

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}^{(4)} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}^{(3)} \quad \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}^{(2)} \quad \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}^{(1)}$$

$$A + C = B + D \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} + X \Rightarrow X = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} \quad (\text{حل})$$

نکته: در هر n ضلعی منتظم، مجموع مختصات n رأس با n برابر مختصات مرکز آن برابر است.

بردار

*** اندازه بردار** $\vec{a} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ از رابطه $\sqrt{x^2 + y^2}$ به دست می آید.

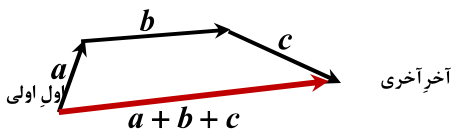
$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5 \quad \text{اندازه بردار } \vec{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} \text{ را به دست آورید.}$$

بردارهای مساوی: بردارهایی که هم جهت، هم اندازه و هم راستا (موازی) باشند.

روش های رسم بردار حاصل جمع، برای چند بردار:

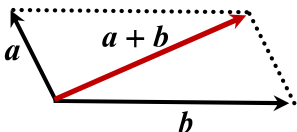
روش اول: روش مثلث: هر گاه ابتدای یک بردار انتهای بردار دیگر باشد. به عبارت دیگر بردارها پشت سرهم (متوالی) باشند.

برای رسم بردار حاصل جمع ابتدای بردار اول را به انتهای بردار آخر وصل می کنیم. (اول اولی را به آخر آخری وصل می کنیم).



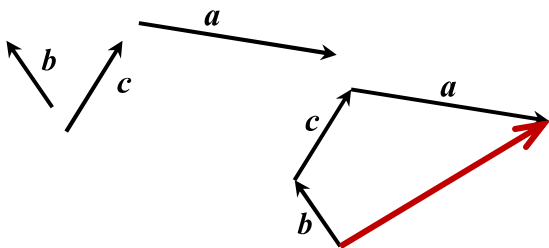
روش دوم: روش متوازی الاضلاع: هرگاه ابتدای دو بردار یکی باشد. (دو بردار از یک نقطه شروع شوند).

در این روش بردار حاصل جمع، قطری از متوازی الاضلاع می شود که از ابتدای دو بردار رسم می شود.



تذکر مهم: اگر بردارها هیچ یک از شرایط گفته شده در روشهای بالا را نداشته باشند. با استفاده از **بردارهای مساوی و انتقال** می

توان بردارها را به یکی از دو روش بالا تبدیل کرد و سپس بردار حاصل جمع را رسم کرد.



مثال: بردار حاصل جمع بردارهای مقابل را رسم کنید.

ابتدا یکی از بردارها رسم کرده و سپس با کمک روش مثلث بردارهایی مساوی

با دو بردار و متوالی هم، رسم می کنیم و در آخر بردار حاصل جمع را رسم میکنیم.

★ اگر طول و عرض برداری k برابر شود اندازه بردار نیز k برابر می شود که اگر k مثبت باشد بردار حاصل با بردار اولی موازی و هم جهت می شود ولی اگر k منفی باشد بردار حاصل با بردار اولی موازی ولی در خلاف جهت می شود.

مثال: اگر $\vec{a}$ یک بردار دلفوا باشد بردار $3\vec{a}$ برداری موازی و هم جهت با بردار $\vec{a}$ می باشد که اندازه آن ۳ برابر بردار $\vec{a}$ است. و بردار $5\vec{a}$ برداری است که موازی و در خلاف جهت بردار $\vec{a}$ و اندازه آن ۵ برابر $\vec{a}$ می باشد

★ **قرینه بردار:** بردارهایی که در خلاف جهت هم، هم اندازه و هم راستا (موازی) باشند.

برای قرینه کردن یک بردار کافیست جهت آن را عوض کنیم. قرینه بردار $\vec{AB}$ را با $\vec{BA}$ و قرینه بردار $\vec{a}$ را با $-\vec{a}$ نشان می دهیم. پس برای قرینه کردن مختصات بردار می توان طول و عرض آن را قرینه کرد یا جای ابتدا و انتهای آن را عوض نمود.

★ الف) بردار $\vec{a} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ موازی محور x هاست اگر $y = 0$ باشد و موازی محور y هاست اگر $x = 0$ باشد.

★ ب) بردار $\vec{a} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ موازی نیمساز ربع اول و سوم است اگر $x = y$ باشد. و موازی نیمساز ربع دوم و چهارم است اگر $x = -y$ باشد.

مثال) مقدار m را در بردار $\begin{bmatrix} 6m-12 \\ 30-2m \end{bmatrix}$ چنان تعیین کنید که:

الف) موازی محور طول ها باشد؛ ب) موازی نیمساز ربع دوم و چهارم باشد.

$$\text{الف) } y=0 \Rightarrow 30-2m=0 \Rightarrow m=15$$

$$\begin{aligned} x=-y &\Rightarrow 6m-12=-(30-2m) \Rightarrow 6m-12=-30+2m \Rightarrow 6m-2m=-30+12 \Rightarrow 4m=-18 \Rightarrow \\ \text{ب) } m &= \frac{-18}{4} = \frac{-9}{2} \end{aligned}$$

★ اگر طول و عرض برداری مساوی یا قرینه باشند زاویه ای که با جهت مثبت محور x ها می سازند برابر است با ۴۵ درجه یا ۱۳۵ درجه.

