

★ «ب م م» هر دو عدد متباین برابر ۱ و «ک م م» هر دو عدد متباین برابر حاصل ضرب آنهاست.

$$[a, b] = \frac{a \times b}{(a, b)}$$

★ حاصل ضرب دو عدد برابر حاصل ضرب «ک م م» آن دو عدد در «ب م م» آنها می باشد یا

مثال: «ب م م» دو عدد ۴ و «ک م م» دو عدد ۱۶۸ و یکی از اعداد ۲۴ می باشد عدد دیگر را پیدا کنید.

$$168 \times 4 = 24 \times x \Rightarrow x = \frac{168 \times 4}{24} = 28$$

★ ویژگی های «ب م م» و «ک م م»: اگر a, b, c, d, k اعدادی طبیعی باشند آنگاه:

$$(a, 1) = 1$$

$$(a, a) = a$$

$$[a, 1] = a$$

$$[a, a] = a$$

$$(a, b) = d \Rightarrow (ka, kb) = kd$$

$$[a, b] = c \Rightarrow [ka, kb] = kc$$

$$(a, b) = d \Rightarrow (a^k, b^k) = d^k$$

$$[a, b] = c \Rightarrow [a^k, b^k] = c^k$$

$$(a, b) = d \Rightarrow \left(\frac{a}{k}, \frac{b}{k} \right) = \frac{d}{k} \quad k \neq 0 \quad [a, b] = c \Rightarrow \left[\frac{a}{k}, \frac{b}{k} \right] = \frac{c}{k} \quad k \neq 0$$

هندسه

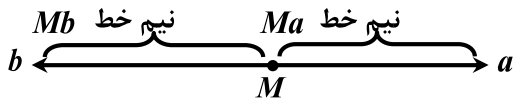
مفاهیم اولیه

نام گذاری نقطه: نقطه را با یک حرف از حروف بزرگ انگلیسی نامگذاری می کنیم. از برخورد هر دو خط یک نقطه به وجود می آید.

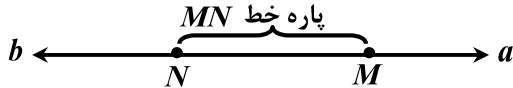
نامگذاری خط: خط را با دو حرف کوچک که در دوسر خط قرار می دهیم و یا با یک حرف کوچک نامگذاری می کنیم.



نامگذاری نیم خط: اگر یک نقطه روی یک خط قرار دهیم آن را به دو نیم خط تبدیل می کند که آن را با دو حرف که اولی بزرگ و دومی کوچک است نامگذاری می کنیم.



نامگذاری پاره خط: قسمتی از خط است که بین دو نقطه قرار می گیرد بنا براین آن را با دو حرف بزرگ نامگذاری می کنیم.



تعداد پاره خط ها و نیم خط ها:

اگر روی یک خط راست تعدادی نقطه متمایز (n نقطه) قرار دهیم تعداد نیم خط ها و تعداد پاره خط ها برابر است با:
چون با قرار دادن هر نقطه روی یک خط، دو نیم خط به وجود می آید پس تعداد نیم خط ها برابر است با:

$$۲n = \text{تعداد نقاط} \times ۲ = \text{تعداد نیم خط}$$

روش اول: چون نقطه اول با بقیه نقاط $n-1$ پاره خط درست می کند و نقطه دوم با بقیه نقاط (غیر از نقطه اول) $n-2$ پاره خط درست می کند و نقطه سوم با بقیه نقاط $n-3$ پاره خط درست می کند و ... که حاصل جمع اعداد ۱ تا $n-1$ می باشد پس داریم:

$$\text{تعداد پاره خط ها} = (n-1) + (n-2) + (n-3) + \dots + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{(1- \text{تعداد نقاط}) \times \text{تعداد نقاط}}{2}$$

