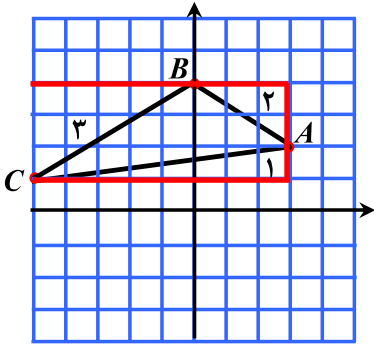


حل مثال بالا با کمک روش سوم:

در شکل مقابل مساحت مستطیل را منهای مجموع مساحت سه مثلثی می کنیم که شماره گذاری کرده ایم.



$$S = (4 \times 2) - \left(\frac{1 \times 2}{2} + \frac{2 \times 2}{2} + \frac{2 \times 2}{2} \right) = 8 - 4 = 4$$

عبارت های گویا

عبارت گویا: عبارتی است که در آن، عبارت صورت و مخرج، چند جمله ای می باشند و مخرج صفر نباشد.

مثال: عبارت های $\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ و $\frac{3\sqrt{x+1}}{4x^2+1}$ گویا هستند. اما عبارت های $\frac{\sqrt{3}}{x-\sqrt{5}}$ و $\frac{3x-1}{7x^2+4x+1}$ گویا نیستند.

تذکر: عبارت های $\sqrt[3]{x^3}$ و $\frac{1}{|x-x|}$ گویا نیستند اما اگر در سوال گفته باشد آیا بعد از ساده شدن گویا هستند؟ جواب بله خواهد بود. هر عدد حقیقی به تنهایی یک عبارت گویاست.

نکته: برای پیدا کردن مجموعه مقادیری که به ازای آنها برای متغیر عبارت داده شده، عبارت تعریف شده باشد ((دامنه تعریف)) باید اگر عبارت کسری بود مخرج عبارت صفر نباشد و همچنین اگر عبارت رادیکالی با فرجه زوج بود زیر رادیکال منفی نباشد.

مثال: عبارت $\frac{x-1}{x^2-1}$ به ازای چه مقادیری از متغیر x تعریف شده است؟

حل) مخرج باید صفر نشود.
 $x-1=0 \Rightarrow x=1$
 $x+1=0 \Rightarrow x=-1$

پس عبارت به ازای تمام اعداد حقیقی به جز 1 و -1 تعریف شده است. یعنی: $R - \{1, -1\}$

مثال: عبارت $\frac{x+3}{\sqrt{x-2}}$ به ازای چه مقادیری از متغیر x تعریف شده است؟

حل) مخرج باید صفر نشود و منفی نیز نشود زیرا رادیکال با فرجه زوج است.
 $x-2 > 0 \Rightarrow x > 2$ یعنی با ازای تمام اعداد حقیقی بزرگتر از 2 تعریف شده است.

تذکره ۱: عبارت های گویایی هم هستند که هیچگاه مخرج آنها صفر نمی شود بنابراین دامنه تعریف این عبارت ها اعداد حقیقی می باشد.

مثال: عبارت گویای $\frac{5x}{x^2+1}$ مفروض هیچ گاه صفر نمی شود زیرا مخرج آن همیشه مثبت است پس به ازای تمام اعداد حقیقی تعریف شده است.

تذکره ۲: تا قبل از تعیین دامنه اجازه ساده کردن عبارت جبری را نداریم.

نکته: در تقسیم عبارت های گویا وقتی می خواهیم ببینیم به ازای چه مقادیری تعریف نشده اند باید **علاوه بر مخرج کسر اول، صورت و مخرج کسر دوم** را نیز برابر صفر قرار دهیم.

$$\frac{4x-4}{x^2-4} \div \frac{2x-10}{2x+8}$$

مثال: عبارت مقابل به ازای چه مقادیری تعریف نشده است؟

در این عبارت هم باید دو تا مخرج را برابر صفر قرار دهیم و هم صورت کسر دوم را زیر وقتی تقسیم را به ضرب تبدیل می کنیم کسر

دوم معکوس می شود و صورت این کسر در مخرج قرار می گیرد. یعنی:

$$\frac{4x-4}{x^2-4} \times \frac{2x+8}{2x-10}$$

$$x^2-4=0 \Rightarrow (x-2)(x+2)=0 \Rightarrow x-2=0 \Rightarrow x=2 \quad \text{یا} \quad x+2=0 \Rightarrow x=-2$$

$$2x+8=0 \Rightarrow x=-4 \quad \text{و} \quad 2x-10=0 \Rightarrow x=5$$

نکته: برای ساده کردن عبارت های گویا ابتدا صورت و مخرج آن را تا حد امکان تجزیه کرده سپس عامل های مشترک را با یکدیگر ساده می کنیم.