مثال: بردار $\vec{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$ چون طول و عرض آن قرینه هستند زاویه ۱۳۵ درجه می سازند و $\vec{a} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$ چون طول و عرض با هم برابرند زاویه ۴۵ درجه می سازند.

★ دو بردار $\vec{a} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ و $\vec{b} = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$ در صورتی بر هم عمودند که: $mx + ny = 0$ باشد. (یعنی مجموع حاصل ضرب طول ها با حاصل ضرب عرضهای آن دو بردار مساوی صفر شود).

مثال: اگر دو بردار $\vec{a} = \begin{bmatrix} 3m-5 \\ 4 \end{bmatrix}$ و $\vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -m+3 \end{bmatrix}$ برهم عمود باشند مقدار m را پیدا کنید.

حل طبق نکته بالا داریم: $2(3m-5) + 4(-m+3) = 0 \Rightarrow 6m - 10 - 4m + 12 = 0 \Rightarrow 2m = -2 \Rightarrow m = -1$

★ دو بردار $\vec{a} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ و $\vec{b} = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$ در صورتی با هم موازیند که $\frac{x}{m} = \frac{y}{n}$ باشد. (یعنی نسبت طولهای دو بردار مساوی نسبت عرض های دو بردار باشد).

معادله خط

رابطه خطی: بعضی مواقع با متغیرهایی روبه رو می شویم که به یکدیگر وابسته اند و می بینیم که یکی از آنها با افزایش و یا کاهش دیگری با یک نسبت ثابت و معین افزایش یا کاهش می یابد. اگر رابطه بین دو متغیر را با زبان ریاضی بیان کنیم و نمودار آن را در دستگاه مختصات رسم کنیم و **نمودار آنها** به صورت یک **خط راست** درآید می گوئیم رابطه بین آن دو متغیر یک رابطه خطی است. اگر یکی از متغیرها را x و دیگری را y بنامیم رابطه خطی بین این دو متغیر به صورت $y = ax + b$ ($a \neq 0$) نشان داده می شود.

تذکر مهم: در رابطه خطی **توان تمام متغیرها** باید یک باشد.

★ شرط آنکه نقطه ای روی یک خط باشد (یا خط از آن نقطه بگذرد) آنست که با جایگذاری طول نقطه به جای x و عرض نقطه به جای y در معادله خط تساوی برقرار شود.

مثال: آیا نقطه $A = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$ روی خط $3x - 4y = 5$ قرار دارد؟

$$3x - 4y = 5 \Rightarrow 3 \times 5 - 4 \times (-3) = 5 \Rightarrow 15 + 12 \neq 5 \Rightarrow \text{نقطه روی خط نیست}$$

★ نقاطی که عرضشان بزرگتر از قرینه طولشان است بالای نیمساز ربع دوم و چهارم و نقاطی که عرضشان کوچکتر از قرینه طولشان باشد پایین نیمساز ربع دوم و چهارم قرار دارند.

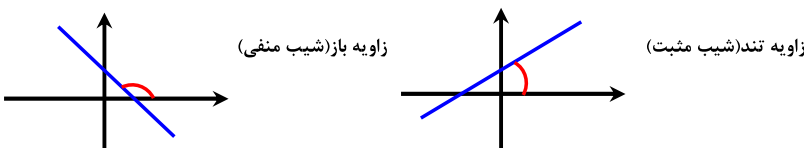
★ نقاطی که عرضشان بزرگتر از طولشان است بالای نیمساز ربع اول و سوم و نقاطی که عرضشان کوچکتر از طولشان است پایین این نیمسازند

★ در معادله خط $y = ax$ ، شیب خط برابر a و عرض از مبدا صفر می باشد.

★ در معادله خط $y = ax + b$ شیب خط برابر a و عرض از مبدا b می باشد.

شیب خط: زاویه ای که خط با **سمت راست محور افقی** (x) می سازد را شیب خط می گوئیم.

اگر این **زاویه تند** باشد شیب خط **مثبت** می شود و اگر این **زاویه باز** باشد شیب خط **منفی** می شود.



روش های پیدا کردن شیب خط:

(۱) **با کمک معادله خط:** برای به دست آوردن شیب و عرض از مبدا با کمک معادله خط باید y را باضرب یک در یک طرف تساوی و دو جمله‌ی شامل x و عدد ثابت را در طرف دیگر بنویسیم که در اینصورت به ضریب x شیب خط و به عدد ثابت عرض از مبدا می‌گوییم.

$$ax + by = c \Rightarrow by = -ax + c \Rightarrow \frac{by}{b} = \frac{-ax}{b} + \frac{c}{b} \Rightarrow y = \underbrace{\left(\frac{-a}{b}\right)}_{\text{شیب}} x + \underbrace{\left(\frac{c}{b}\right)}_{\text{عرض از مبدا}}$$

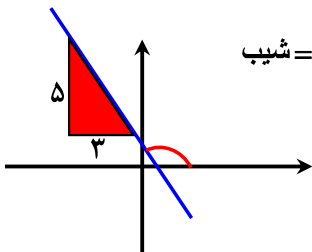
(۲) **با کمک مختصات دو نقطه از خط:** شیب خطی که از دو نقطه $A = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ می‌گذرد برابر است با:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\text{اختلاف عرضها}}{\text{اختلاف طولها}}$$

