $(3x^4 + 2x^3 - x^2 + 5) \div (x^2 - x + 2)$

ضرایب مقسوم: ۵, ۰, -۱, ۲, ۳ ضرایب مقسوم علیه: ۲, -۱, ۱

گام ۱: $3 \div 1 = 3$:

	۳	۲	-۱	۰	۵
$3 \times (1, -1, 2)$	۳	-۳	۶		
	۰	۵	-۷	۰	۵

گام ۲: $5 \div 1 = 5$:

	۳	۲	-۱	۰	۵
$3 \times (1, -1, 2)$	۳	-۳	۶		
	۰	۵	-۷	۰	۵
$5 \times (1, -1, 2)$		۵	-۵	۱۰	
	۰	۰	-۲	-۱۰	۵

گام ۳: $-2 \div 1 = -2$:

	۳	۲	-۱	۰	۵
$3 \times (1, -1, 2)$	۳	-۳	۶		
	۰	۵	-۷	۰	۵
$5 \times (1, -1, 2)$		۵	-۵	۱۰	
	۰	۰	-۲	-۱۰	۵
$-2 \times (1, -1, 2)$			-۲	۲	-۴
باقی مانده	۰	۰	۰	-۱۲	۹

$$\frac{3x^4 + 2x^3 - x^2 + 5}{x^2 - x + 2} = 3x^2 + 5x - 2 + \frac{-12x + 9}{x^2 - x + 2}$$

مثال ۱۲: $(4x^5 - 2x^4 + 3x^3 - x^2 + 2x - 1) \div (2x^3 + x - 1)$

$a^m = 4, m = 5 - 3 = 2, a = 2$ مقسوم را در ۴ ضرب می کنیم:

$$4P = 16x^5 - 8x^4 + 12x^3 - 4x^2 + 8x - 4$$

ضرایب $4P$: -۴, ۸, -۴, ۱۲, -۸, ۱۶ ضرایب D : -۱, ۱, ۰, ۲

گام ۱: $۱۶ \div ۲ = ۸$

	۱۶	-۸	۱۲	-۴	۸	-۴
$۸ \times (۲, ۰, ۱, -۱)$	۱۶	۰	۸	-۸		
	۰	-۸	۴	۴	۸	-۴

گام ۲: $-۸ \div ۲ = -۴$

	۱۶	-۸	۱۲	-۴	۸	-۴
$۸ \times (۲, ۰, ۱, -۱)$	۱۶	۰	۸	-۸		
	۰	-۸	۴	۴	۸	-۴
$-۴ \times (۲, ۰, ۱, -۱)$		-۸	۰	-۴	۴	
	۰	۰	۴	۸	۴	-۴

گام ۳: $۴ \div ۲ = ۲$

	۱۶	-۸	۱۲	-۴	۸	-۴
$۸ \times (۲, ۰, ۱, -۱)$	۱۶	۰	۸	-۸		
	۰	-۸	۴	۴	۸	-۴
$-۴ \times (۲, ۰, ۱, -۱)$		-۸	۰	-۴	۴	
	۰	۰	۴	۸	۴	-۴
$۲ \times (۲, ۰, ۱, -۱)$			۴	۰	۲	-۲
باقی مانده	۰	۰	۰	۸	۲	-۲

تقسیم بر ۴:

$$Q = \frac{۸x^۲ - ۴x + ۲}{۴} = ۲x^۲ - x + \frac{۱}{۲}, \quad R = \frac{۸x^۲ + ۲x - ۲}{۴} = ۲x^۲ + \frac{۱}{۲}x - \frac{۱}{۲}$$