مثال: عبارت های زیر را ساده کنید.

$$\text{الف)} \frac{4x^2+6x+9}{8x^3-27} = \frac{4x^2+6x+9}{(2x-3)(4x^2+6x+9)} = \frac{1}{2x-3}$$

$$\text{ب)} \frac{9x^2+x-3x^3-3}{3x^2-1} = \frac{(9x^2-3x^3)+(x-3)}{3x^2-1} = \frac{3x^2(3-x)+(x-3)}{3x^2-1} = \frac{(3-x)(3x^2-1)}{3x^2-1} = 3-x$$

نکته: در جمع و تفریق عبارت های گویا، پس از تجزیه مخرج ها، بین آنها «ک م م» گرفته و پس از هم مخرج کردن کسرها، و تغییر صورتها آنها را با هم جمع یا تفریق می کنیم.

مثال: ساده سره عبارت $\frac{x+4}{x^2+2x-8} + \frac{1-x}{x^2+x-2}$ کرام است؟

$$\text{الف)} \frac{4}{x^2-4} \quad \text{ب)} \frac{-4}{x^2-4} \quad \text{ج)} \frac{2x}{x^2-4} \quad \text{د)} \frac{-2x}{x^2-4}$$

$$\frac{x+4}{x^2+2x-8} + \frac{1-x}{x^2+x-2} = \frac{x+4}{(x+4)(x-2)} + \frac{1-x}{(x-1)(x+2)} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} = \frac{(x+2)-(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{4}{x^2-4} \quad (\text{حل})$$

نکته: برای به دست آوردن ضرایب مجهول در عبارت های گویا، ابتدا با مخرج مشترک گیری، مخرج دو طرف را با یکدیگر برابر کرده سپس صورتهای را با یکدیگر هم ارز قرار می دهیم. (یعنی ضرایب x را با هم و ضرایب x^2 را نیز باهم و مقادیر ثابت را نیز باهم مساوی قرار می دهیم).

$$\text{مثال: اگر } \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x^2-4} = \frac{3x}{x^2-4} \text{ باشد گاه مقدار } B \text{ کدام است؟ } x \neq \pm 2$$

(۱) -۶ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۴ (۵) -۴

$$\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x^2-4} = \frac{3x}{x^2-4} \Rightarrow \frac{A(x+2)+B}{(x-2)(x+2)} = \frac{Ax+2A+B}{x^2-4} = \frac{3x}{x^2-4} \Rightarrow \quad (\text{حل})$$

$$\begin{cases} A=3 \\ 2A+B=0 \Rightarrow 2 \times 3 + B = 0 \Rightarrow B = -6 \end{cases}$$

$$\text{مثال: اگر } \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2} = \frac{1}{x(x+1)(x+2)} \text{ آنگاه } A+B+C \text{ کدام است؟ } (x \neq 0, -1, -2)$$

(۱) صفر ✓ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

نکته: تقسیم چند جمله ای بر یک جمله ای به یکی از دو روش زیر انجام می شود.

روش اول: از عامل مشترک صورت فاکتور گرفته و سپس با مخرج ساده کنیم.

روش دوم: از قانون تفکیک کردن (جدا سازی) در کسرها استفاده کنیم.