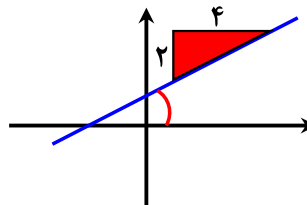
(۳) **با کمک مثلث قائم الزاویه:** مثلثی قائم الزاویه را روی خط طوری در نظر می‌گیریم که وترش کاملاً روی خط منطبق شده باشد اکنون با استفاده از رابطه ضلع عمودی تقسیم بر ضلع افقی مثلث شیب خط را پیدا می‌کنیم. $\text{شیب} = \pm \frac{\text{ضلع عمودی}}{\text{ضلع افقی مثلث}}$

و علامت آن را با توجه به زاویه‌ای که خط با سمت راست محور افقی می‌سازد (زاویه تند علامت مثبت و زاویه باز علامت

منفی) مشخص می‌کنیم.



$$\text{شیب} = \pm \frac{\text{ضلع عمودی}}{\text{ضلع افقی مثلث}} = -\frac{5}{3}$$



$$\text{شیب} = \pm \frac{\text{ضلع عمودی}}{\text{ضلع افقی مثلث}} = +\frac{2}{4} = +\frac{1}{2}$$

★ دو خط وقتی با هم موازیند که شیب خط‌ها با هم برابر باشد.

★ دو خط وقتی بر هم عمودند که شیب آنها قرینه و معکوس باشد. (یا حاصل ضرب شیبها برابر -۱ باشد).

مثال: مقدار a برابر کدام گزینه باشد تا خط $(a-2)x + 4y = 10$ بر خط $4x - 6y = 8$ عمود باشد.

$$9(1) \quad 2(2) \quad -6(3) \quad 1(4) \quad -1(5)$$

$$(a-2)x + 4y = 10 \Rightarrow y = \frac{-(a-2)}{4}x + \frac{10}{4} \Rightarrow \text{شیب} = \frac{-(a-2)}{4}$$

$$4x - 6y = 8 \Rightarrow y = \frac{-4}{-6}x + \frac{8}{-6} \Rightarrow y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3} \Rightarrow \text{شیب} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{3} \times \frac{-(a-2)}{4} = -1 \Rightarrow \frac{-2a+4}{12} = -1 \Rightarrow -2a+4 = -12 \Rightarrow -2a = -16 \Rightarrow a = 8 \text{ باشد}$$

★

نکته: برای اینکه بفهمیم خطها از کدام نواحی دستگاه مختصات عبور می کنند باید **شیب و عرض از مبدا** خط ها را پیدا کنیم.

سه نقطه‌ی A و B و C در صورتی **روی یک خط** قرار می گیرند که شیب خطی که از A و B می گذرد با شیب خطی که از A و C یا از B و C می گذرد برابر باشد.

مثال: سه نقطه‌ی $A = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} k \\ 0 \end{bmatrix}$ مفروضند به ازای چه مقدار k حاصل عبارت $AC + BC$ کمترین مقدار را دارد؟

$$(1) \frac{5}{4} \quad (2) \frac{3}{4} \quad (3) 1 \quad (4) 2$$

حل) عبارت $AC + BC$ وقتی کمترین مقدار می شود که نقاط A و B و C روی یک خط راست باشند پس باید شیب خطی که از هر دو نقطه می گذرد مساوی هم باشد.

$$AB \text{ شیب} = AC \text{ شیب} \Rightarrow \frac{\frac{-1}{2} - 4}{\frac{1}{2} - 5} = \frac{0 - 4}{k - 5} \Rightarrow \frac{-\frac{9}{2}}{-\frac{9}{2}} = \frac{-4}{k - 5} \Rightarrow 1 = \frac{-4}{k - 5} \Rightarrow k - 5 = -4 \Rightarrow k = 1$$

سه نقطه‌ی $A = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ بگذرد و شیب آن a باشد از فرمول زیر به دست می آید.

$$y - y_1 = a(x - x_1)$$

مثال: فخطی از نقاط $A = \begin{bmatrix} 3 \\ m \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} m \\ 3 \end{bmatrix}$ گذشته و محور عرضها را در نقطه ای به عرض ۱ قطع نموده مقدار m چه عددی است؟

$$(1) 4 \quad (2) -2 \quad (3) -4 \quad (4) 2$$

حل) چون صورت و مخرج قرینه‌ی هم هستند پس شیب برابر ۱- است $\text{شیب } AB = \frac{m - 3}{3 - m} = -1$ پس معادله به صورت زیر است.

عرض از مبدا $m + 3$ می شود

$$y - y_1 = a(x - x_1) \Rightarrow y - m = -1(x - 3) \Rightarrow y - m = -x + 3 \Rightarrow y = -x + 3 + m \Rightarrow$$

حال باید این عرض مبدا با ۱ برابر باشد زیر خط محور عرضها را در نقطه ۱ قطع کرده است. $3 + m = 1 \Rightarrow m = -2$

سه خط زمانی با هم تشکیل **مثلث** می دهند که دو به دو با هم موازی نباشند یعنی **شیب** هیچ دو تایی از آنها برابر نباشد.