مثال ۱۳: $(x^۶ - ۱) \div (x^۲ + x + ۱)$

ضرایب مقسوم: $-۱, ۰, ۰, ۰, ۰, ۰, ۱$ ضرایب مقسوم علیه: $۱, ۱, ۱$

گام ۱: $۱ \div ۱ = ۱$

	۱	۰	۰	۰	۰	۰	-۱
$۱ \times (۱, ۱, ۱)$	۱	۱	۱				
	۰	-۱	-۱	۰	۰	۰	-۱

گام ۲: $-۱ \div ۱ = -۱$

	۱	۰	۰	۰	۰	۰	-۱
$۱ \times (۱, ۱, ۱)$	۱	۱	۱				
	۰	-۱	-۱	۰	۰	۰	-۱
$-۱ \times (۱, ۱, ۱)$		-۱	-۱	-۱			
	۰	۰	۰	-۱	۰	۰	-۱

گام ۳: $-1 \div 1 = -1$

	۱	۰	۰	۰	۰	۰	-۱
$1 \times (1, 1, 1)$	۱	۱	۱				
	۰	-۱	-۱	۰	۰	۰	-۱
$-1 \times (1, 1, 1)$	-۱	-۱	-۱				
	۰	۰	۰	-۱	۰	۰	-۱
$-1 \times (1, 1, 1)$				-۱	-۱	-۱	
	۰	۰	۰	۰	-۱	-۱	-۱

گام ۴: $-1 \div 1 = -1$

	۱	۰	۰	۰	۰	۰	-۱
$1 \times (1, 1, 1)$	۱	۱	۱				
	۰	-۱	-۱	۰	۰	۰	-۱
$-1 \times (1, 1, 1)$	-۱	-۱	-۱				
	۰	۰	۰	-۱	۰	۰	-۱
$-1 \times (1, 1, 1)$				-۱	-۱	-۱	
	۰	۰	۰	۰	-۱	-۱	-۱
$-1 \times (1, 1, 1)$					-۱	-۱	-۱
باقی مانده	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰

$$\frac{x^8 - 1}{x^3 + x + 1} = x^5 - x^2 + x - 1$$

مثال ۱۴: $(6x^5 + 7x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 4) \div (3x^2 - x + 1)$

$a = 3, m = 5 - 2 = 3, a^m = 27$ مقسوم را در ۲۷ ضرب می‌کنیم:

$27P = 162x^5 + 189x^4 - 81x^3 + 54x^2 - 27x + 108$

ضرایب $27P$: ۱۶۲, ۱۸۹, -۸۱, ۵۴, -۲۷, ۱۰۸ ضرایب D : ۳, -۱, ۱

گام ۱: $162 \div 3 = 54$

	۱۶۲	۱۸۹	-۸۱	۵۴	-۲۷	۱۰۸
$54 \times (3, -1, 1)$	۱۶۲	-۵۴	۵۴			
	۰	۲۴۳	-۱۳۵	۵۴	-۲۷	۱۰۸

گام ۲: $243 \div 3 = 81$

	۱۶۲	۱۸۹	-۸۱	۵۴	-۲۷	۱۰۸
$54 \times (3, -1, 1)$	۱۶۲	-۵۴	۵۴			
	۰	۲۴۳	-۱۳۵	۵۴	-۲۷	۱۰۸
$81 \times (3, -1, 1)$		۲۴۳	-۸۱	۸۱		
	۰	۰	-۵۴	-۲۷	-۲۷	۱۰۸

گام ۳: $-۱۸ : ۳ = -۵۴$:

	۱۶۲	۱۸۹	-۸۱	۵۴	-۲۷	۱۰۸
$۵۴ \times (۳, -۱, ۱)$	۱۶۲	-۵۴	۵۴			
	۰	۲۴۳	-۱۳۵	۵۴	-۲۷	۱۰۸
$۸۱ \times (۳, -۱, ۱)$		۲۴۳	-۸۱	۸۱		
	۰	۰	-۵۴	-۲۷	-۲۷	۱۰۸
$-۱۸ \times (۳, -۱, ۱)$			-۵۴	۱۸	-۱۸	
	۰	۰	۰	-۴۵	-۹	۱۰۸