روش دوم با کمک اصل ضرب: چون برای هر پاره خط به دو نقطه نیاز داریم بنابراین برای انتخاب نقطه اول از بین n نقطه حالت وجود خواهد داشت و برای انتخاب نقطه دوم $n-1$ حالت وجود دارد پس طبق اصل ضرب برای انتخاب این دو نقطه $n(n-1)$ حالت خواهیم داشت و چون با این روش هر دو نقطه را دو بار حساب می کنیم پس حاصل را تقسیم بر ۲ می کنیم و داریم:

$$\text{تعداد پاره خط ها} = \frac{n(n-1)}{2}$$

مثال: اگر ۱۰ نقطه روی یک خط قرار دهیم چند نیم خط و چند پاره خط به وجود می آید؟

$$۲۰ = ۲ \times ۱۰ = ۲n = \text{تعداد نقاط} \times ۲ = \text{تعداد نیم خط}$$

$$\text{تعداد پاره خط ها} = \frac{(1- \text{تعداد نقاط}) \times \text{تعداد نقاط}}{2} = \frac{۱۰ \times (۱۰-1)}{2} = ۴۵$$

مثال: چند نقطه روی یک خط قرار دهیم تا:

الف) تعداد نیم خط ها و پاره خط ها با هم برابر شود؟

(ب) تا تعداد پاره خط ها دو برابر نیم خط ها شود؟

تعداد نقاط برخورد چند خط: اگر n خط در صفحه همدیگر را قطع کنند حداکثر $\frac{n(n-1)}{2}$ نقطه برخورد خواهند داشت. (برای پیدا کردن این فرمول شبیه روش دوم پیدا کردن تعداد پاره خط ها که در چند سطر بالاتر گفتیم عمل می کنیم).

مساله : با n نقطه که هیچ سه تای آنها روی یک خط راست نیستند چند مثلث می توان مشخص کرد؟

(حل) برای هر مثلث سه نقطه لازم داریم با این تعداد انتخاب های موجود از بین n نقطه به صورت زیر است:
برای انتخاب نقطه اول مثلث n حالت و برای انتخاب نقطه دوم $(n-1)$ حالت و برای انتخاب نقطه سوم $(n-2)$ حالت وجود دارد پس طبق اصل ضرب برای انتخاب هر ۳ نقطه با هم $n(n-1)(n-2)$ حالت وجود خواهد داشت و چون برای هر ۳ نقطه ۶ مثلث تکراری وجود خواهد داشت پس باید تقسیم بر ۶ شود یعنی داریم:

$$\text{تعداد مثلث ها} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

نکته مهم: اگر تعدادی نقطه روی یک خط و تعدادی نقطه دیگر روی خط دومی باشند وبخواهیم تعداد مثلث ها یی را که با این نقاط می توان مشخص کرد حساب کنیم. ابتدا باید تعداد پاره خط هایی را که روی هر خط وجود دارد مشخص کنیم و سپس تعداد پاره خط هایی که روی هر خط وجود دارد را در تعداد نقاطی که روی خط دیگر وجود دارد ضرب کنیم ودر آخر آنها را با هم جمع کنیم .
(مثال) تعداد مثلث هایی که با نقاط روی خط های زیر می توان مشخص کرد را مشخص کنید

$$a \leftarrow \bullet \bullet \bullet \bullet \rightarrow a \quad \text{تعداد پاره خط های روی خط } a = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$$

$$b \leftarrow \bullet \bullet \bullet \bullet \rightarrow b \quad \text{تعداد پاره خط های روی خط } b = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$$

$$\text{تعداد مثلث ها} = 4 \times 10 + 5 \times 6 = 70$$

نکته : با n خط یک صفحه را حداکثر به $1 + \frac{n(n+1)}{2}$ قسمت می توان تقسیم کرد.

(مثال) به کمک ۴ خط یک صفحه را حداکثر به چند ناحیه می توان تقسیم کرد؟

(۱) ۸ (۲) ۱۱ (۳) ۹ (۴) ۱۰

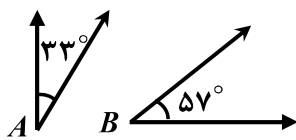
زاویه

انواع زاویه :

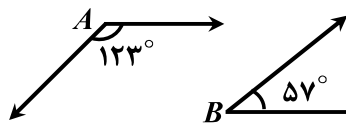
۱- زاویه تند (حاده) ۲- زاویه راست (قائمه) ۳- زاویه باز (منفرجه)

انواع دو زاویه :

۱- دو زاویه متمم: دو زاویه که مجموع اندازه آنها ۹۰ درجه باشد.



$$\hat{A} + \hat{B} = 33 + 57 = 90$$



۲- دو زاویه مکمل : دو زاویه که مجموع اندازه آنها 180° درجه باشد.

$$\hat{A} + \hat{B} = 123 + 57 = 180$$

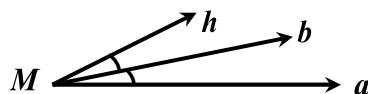


۳- دو زاویه متقابل به راس : دو زاویه که دارای یک راس و اضلاع آنها در امتداد هم باشد.