مثال) دو خط $y + 2x - 1 = 0$ و $2y - x + 5 = 0$ با کدام یک از خط های زیر تشکیل یک مثلث می دهند؟

$$x - 2y = 8 \quad (۴)$$

$$2x - 9 = 2y \quad (۳)$$

$$y = \frac{x}{2} - 3 \quad (۲)$$

$$3y + 7 = -6x \quad (۱)$$

حل) با توجه به نکته بالا شیب های دوخط در صورت مساله و خطهای موازی را پیدا می کنیم شیب هر کدام از خط های موازی در گزینه ها که با هیچ کدام از شیب های دو خط مساوی نشود همان گزینه جواب است.

★ هر خط راستی محورهای مختصات را در طول از مبدا و عرض از مبدا قطع می کند. برای پیدا کردن **طول از مبدا** در معادله خط به جای y عدد صفر قرار داده و مقدار x را پیدا می کنیم و برای **عرض از مبدا** در معادله خط به جای x عدد صفر قرار داده و مقدار y را پیدا می کنیم.

مثال: مثل برقرار خط $3y - 2x = 4$ را پیدا کنید.

$$\text{مثل برقرار خط با محور عرضها} \quad 3y - 2x = 4 \Rightarrow 3y - 2 \times 0 = 4 \Rightarrow 3y = 4 \Rightarrow y = \frac{4}{3}$$

$$\text{مثل برقرار خط با محور طولها} \quad 3y - 2x = 4 \Rightarrow 3 \times 0 - 2x = 4 \Rightarrow -2x = 4 \Rightarrow x = -2$$

نکته: اگر شیب دو خط n برابر شود و عرض از مبدا آنها ثابت بماند معادله خطی که بین دو خط و محور طولها به وجود می آید تقسیم بر n می شود.

★ معادله خطی که از نقاط $A = \begin{bmatrix} p \\ 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 0 \\ q \end{bmatrix}$ می گذرد (یعنی طول از مبدا و عرض از مبدا آن معلوم است) برابر است با:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

$$\text{مثال: معادله خطی که از نقاط } A = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ و } B = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \end{bmatrix} \text{ می گذرد را بنویسید.} \quad \frac{x}{4} + \frac{y}{-5} = 1$$

خط $ax + by = c$ **موازی محور طول ها** (x ها) است اگر $a = 0$ باشد.

خط $ax + by = c$ **موازی محور عرضها** (y ها) است اگر $b = 0$ باشد.

خط $ax + by = c$ **از مبدا می گذرد** اگر $c = 0$ باشد.

★ نقطه‌ای $A = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$ نسبت به خط $ax + by + c = 0$ (باید ضریب y یعنی b مثبت باشد) سه حالت مختلف دارد که عبارتند از:

۱- نقطه‌ای A **بالای خط** قرار دارد. $am + bn + c > 0 \Rightarrow$

۲- نقطه‌ای A **روی خط** قرار دارد. $am + bn + c = 0 \Rightarrow$

۳- نقطه‌ی A زیر خط قرار دارد. $\Rightarrow am + bn + c < 0$

مثال؛ نقطه $A = \begin{bmatrix} 35 \\ 91 \end{bmatrix}$ نسبت به دو خط $l: y = 3x - 21$ و $d: 11y - 30x + 39 = 0$ چه موقعیتی دارد؟

(۱) بالای هر دو خط (۲) بالای l و پایین d (۳) پایین l و بالای d (۴) پایین هر دو خط

بالای خط $l \Rightarrow l: y = 3x - 21 \Rightarrow -3x + y + 21 = 0 \Rightarrow -3 \times 35 + 91 + 21 = +7 > 0$

پایین خط $d \Rightarrow d: 11y - 30x + 39 = 0 \Rightarrow 11 \times 91 - 30 \times 35 + 39 = -10 < 0$

روش دوم: طول نقطه را به جای x در معادله خط قرار می دهیم و مقدار y را پیدا می کنیم و آن را با عرض نقطه داده شده مقایسه می کنیم اگر این عدد از عرض نقطه داده شده بزرگتر است پس نقطه زیر خط قرار می گیرد و اگر از عرض نقطه داده شده کوچکتر است پس نقطه بالای خط قرار می گیرد. مثلاً در مورد نقطه A و خط l در مثال بالا داریم؛

نقطه A بالای خط l قرار دارد $\Rightarrow 91 < 84 \Rightarrow 84 = 3 \times 35 - 21 = y \Rightarrow y = 3x - 21$

نکته: برای این که بفهمیم چند نقطه با مختصات طبیعی روی خط $ax + by = c$ قرار دارد؟ یکی از متغیرها مثلاً x را بر حسب دیگری پیدا می کنیم یعنی $x = \frac{c - by}{a}$ و سپس بررسی می کنیم به ازای چه اعداد طبیعی از y مقدار $x = \frac{c - by}{a}$ عددی طبیعی می شود.