گام ۴: $-۱۵ : ۳ = -۴۵$:

	۱۶۲	۱۸۹	-۸۱	۵۴	-۲۷	۱۰۸
$۵۴ \times (۳, -۱, ۱)$	۱۶۲	-۵۴	۵۴			
	۰	۲۴۳	-۱۳۵	۵۴	-۲۷	۱۰۸
$۸۱ \times (۳, -۱, ۱)$		۲۴۳	-۸۱	۸۱		
	۰	۰	-۵۴	-۲۷	-۲۷	۱۰۸
$-۱۸ \times (۳, -۱, ۱)$			-۵۴	۱۸	-۱۸	
	۰	۰	۰	-۴۵	-۹	۱۰۸
$-۱۵ \times (۳, -۱, ۱)$				-۴۵	۱۵	-۱۵
باقی مانده	۰	۰	۰	۰	-۲۴	۱۲۳

تقسیم بر ۲۷:

$$Q = \frac{۵۴x^۳ + ۸۱x^۲ - ۱۸x - ۱۵}{۲۷} = ۲x^۳ + ۳x^۲ - \frac{۲}{۳}x - \frac{۵}{۹}, \quad R = \frac{-۲۴x + ۱۲۳}{۲۷} = -\frac{۸}{۹}x + \frac{۴۱}{۹}$$

۶ قضیه‌های طلایی

قضیه باقی مانده و قضیه عامل

تا اینجا یاد گرفتیم که برای مقسوم علیه‌های خطی $(x - c)$ هم می‌توانیم از تقسیم طولی استفاده کنیم، هم از روش ترکیبی (هورنر). اکنون دو حقیقت بسیار زیبا را بررسی می‌کنیم که کار ما را به شدت ساده‌تر می‌کنند.

قضیه ۱: قضیه باقی مانده

اگر چند جمله‌ای $P(x)$ را بر $x - c$ تقسیم کنیم، آن‌گاه باقی مانده دقیقاً برابر است با $P(c)$.

چرا؟ از الگوریتم تقسیم می‌دانیم:

$$P(x) = (x - c) \cdot Q(x) + R$$

حال اگر $x = c$ را در رابطه قرار دهیم، جمله $(x - c)Q(x)$ صفر می‌شود و می‌ماند:

$$P(c) = R$$

بنابراین بدون آن‌که حتی یک گام تقسیم انجام دهیم، می‌توانیم با جایگذاری $x = c$ در چند جمله‌ای، باقی مانده را پیدا کنیم.

مثال: در تقسیم $(x^۳ - ۴x + ۳) \div (x - ۱)$ پیش‌تر با روش ترکیبی باقی مانده را ۰ یافتیم. با قضیه باقی مانده نیز:

$$P(۱) = ۱^۳ - ۴(۱) + ۳ = ۱ - ۴ + ۳ = ۰$$

که دقیقاً همان باقی مانده است.

قضیه ۲: قضیه عامل

اگر برای چند جمله‌ای $P(x)$ داشته باشیم $P(c) = 0$ ، آنگاه $x - c$ یک عامل (فاکتور) $P(x)$ است. به زبان ساده‌تر: $P(x)$ بر $x - c$ بخش پذیر است.

چرا؟ طبق قضیه باقی مانده، $R = P(c)$. حال اگر $P(c) = 0$ ، آنگاه $R = 0$ و این یعنی تقسیم دقیق انجام شده است. پس $x - c$ مقسوم‌علیه‌ای است که $P(x)$ را بدون باقی مانده می‌سازد ← عامل است.

کاربرد: برای آن‌که بفهمیم آیا $x - 1$ در یک چند جمله‌ای بزرگ ضرب شده است یا نه، فقط کافی است $x = 1$ بگذاریم. اگر جواب صفر شد، $x - 1$ یک عامل آن چند جمله‌ای است.