مثال: حاصل عبارت مقابل را به دست آورید.

$$\frac{3a^2b^6 - 18ab^5 - 24a^2b^2}{3ab^2} = \frac{3a^2b^6}{3ab^2} - \frac{18ab^5}{3ab^2} - \frac{24a^2b^2}{3ab^2} = ab^4 - 6b^3 - 8a$$

نکته: برای ضرب عبارت های گویای کسری هر عبارت را تا حد امکان تجزیه و ساده می کنیم و سپس صورت را در صورت و مخرج را در مخرج ضرب می کنیم.

$$\text{مثال: حاصل عبارت } \frac{x^2-9}{x^2-4} \times \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3} \times \frac{x^2+x-2}{x^2-3x+2}$$

(۱) $\frac{x+2}{x-2}$ (۲) $\frac{x-2}{x+2}$ (۳) $\frac{x+1}{x-1}$ (۴) $\frac{x-1}{x+1}$

$$\frac{x^2-9}{x^2-4} \times \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3} \times \frac{x^2+x-2}{x^2-3x+2} = \frac{(x-3)(x+3)}{(x-2)(x+2)} \times \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-3)} \times \frac{(x-1)(x+2)}{(x+1)(x+3)} = \frac{x-1}{x+1} \quad (\text{حل})$$

نکته: در تقسیم عبارت های گویا عبارت سمت چپ را در معکوس عبارت سمت راست ضرب می کنیم و سپس عبارت ها را تا حد امکان تجزیه کرده و ساده می کنیم و در آخر صورت را در صورت و مخرج را در مخرج ضرب می کنیم.

نکته: در تقسیم چند جمله ای بر چند جمله ای ، تقسیم را تا جایی ادامه می دهیم که **درجه باقیمانده از درجه مقسوم علیه کمتر شود.**

مثال: در تقسیم چند جمله ای $11x + 4x^2 - 7x^3 - 8x^4$ بر $3x^2 - 2x + 1$ باید تقسیم را تا جایی ادامه دهیم که درجه باقیمانده حداکثر ۱ شود.

نکته: هرگاه **مقدار عددی مقسوم** را به ازای **ریشه ی مقسوم علیه** محاسبه کنیم **باقیمانده تقسیم** را به دست آورده ایم.

مثال: اگر عبارت $x^3 + 5x^2 + x + a$ بر $x + 1$ بخش پذیر باشد مقدار a کدام است؟

$$(1) \quad 4 \quad (2) \quad 3 \quad (3) \quad -4 \quad (4) \quad -3$$

حل) ابتدا ریشه مقسوم علیه را پیدا می کنیم $x = -1 \Rightarrow x + 1 = 0$ حال مقدار عبارت مقسوم باید به ازای $x = -1$ برابر با باقیمانده یعنی صفر باشد. پس داریم:

$$x^3 + 5x^2 + x + a = (-1)^3 + 5(-1)^2 + (-1) + a = 0 \Rightarrow a = -3$$

نکته:

۱- عبارت $x^n - y^n$ **همواره** بر $x - y$ بخش پذیر است.

۲- عبارت $x^n - y^n$ فقط وقتی بر $x + y$ بخش پذیر است که n **عددی زوج** باشد.

۳- عبارت $x^n + y^n$ فقط وقتی بر $x + y$ بخش پذیر است که n **عددی فرد** باشد.

نکته: هرگاه **مجموع ضرایب یک چند جمله ای صفر** شود آن چند جمله ای بر $x - 1$ بخش پذیر است.

مثال: چند جمله ای $10x - 3x^2 + 7x^3 - 10$ بر $x - 1$ بخش پذیر است زیرا $7 + 3 - 10 = 0$

نکته: هرگاه در یک چند جمله ای **مجموع ضرایب جملات درجه زوج با مجموع ضرایب جملات درجه فرد** برابر باشد آن عبارت بر $x + 1$

بخش پذیر است. مثال: چند جمله ای $11x + 4x^2 - 7x^3 - 8x^4$ بر $x + 1$ بخش پذیر است زیرا $11 - 7 + 4 - 8 = 0$

نکته: برای تعیین مقدار های یک متغیر در یک عبارت گویا به شرط آنکه آن که آن عبارت مقدارش عددی صحیح شود می توان با استفاده از اتحادها ، فاکتورگیری و یا شکستن جملات آن عبارت را به مقدارهای صحیح تبدیل کرد و در پایان روی کسری که می ماند بر حسب **شمارنده های صورت کسر** که باید در مخرج باشند بحث کرد .

و یا به جای استفاده از اتحادها و فاکتورگیری و صورت را مستقیماً بر مخرج تقسیم کرد اگر باقیمانده صفر شد به ازای تمام مقادیر اعداد صحیح برای متغیر آن، عبارت گویا عدد صحیح می شود.