*** شرط موازی بودن دو خط** $ax + by = c$ و $a'x + b'y = c'$ (یعنی اصلاً جواب نداشته باشند) آنست که: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$

*** شرط منطبق شدن دو خط** $ax + by = c$ و $a'x + b'y = c'$ (یعنی بی شمار جواب داشته باشد) آنست که: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

*** شرط متقاطع بودن دو خط** $ax + by = c$ و $a'x + b'y = c'$ (یعنی یک جواب داشته باشد) آنست که: $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$

*** شرط عمود بودن دو خط** $ax + by = c$ و $a'x + b'y = c'$ آنست که: $aa' + bb' = 0$

مثال: دو خط $3x + 2y + 6 = 0$ و $2x - 3y - 6 = 0$ نسبت به هم چه وضعی دارند و به طور مشترک از کدام نوامی دستگاه مختصات می گذرند؟ (۱) موازی-ناهمه او ۲) عمود-ناهمه ۳و ۲ ۳) موازی-ناهمه ۴و ۳ ۴) عمود-ناهمه ۳و ۴

حل) چون در رابطه $aa' + bb' = 0$ ضرایب صدق می کند داریم: $3 \times 2 + 2 \times (-3) = 0 \Rightarrow aa' + bb' = 0$ پس بر هم عمودند.

برای اینکه بفهمیم از کدام ناهیه به طور مشترک می گذرند باید شیب و عرض از مبدا خطها را پیدا کنیم که در نتیجه هر دو خط از ناهیه های سوم و چهارم می گذرند.

★ برای پیدا کردن **قرینه‌ی** هر خط نسبت به هر مورد (نیمساز ربع اول و سوم، نیمساز ربع دوم و چهارم، مبدا مختصات و ...) ابتدا

قرینه‌ی نقطه‌ی $A = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ را نسبت به آن مورد حساب کرده تا به نقطه‌ی $A' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ برسیم. سپس در معادله خط به جای x و y مقادیر x' و y' را قرار می‌دهیم.

مثال: قرینه‌ی خط $x + 2y = 3$ را یک بار نسبت به مبدا مختصات و بار دیگر نسبت به نیمساز ربع دوم و چهارم حساب کنید.

پون قرینه نقطه $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ نسبت به مبدا $\begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix}$ می‌شود پس معادله قرینه خط نسبت به مبدا می‌شود: $x + 2y = 3 \Rightarrow -x - 2y = 3$

پون قرینه نقطه $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ نسبت به نیمساز ربع دوم و چهارم $\begin{bmatrix} -y \\ -x \end{bmatrix}$ می‌شود پس معادله قرینه خط می‌شود: $-y - 2x = 3$

★ **تذکر مهم:** اگر **قرینه‌ی** شکلی را نسبت به خط یا نقطه‌ای به دست آوریم **مساحت و محیط شکل تغییر نمی‌کند**.

★ **مساحت مثلث محصور بین خط و محورهای مختصات برابر است با:**

$$S = \frac{\text{طول از مبدا} \times \text{عرض از مبدا}}{2}$$

مثال: مساحت مثلثی که حاصل از برخورد خط $\frac{x}{1395} + \frac{y}{1394} = 1$ با محورهای مختصات صورت می‌گیرد چیست؟

$$S = \frac{|\text{طول از مبدا} \times \text{عرض از مبدا}|}{2} = \frac{1395 \times 1394}{2}$$

پون طول از مبدا خط 1395 و عرض از مبدا خط 1394 است داریم

مثال) چند خط از نقطه $\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}$ می‌گذرند و با محورهای مختصات مثلثی به مساحت 15 واحد می‌سازند؟

با توجه به صورت سوال، طول از مبدا خط یا خطوط برابر 3- می‌باشد پس عرض مبدا خط یا خطوط را m می‌گیریم داریم:

$$S = \frac{|\text{طول از مبدا} \times \text{عرض از مبدا}|}{2} \Rightarrow 15 = \frac{|3 \times m|}{2} \Rightarrow |3m| = 30 \Rightarrow |m| = 10 \Rightarrow m = \pm 10$$

پس با توجه به پیدا شدن دو مقدار برای m دو خط می‌گذرد.

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

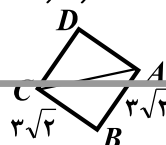
★ **فاصله‌ی نقطه** $A = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ از خط $ax + by + c = 0$ برابر است با:

مثال: یک ضلع مربعی بر خط $y = x + 2$ واقع است. و $A = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ یک رأس آن است که روی این خط نیست قطر مربع کدام است؟

$$(1) 3\sqrt{2} \quad (2) 6 \quad (3) 2\sqrt{2} \quad (4) 4$$

حل) ابتدا فاصله نقطه A را از خط $y = x + 2$ به دست می‌آوریم:

$$y = x + 2 \Rightarrow y - x - 2 = 0$$



$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|1 - 3 - 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|-6|}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$

ضلع مربع

پس ضلع مربع به کمک رابطه فیثاغورس برابر است با: $AC^2 = (3\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2 = 18 + 18 = 36 \Rightarrow AC = \sqrt{36} = 6$

*** فاصله دو خط موازی** $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ برابر است با:

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

مثال: فاصله دو خط موازی $8x + 6y + 4 = 0$ و $4x + 3y - 19 = 0$ کدام است؟

$$\frac{21}{99} \quad (4) \qquad \frac{99}{21} \quad (3) \qquad \frac{5}{21} \quad (2) \qquad \frac{21}{5} \quad (1)$$

حل) چون باید ضرایب x, y باید با هم برابر باشد ابتدا ضرایب معادله اول را بر ۲ تقسیم می کنیم:

$$8x + 6y + 4 = 0 \Rightarrow 4x + 3y + 2 = 0$$

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2 - (-19)|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{2 + 19}{\sqrt{25}} = \frac{21}{5}$$

اکنون داریم:

تذکر: البته می توان با پیدا کردن فاصله یک نقطه دلخواه از یکی از خط ها از خط دوم نیز سوال را حل کرد.