این دو قضیه، شاه‌کلیدهای جبر هستند و در ادامه مسیر، بارها و بارها به کارتان خواهند آمد.

$$\text{مثال ۱: } (x^2 + 5x + 6) \div (x + 2)$$

با قضیه باقی مانده ($c = -2$):

$$P(-2) = (-2)^2 + 5(-2) + 6 = 4 - 10 + 6 = 0$$

پس باقی مانده ۰ است و طبق قضیه عامل، $x + 2$ یک عامل $x^2 + 5x + 6$ می‌باشد.

$$\text{مثال ۲: } (2x^3 - 3x^2 + 0x + 5) \div (x + 2)$$

$c = -2$:

$$P(-2) = 2(-8) - 3(4) + 0 + 5 = -16 - 12 + 5 = -23$$

باقی مانده -23 است (نیازی به انجام تقسیم نبود). از آنجا که باقی مانده صفر نشده، $x + 2$ عامل $P(x)$ نیست.

$$\text{مثال ۳: } (x^3 - 8) \div (x - 2)$$

$c = 2$:

$$P(2) = 2^3 - 8 = 8 - 8 = 0$$

باقی مانده ۰ است، بنابراین $x - 2$ یک عامل $x^3 - 8$ است. (اتحاد تفاضل مکعبات را به یاد آورید: $x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$)

$$\text{مثال ۴: } (x^4 - 16) \div (x + 1)$$

$c = -1$:

$$P(-1) = (-1)^4 - 16 = 1 - 16 = -15$$

باقی مانده -15 است، پس $x + 1$ عامل $x^4 - 16$ نیست.

مثال ۵: $(3x^4 + 5x^3 - 2x^2 + x - 4) \div (x - 1)$

$$:C = 1$$

$$P(1) = 3 + 5 - 2 + 1 - 4 = 3$$

باقی مانده ۳ است. چون صفر نشده، $x - 1$ عامل نیست.

مثال ۶: بررسی عامل بودن $x + 3$ برای $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 5$

$$:C = -3$$

$$P(-3) = 81 + 81 + 18 + 3 + 5 = 188$$

باقی مانده ۱۸۸ است، بنابراین $x + 3$ عامل نیست.

نکته: این همان مثال ۶ از بخش تقسیم ترکیبی است. دیدیم که جدول هورنر هم دقیقاً همین عدد را به عنوان باقی مانده نشان داد.

۷ روش های ابتکاری دیگر

چند روش جالب دیگر (در یک نگاه)

علاوه بر روش هایی که گفتیم، چند فن دیگر هم هست که گاهی خیلی کار را ساده می کنند:

- تجزیه مقسوم: اگر بتوانیم مقسوم را طوری تجزیه کنیم که عامل مشترک با مقسوم علیه داشته باشد، با خط زدن آن ها کار تمام است.
- درون یابی: اگر مقسوم علیه ریشه های مشخصی داشته باشد، می توانیم با جایگذاری آن ریشه ها در مقسوم، باقی مانده را به دست آوریم و بعد تقسیم را کامل کنیم.
- جایگذاری جبری: برای مقسوم علیه های خاص مثل $x^2 + 1$ یا $x^3 - 1$ می توان از رابطه جبری بین توان ها استفاده کرد و باقی مانده را سریع پیدا کرد.

این روش ها را بعداً با مثال های مفصل خواهید دید.

گزارش اشتباهات و ارسال نظرات

اگر در این مجموعه نمونه سوال، اشتباه تایپی، اشتباه محاسباتی یا مشکل دیگری مشاهده کردید، یا اگر پیشنهادی برای بهبود آن دارید، لطفاً از راه‌های ارتباطی زیر به ما اطلاع دهید.

تلگرام:	@Rasoul_mn @yousof_lhc
ایتا:	@yousof_lhc
رویتکا:	@yousof_lhc
سروش:	@yousof_lhc
بله:	@yousof_lhc
ایمیل:	rasoul.mnm@gmail.com
	y.ghalenoiei@gmail.com

alphaamath.com