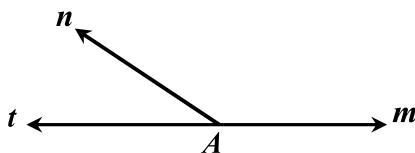
تذکر: دو زاویه متقابل به راس همیشه با هم برابرند.

$$\begin{aligned} \hat{1} + \hat{2} &= 180^\circ \\ \Rightarrow \hat{1} + \hat{2} &= \hat{2} + \hat{3} \Rightarrow \hat{1} = \hat{3} \\ \hat{2} + \hat{3} &= 180^\circ \end{aligned}$$

۴- دو زاویه مجاور : دو زاویه که در یک راس و یک ضلع مشترک بوده و ضلع مشترک بین دو ضلع دیگر قرار داشته باشد.

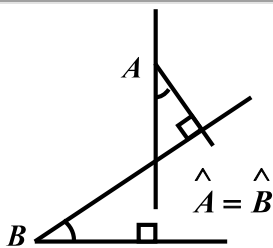


دو زاویه $\hat{hMb}$ و $\hat{bMa}$ مجاورند.

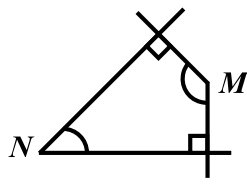


۵- دو زاویه مجانب : دو زاویه که **مجاور** بوده و مجموعشان 180° درجه شود.

تذکر: هر دو زاویه مجانب ، مکمل هستند ولی هر دو زاویه دلخواه مکمل ، مجانب نیستند.



نکته: هر گاه دو ضلع از زاویه ای بر دو ضلع از زاویه دیگر **عمود** باشند

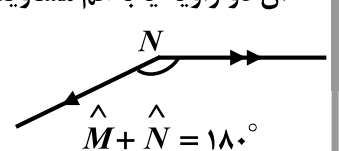
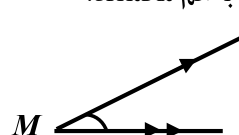
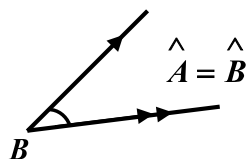
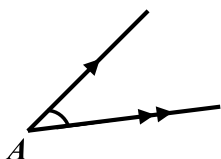


آن دو زاویه یا با هم برابرند و یا با هم مکملند.

$$\hat{M} + \hat{N} = 180^\circ$$

نکته: هر گاه دو ضلع از زاویه ای با دو ضلع از زاویه دیگر **موازی** باشند

آن دو زاویه یا با هم مساویند و یا با هم مکملند.



$$\hat{M} + \hat{N} = 180^\circ$$

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

اگر از یک نقطه n نیم خط رسم کنیم تعداد زاویه های محدب پدید آمده برابر است با:

زاویه بین عقربه های ساعت شمار و دقیقه شمار:

۱- عقربه دقیقه شمار در هر دقیقه 6° درجه نسبت به وضعیت قبلی خود جابجا می شود. $360 \div 60 = 6$

۲- عقربه ساعت شمار در هر دقیقه 0.5° درجه نسبت به وضعیت قبلی خود جابجا می شود. $360 \div 12 = 30 \Rightarrow 30 \div 60 = 0.5$

۳- اختلاف زاویه بین عقربه دقیقه شمار و ساعت شمار در هر دقیقه 5.5° درجه است.

۴- در ساعت $(h : m')$ زاویه بین عقربه ساعت شمار و دقیقه شمار از فرمول $|30h - 5.5m|$ به دست می آید.

- ۵- در صورتیکه این زاویه از 180° درجه بیشتر شد آن را از 360° درجه کم می کنیم.
- ۶- در هر 12 ساعت دو عقربه 11 بار روی هم منطبق می شوند.
- ۷- زمان بین دو انطباق متوالی 65 دقیقه و 27 ثانیه است.