*** اگر دو خط به معادله های $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ داشته باشیم خطی از مبدا مختصات کوتاه ترین فاصله را دارد که قدر مطلق عدد ثابت آن یعنی $|c|$ یا $|c'|$ صفر یا کوچک تر از بقیه باشد. (دقت کنید ضرایب x با هم و y با هم در دو معادله باید مساوی باشد).**

مثال: کدام خط زیر کمترین فاصله را از مبدا مختصات دارد؟

$$x + y - 2 = 0 \quad (1) \qquad x + y - \sqrt{2} = 0 \quad (2) \qquad x + y + \sqrt{2} = 0 \quad (3) \qquad x + y + 1 = 0 \quad (4)$$

حل) خط گزینه ۱ زیرا قدر مطلق عدد ثابت آن یعنی $2 -$ از بقیه بزرگتر است.

*** دستگاه** $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ سه حالت مختلف می تواند داشته باشد:

۱- اگر $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ باشد دو خط **برهم منطبق** هستند و دستگاه **بی شمار جواب** دارد.

۲- اگر $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ باشد دو خط با هم **موازیند** و دستگاه **جواب ندارد**.

مثال) شرط آنکه دستگاه
$$\begin{cases} (2a-1)x + 3y - 2 = 0 \\ 5y - ax = 0 \end{cases}$$
 جواب نداشته باشد آنگاه؛

$$a = \frac{13}{5} \quad (1) \quad 2a^2 - a + 15 = 0 \quad (2) \quad 2a^2 - a + 15 = 0 \quad (3) \quad a = \frac{5}{13} \quad (4)$$

حل) طبق نکته بالا داریم؛
$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'} \Rightarrow \frac{2a-1}{-a} = \frac{3}{5} \Rightarrow 10a - 5 = -3a \Rightarrow 13a = 5 \Rightarrow a = \frac{5}{13}$$

۳- اگر $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ باشد دو خط **مقاطعند** و دستگاه **یک جواب** دارد.

مثال: دستگاه
$$\begin{cases} 3x + 2m = 7 \\ mx + 6y = 10 \end{cases}$$
 به ازای چه مقداری از m دارای جواب نیست؟

$$m = 3 \quad (1) \quad m = -3 \quad (2) \quad m = \pm 3 \quad (3) \quad m = 6 \quad (4)$$

حل) دو خط باید موازی باشند در نتیجه داریم؛
$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \Rightarrow \frac{3}{m} = \frac{2m}{6} \Rightarrow 2m^2 = 18 \Rightarrow m^2 = 9 \Rightarrow m = \pm 3$$

مثال: اگر دستگاه
$$\begin{cases} 2x + 5y = 12 \\ 2mx + 3ny = x + 2y + 6 \end{cases}$$
 دارای بی شمار جواب باشد مقدار $n - m$ چقدر است؟

حل) چون دستگاه بی شمار جواب دارد داریم

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \Rightarrow \frac{2}{2m-1} = \frac{5}{3n-2} = \frac{12}{6} = 2 \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{2m-1} = 2 \Rightarrow 4m - 2 = 2 \Rightarrow 4m = 4 \Rightarrow m = 1 \\ \frac{5}{3n-2} = 2 \Rightarrow 6n - 4 = 5 \Rightarrow 6n = 9 \Rightarrow n = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$n - m = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

★ اگر در یک دستگاه نسبت ها برابر باشند همه را مساوی k فرض کرده و همه مجهول ها را بر حسب k به دست آورده و در رابطه‌ی داده شده جایگذاری می کنیم تا مقدار k به دست آید سپس مجهولات را به دست می آوریم.

مثال: دستگاه مقابل را حل کنید.

$$\begin{cases} \frac{x+1}{5} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{4} \\ x - 2y + z = 30 \end{cases}$$

$$\frac{x+1}{5} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{4} = k \Rightarrow \begin{cases} \frac{x+1}{5} = k \Rightarrow x+1 = 5k \Rightarrow x = 5k-1 & (1) \\ \frac{y}{3} = k \Rightarrow y = 3k & (2) \\ \frac{z-1}{4} = k \Rightarrow z-1 = 4k \Rightarrow z = 4k+1 & (3) \end{cases}$$

$$x - 2y + z = 30 \Rightarrow 5k - 1 - 2 \times 3k + 4k + 1 = 30 \Rightarrow 5k - 6k + 4k = 30 \Rightarrow k = 30$$

اکنون مقدار k در معادلات اول و ۳ قرار داده و مقدار x, y, z به دست می آوریم

$$x = 5k - 1 = 5 \times 30 - 1 = 149 \quad \text{و} \quad y = 3k = 3 \times 30 = 90 \quad \text{و} \quad z = 2 \times 30 + 1 = 61$$

تذکر مهم: در بعضی از مسائل می توان از **مجهول معاون** (کمکی) نیز استفاده کرد.

$$\begin{cases} \frac{6}{x} + \frac{5}{y} = 4 \\ \frac{14}{x} - \frac{3}{y} = 2 \end{cases}$$

مثال: دستگاه مقابل را حل کنید.