ولی اگر باقیمانده صفر نشد باید **حاصل تقسیم باقیمانده بر مقسوم علیه** عددی صحیح شود. و برای این کار باید **مخرج** برابر **شمارنده های صورت** شود.

مثال: به ازای چند مقدار طبیعی y حاصل عبارت $\frac{5y^2 + 18}{y}$ مقداری صحیح است؟

(۱) هیچ مقدار (۲) ۱ (۳) ۶ (۴) بی شمار

حل) عبارت را به صورت $\frac{5y^2}{y} + \frac{18}{y}$ می نویسیم. چون در عبارت اول یعنی $\frac{5y^2}{y}$ صورت بر مخرج بخشپذیر است. در عبارت دوم

نیز باید صورت بر مخرج بخشپذیر باشد و برای درست بودن این مطلب مخرج کسر یعنی y برابر با شمارنده های ۱۸ شود. ۱۸ و ۹ و ۶ و ۳ و ۲ و ۱ پس تعداد مقادیرهای y برابر با ۶ تا می شود.

روش عدد گذاری برای حل سریع بعضی تستها

الف) تست هایی که از شما می پرسد عبارت داده شده بر کدام عبارت بخشپذیر است یا بر کدام عبارت بخشپذیر نیست؟

مثال: عبارت $x^{5a} + x^a + 1$ به ازای جميع مقادیر صحیح a بر کدام عبارت زیر بخشپذیر است؟

(۱) $x^{5a} - x^a + 1$ (۲) $x^{3a} + 1$ (۳) $x^{2a} + 1$ (۴) $x^{2a} + x^a + 1$

حل) با روش معمول شما باید از اتحاد پاق و لاغر نیز در حل این سوال استفاده کنید. اما با روش عدد گذاری به پای $a=2$ و $x=2$ را قرار می دهیم و حاصل عبارت و حاصل گزینه ها را به دست می آوریم داریم:

$$2^{5 \times 2} + 2^2 + 1 = 1024 + 4 + 1 = 1029$$

$$(۱) 2^{5 \times 2} - 2^2 + 1 = 1021 \quad (۲) 2^{3 \times 2} + 1 = 64 + 1 = 65 \quad (۳) 2^{2 \times 2} + 1 = 17 \quad (۴) 2^{2 \times 2} + 2^2 + 1 = 21$$

✓

حال چون ۱۰۲۹ فقط بر ۲۱ بخشپذیر است پس گزینه درست گزینه ۴ می باشد.

ب) در تست هایی که شما باید حاصل عبارت را به دست آورید و یا عبارت داده شده را ساده کنید.

مثال) ساده شده عبارت $\frac{(a^2 - 1)(b^2 - 1)}{(ab + 1)^2 - (a + b)^2}$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) $\frac{a-1}{ab+b}$ (۳) $\frac{b-1}{ab+a}$ (۴) $\frac{a+1}{ab+a}$

$$\frac{(2^2-1)(3^2-1)}{(2 \times 3 + 1)^2 - (2+3)^2} = \frac{3 \times 8}{49-25} = \frac{24}{24} = 1$$

حل) با روش عددگذاری به جای $a=2, b=3$ قرار می دهیم

حال این مقادیر را در گزینه ها قرار می دهیم.

$$\frac{2+1}{2 \times 3 + 2} = \frac{3}{8} \quad (1) \quad \frac{3-1}{2 \times 3 + 2} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \quad (2) \quad \frac{2-1}{2 \times 3 + 3} = \frac{1}{9} \quad (3)$$

حاصل عبارت $\frac{x-1}{x-y} - \frac{1-y}{y-x}$ کدام است؟

$$\frac{x-y}{y-x} \quad (1) \quad \frac{x-y}{x+y} \quad (2) \quad \frac{x+y}{x-y} \quad (3) \quad \frac{x-y}{y-x} \quad (4)$$

حاصل تقسیم $8x^3y^4 - 10x^2y^4$ بر $2x^2y^3$ کدام است؟

$$4x - 5xy \quad (1) \quad 4xy - 5y \quad (2) \quad -4xy + 5y \quad (3) \quad 5xy - 4y \quad (4)$$