انواع استدلال

۱-شهودی ۲- تمثیلی ۳- استقرائی ۴- استنتاجی ۵- مثال نقض

استدلال شهودی : استدلال شهودی مبتنی بر درک شهودی است. وبه نوعی درک بدون استدلال است وبه وسیله ی حواس پنج گانه انجام می شود

استدلال تمثیلی : تایید صحت یک اصل ، موضوع یا یک خبری بااستفاده از مثال

به عبارت دیگر: یافتن نوعی تشابه بین مفاهیم گوناگون و ارائه تناسب موضوعات جهت نشان دادن نتایج

به طور کلی منظور از استدلال تمثیلی یعنی اثبات یک حکم بااستفاده از مثال و مشابه سازی موضوع

استدلال استقرائی : روش نتیجه گیری کلی بر مبنای مجموعه ی محدودی از مشاهدات است و در استدلال استقرایی از جزء به کل می رسیم. به عبارت دیگر: در استدلال استقرائی ، بااستفاده از انجام آزمایش و مشاهده ی تعداد محدودی از مشاهدات ، نتیجه گیری کلی می کنیم .

هر استدلالی که بر پایه تجربه باشد استقرائی است.

استقراء ریاضی یک نمونه از استدلال استقرائی است نه همه ی آن.

دانشمندان علوم تجربی به روش استقراء نتیجه گیری می نمودند یعنی چندبار آزمایش می نمودند و پس از بررسی آن رابه عنوان نتیجه کلی عنوان می نمودند.

استدلال استقرائی در صورتی عمومیت دارد وقابل استناد است که نمونه ای نادرست برای آن یافت نشود.

در استدلال استقرائی از یک حکم جزئی یک نتیجه ی کلی می گیریم و در واقع از جزء به کل می رسیم.

استدلال استنتاجی : روش نتیجه گیری بااستفاده از حقایقی است که درستی آن هاراقبلا پذیرفته ایم.

بهترین ومحکم ترین روش استدلال ، استدلال استنتاجی است .

در اثبات ارائه شده بااستدلال استنتاجی مثالی وجود ندارد که نقض کننده موضوع باشد.

مثال نقض: مثال زدن برای رد کردن یک حکم ریاضی است.

انواع چند ضلعی:

(**چند ضلعی محدب:** چند ضلعی که اندازه هر زاویه آن از 180° درجه کمتر باشد. یا پاره خطی که هر دو نقطه دلخواه آن را به هم وصل می کند کاملاً داخل چند ضلعی قرار گیرد.

چند ضلعی منتظم : چند ضلعی که همه اضلاعش با هم برابر باشند و همه زاویه هایش نیز با هم برابر باشند.

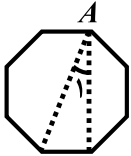
مثال: مثلث متساوی الاضلاع سه ضلعی منتظم و **مربع** چهار ضلعی منتظم است.

نکته: اندازه هر زاویه داخلی n ضلعی منتظم برابر است با :
$$\frac{(n-2) \times 180}{n}$$

نکته: اندازه هر زاویه خارجی n ضلعی منتظم برابر است با: $\frac{360}{n}$

نکته: هر زاویه داخلی n ضلعی منتظم با هر زاویه خارجی آن **مکمل** می شود.

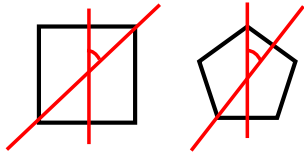
نکته: اندازه زاویه بین دو قطر متوالی رسم شده از یک رأس n ضلعی منتظم برابر است با: $\frac{180}{n}$



مثال (در n ضلعی منتظم مقابل زاویه بین دو قطر متوالی رسم شده از رأس A چند درجه است؟

$$\hat{A}_1 = \frac{180}{8} = 22/5^\circ$$

نکته: اندازه زاویه بین دو محور تقارن متوالی از یک چند ضلعی منتظم برابر است با: $\frac{180}{n}$



۲- چند ضلعی مقعر: چند ضلعی که حداقل یک زاویه بزرگتر از 180° درجه داشته باشد. و یا پاره خطی که هر دو نقطه دلخواه آن را به هم وصل می کند کامل داخل چند ضلعی قرار نگیرد.