حل: در این دستگاه $\frac{1}{x}$ را مساوی A و $\frac{1}{y}$ را مساوی B می گیریم و سپس دستگاه جدید را حل می کنیم

$$\begin{cases} \frac{6}{x} + \frac{5}{y} = 4 \\ \frac{14}{x} - \frac{3}{y} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6A + 5B = 4 \\ 14A - 3B = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 18A + 15B = 12 \\ 70A - 15B = 10 \end{cases}$$

$$88A = 22 \Rightarrow A = \frac{22}{88} = \frac{1}{4} = \frac{1}{x} \Rightarrow x = 4$$

$$18 \times \frac{1}{4} + 15B = 12 \Rightarrow 15B = 12 - \frac{18}{4} = \frac{48 - 18}{4} = \frac{30}{4} \Rightarrow B = \frac{30}{4} \div 15 = \frac{30}{4} \times \frac{1}{15} = \frac{1}{2} = \frac{1}{y} \Rightarrow y = 2$$

مساله: در یک امتحان تستی با ۲۰ سوال هر جواب صحیح ۷ نمره مثبت و هر جواب غلط ۲ نمره منفی دارد (به سوالهای بدون جواب هیچ نمره ای تعلق نمی گیرد) اگر نمره ی دانش آموزی برابر ۸۷ باشد این دانش آموز به چند سوال جواب نداده است؟

(۴) ۱۳

(۳) ۹

(۲) ۷

(۱) ۵

$x =$ تعداد جوابهای صحیح

$y =$ تعداد جواب های غلط

$z =$ تعداد سوال های بدون جواب

$$\begin{cases} 7x - 2y = 87 \\ x + y + z = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7x - 2y = 87 \\ -7x - 7y - 7z = -140 \end{cases}$$

$$-9y - 7z = -53 \Rightarrow 9y + 7z = 53$$

در بین گزینه ها تنها مقداری که به پای z می توان قرار داد فقط گزینه ۱ می باشد پس $z = 5$ و داریم:

$$9y + 7 \times 5 = 53 \Rightarrow 9y = 53 - 35 = 18 \Rightarrow y = 2$$

★ «دسته خطوط» به دسته ای از خط ها می گوئیم که یک خاصیت مشترک داشته باشند. مثلا همه آنها از نقطه ای مشخص عبور کنند. (مانند قطر های دایره) که برای پیدا کردن این نقطه به جای a دو مقدار دلخواه قرار داده و سپس نقطه برخورد دو خط به دست آمده پیدا می کنیم

مثال: خط به معادله $y - ax + 2a - 1 = 0$ به ازای جميع مقادیر a از کدام نقطه می گذرد؟

حل: به جای a دو مقدار مختلف قرار می دهیم و نقطه برخورد دو خط به دست آمده را پیدا می کنیم.

$$a = 0 \Rightarrow y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1 \quad (1) \quad \text{و} \quad a = 1 \Rightarrow y - x + 2 - 1 = 0 \Rightarrow y = x - 1 \quad (2)$$

دو خط ۲ را با یکدیگر قطع می دهیم که به جواب $y = ۱$ و $x = ۲$ می رسیم.

مثال: معادله قطرهای دایره ای در حالت کلی به صورت $\frac{1}{4}ax + y = 3 + a$ می باشد مفتحات مرکز این دایره کدام است؟

حل مانند سوال بالا

روشهای پیدا کردن مساحت مثلث با داشتن مختصات سه رأس

۱- روش بند گفشی: ابتدا طولهای سه نقطه را زیر هم و عرضهای سه نقطه را نیز زیر هم می نویسیم. و سپس اولین سطر را زیر آنها تکرار می کنیم سپس از ضرب کردن این اعداد به صورت قطری، حاصل ضربها را در دو طرف این سطرها می نویسیم سپس حاصل جمع هر طرف را به دست می آوریم و در آخر قدر مطلق اختلاف این دو مجموع را به دست آورده و تقسیم بر ۲ می کنیم.

$$\begin{array}{c|c|c} & \text{عرض} & \text{طول} \\ \hline nx & \begin{array}{c} m \\ x \\ y \\ z \\ m \end{array} & \begin{array}{c} n \\ y \\ t \\ n \end{array} \\ \hline yz & \begin{array}{c} m \\ x \\ y \\ z \\ m \end{array} & \begin{array}{c} n \\ y \\ t \\ n \end{array} \\ \hline tm & \begin{array}{c} m \\ x \\ y \\ z \\ m \end{array} & \begin{array}{c} n \\ y \\ t \\ n \end{array} \end{array}$$

$$S = \left| \frac{(nx + yz + tm) - (my + xt + zn)}{2} \right|$$

مثال: مساحت مثلثی که مختصات رئوس آن $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix}$ باشد را پیدا کنید.

$$\begin{array}{c|c|c} & \text{عرض} & \text{طول} \\ \hline 0 & \begin{array}{c} 3 \\ 0 \\ -5 \\ 3 \end{array} & \begin{array}{c} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{array} \\ \hline -20 & \begin{array}{c} 3 \\ 0 \\ -5 \\ 3 \end{array} & \begin{array}{c} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{array} \\ \hline 3 & \begin{array}{c} 3 \\ 0 \\ -5 \\ 3 \end{array} & \begin{array}{c} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{array} \end{array}$$

$$S = \left| \frac{(0 - 20 + 3) - (12 + 0 - 10)}{2} \right| = \left| \frac{-17 - 2}{2} \right| = \frac{19}{2} = 9.5$$

۲- با استفاده از فرمول مقابل: مجموع (طول هر نقطه ضربدر اختلاف عرضها) دو نقطه دیگر را پیدا کرده و حاصل را تقسیم بر ۲ می کنیم.

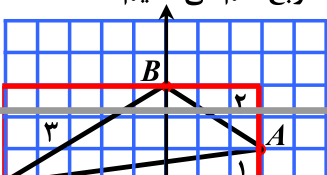
تذکر مهم: در این روش باید حتما ترتیب نقاط را به صورت چرخشی رعایت کنیم.

حل مثال بالا با کمک روش دوم:

$$S = \frac{|x_A(y_B - y_C) + x_B(y_C - y_A) + x_C(y_A - y_B)|}{2} = \frac{|3(4 - 1) + 0(1 - 2) + (-5)(2 - 4)|}{2} = \frac{|9 + 0 + 10|}{2} = \frac{19}{2}$$

۳- با کمک رسم مثلث در دستگاه مختصات:

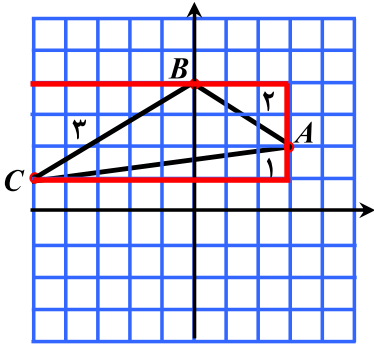
نقاط را روی دستگاه مشخص کرده و مثلث را رسم می کنیم سپس این مثلث را در یک مستطیل یا مربع محاط می کنیم سپس مجموع مساحت های مثلثهای قائم الزاویه دور مثلث مورد نظر را پیدا کرده و از مساحت مستطیل یا مربع کم می کنیم.



حل مثال بالا با کمک روش سوم:

در شکل مقابل مساحت مستطیل را منهای مجموع مساحت سه مثلثی می کنیم که شماره گذاری کرده ایم.

$$S = (8 \times 3) - \left(\frac{1 \times 8}{2} + \frac{2 \times 3}{2} + \frac{3 \times 5}{2} \right) = 24 - \frac{29}{2} = \frac{19}{2} = 9.5$$



عبارت های گویا

عبارت گویا: عبارتی است که در آن، عبارت صورت و مخرج، چند جمله ای می باشند و مخرج صفر نباشد.

مثال: عبارت های $\frac{\sqrt{3}}{x - \sqrt{5}}$ و $\frac{3x - 1}{7x^2 + 4x + 1}$ گویا هستند. اما عبارت های $\frac{3\sqrt{x} + 1}{4x^2 + 1}$ و $\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$ گویا نیستند.

تذکر: عبارت های $\sqrt[3]{x^3}$ و $\frac{1}{|x - x|}$ گویا نیستند اما اگر در سوال گفته باشد آیا بعد از ساده شدن گویا هستند؟ جواب بله خواهد بود. هر عدد حقیقی به تنهایی یک عبارت گویاست.

نکته: برای پیدا کردن مجموعه مقادیری که به ازای آنها برای متغیر عبارت داده شده، عبارت تعریف شده باشد ((دامنه تعریف)) باید اگر عبارت کسری بود مخرج عبارت صفر نباشد و همچنین اگر عبارت رادیکالی با فرجه زوج بود زیر رادیکال منفی نباشد.

مثال: عبارت $\frac{x - 1}{x^2 - 1}$ به ازای چه مقادیری از متغیر x تعریف شده است؟

حل) مخرج باید صفر نشود.

$$\begin{aligned} x - 1 = 0 &\Rightarrow x = 1 \\ x + 1 = 0 &\Rightarrow x = -1 \end{aligned}$$

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow (x - 1)(x + 1) = 0 \Rightarrow$$

پس عبارت به ازای تمام اعداد حقیقی به جز 1 و -1 تعریف شده است. یعنی: $R - \{1, -1\}$

مثال: عبارت $\frac{x + 3}{\sqrt{x - 2}}$ به ازای چه مقادیری از متغیر x تعریف شده است؟

حل) مخرج باید صفر نشود و منفی نیز نشود زیرا رادیکال با فرجه زوج است.

$$x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$$
یعنی با ازای تمام اعداد حقیقی بزرگتر از 2 تعریف شده است.

تذکره ۱: عبارت های گویایی هم هستند که هیچگاه مخرج آنها صفر نمی شود بنابراین دامنه تعریف این عبارت ها اعداد حقیقی می باشد.