مجموع زاویه های داخلی هر چند ضلعی برابر است با: $(n-2) \times 180 = (2-\text{تعداد اضلاع}) \times 180$

مثال: مجموع زوایای داخلی یک پندر ضلعی به چقدر می آید؟ 2750° درجه است اندازه زاویه مزف شده کدام است؟

(۱) 130° (۲) 50° (۳) 120° (۴) 90°

حل) چون مجموع زاویه های داخلی هر n ضلعی باید مضربی از 180° باشد با تقسیم 2750° بر 180° و یافتن مکمل باقی مانده

آن زاویه مورد نظر به دست می آید. و چون باقیمانده تقسیم $2750 \div 180 = 15$ برابر 50° می شود پس $180 - 50 = 130^\circ$ (زاویه مزف شده)

زاویه خارجی چند ضلعی محدب: زاویه ایست که از امتداد یک ضلع با ضلع دیگر به دست می آید.

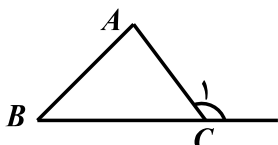
مجموع هر زاویه داخلی چند ضلعی با زاویه خارجی مجاورش 180° درجه می شود.

مجموع زاویه های خارجی هر چند ضلعی محدب دلخواه 360° درجه می شود.

مثال: اندازه یک زاویه داخلی در n ضلعی منتظمی ۶ برابر یک زاویه خارجی آن است این شکل چند ضلعی است؟

(۱) ۸ (۲) ۱۰ (۳) ۱۴ (۴) ۱۵

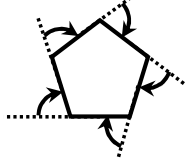
$$\frac{(n-2) \times 180}{n} = 6 \times \frac{360}{n} \Rightarrow (n-2) \times 180 = 6 \times 360 \Rightarrow 180n - 360 = 2160 \Rightarrow 180n = 2160 + 360 = 2520 \Rightarrow n = \frac{2520}{180} = 14$$



نکته: در هر مثلث اندازه هر زاویه خارجی با مجموع دو زاویه داخلی غیر مجاورش برابر است.

$$\hat{C}_1 = \hat{A} + \hat{B}$$

هر متحرکی که **محیط** یک چند ضلعی محدب را طی کند (یک دور کامل بزند) به اندازه 360° درجه می چرخد یعنی برابر با مجموع زاویه های خارجی چند ضلعی محدب.



نکته: از هر رأس یک n ضلعی محدب $n-3$ قطر می گذرد بنابراین تعداد کل قطرهای یک n ضلعی محدب برابر است با:

$$\frac{n(n-3)}{2}$$

مثال: تعداد قطرهای یک پند ضلعی مربع ۲۰ تا است. از هر رأس این پند ضلعی چند تا قطر می‌گذرد؟

نکته: بیشترین تعداد **زاویه قائمه** در یک n ضلعی که بیشتر از ۴ ضلع داشته باشد فقط ۳ تا می‌تواند باشد زیرا در غیر اینصورت مجموع زاویه‌های خارجی آن بیشتر از ۳۶۰ درجه می‌شود.

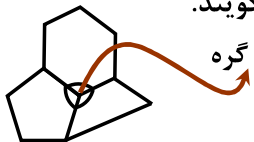
نکته مهم: هر n ضلعی محدب حداکثر **سه زاویه حاده (تند)** می‌تواند داشته باشد.

مثال: در یک ۱۳۹۳ ضلعی مربع حداکثر چند زاویه داخلی تند می‌تواند وجود داشته باشد؟

$$1393 \quad (1) \quad 15 \quad (2) \quad 3 \quad (3) \quad 13 \quad (4)$$

حل) حداکثر ۳ تا

کاشیکاری: قرار دادن چند ضلعیها در کنار هم طوری که روی هم نیفتند فضای خالی نیز بین آنها نباشد را کاشیکاری می‌گویند. **گره:** به رأسی که در آن مجموع زاویه‌های چند ضلعیها در موقع کاشیکاری ۳۶۰ درجه می‌شود گره می‌گویند.



نکته: با هر نوع سه ضلعی یا چهار ضلعی درخواه به تنهایی می‌توان یک سطح را کاشیکاری کرد.

نکته: در هر چهار ضلعی مقعر مانند $ABCD$ داریم:

$$\hat{C}_1 = \hat{A} + \hat{B} + \hat{D}$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{C} + \hat{C}_1 = 360 \\ \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360 \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{C} + \hat{C}_1 = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} \Rightarrow \hat{C}_1 = \hat{A} + \hat{B} + \hat{D}$$

تبدیل های هندسی

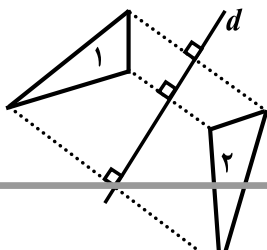
۱- انتقال: هرگاه شکلی را فقط با جابجا کردن وبدون تغییر جهت بتوان از نقطه ای در صفحه به نقطه‌ای دیگر در صفحه برد می‌گوییم انتقال انجام داده ایم.

۲- تقارن: هرگاه شکلی را حول خطی تا بزنیم طوری که آن شکل روی شکل دیگر **منطبق** شود می‌گوییم تبدیل تقارن انجام داده ایم.

۳- دوران: هرگاه شکلی را حول نقطه‌ای طوری بچرخانیم که آن شکل بر شکل دیگری **منطبق** شود می‌گوییم تبدیل دوران انجام داده ایم.

دو شکل هم نهشت (مساوی): هرگاه بتوانیم شکلی را با یک یا چند تبدیل (انتقال، تقارن، دوران) در صفحه، بر شکل دیگر منطبق کنیم می‌گوییم این دو شکل با هم، هم نهشت یا مساویند.

در دو شکل هندسی هم نهشت اجزای متناظر (زاویه ها و ضلع ها) دو به دو با هم برابرند.



محور تقارن: خطی است که قرینه‌ی هر نقطه شکل نسبت به آن نقطه دیگری از شکل است.

و یا خطی است که اگر شکل را روی آن تا بزنیم تمام نقاط شکل روی همدیگر قرار گیرند.

تذکر: برای پیدا کردن قرینه‌ی یک شکل نسبت به یک خط باید از نقاط آن شکل بر خط **عمود** کرده و سپس به همان اندازه امتداد دهیم.

در شکل مقابل روش انجام این کار را برای پیدا کردن قرینه مثلث ۱ می بینید.

نکته:

۱- بعضی از شکلهای محور تقارن ندارند مانند متوازی الاضلاع، دوزنقه قائم الزاویه

۲- بعضی از شکلهای یک محور تقارن دارند مانند مثلث متساوی الساقین، دوزنقه متساوی الساقین.

۳- بعضی از شکلهای چندین محور تقارن دارند. مانند مثلث متساوی الاضلاع (۳ محور)، مربع (۴ محور)،

مرکز تقارن: نقطه‌ای است که قرینه هر نقطه شکل نسبت به آن، نقطه‌ی دیگری از شکل می شود. یا

نقطه‌ای است که اگر شکل را ۱۸۰ درجه حول آن دوران دهیم شکل بر خودش منطبق شود.

نکته: بعضی از شکلهای مرکز تقارن ندارند مانند مثلث، دوزنقه

نکته: هر شکلی که **دو محور تقارن عمود برهم** داشته باشد حتما مرکز تقارن دارد.

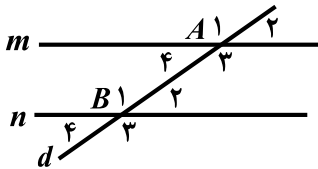
نکته: هر n ضلعی منتظم n **محور تقارن** دارد

نکته: هر n ضلعی منتظم به شرط آنکه n **زوج** باشد **مرکز تقارن** دارد.

خط های موازی و مورب

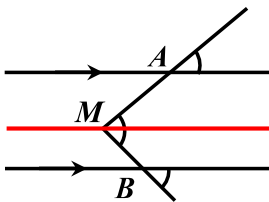
قضیه خطوط موازی و مورب: هرگاه دو خط موازی را خطی قطع کند ۸ زاویه

به وجود می آید که چهار تایی آنها تند و با هم مساوی و چهار تایی آنها باز و با هم مساویند.



$$d, m \parallel n \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_3 = \hat{B}_1 = \hat{B}_3$$

نکته مهم: هر دو زاویه تند و باز تشکیل شده در خط های موازی و مورب با هم **مکملند**.



$$\hat{M} = \hat{A} + \hat{B}$$

نکته: در شکل مقابل همواره داریم:

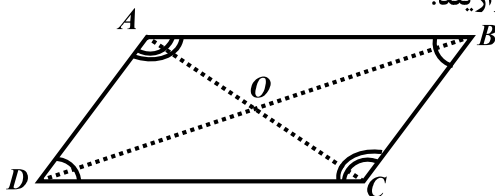
اثبات: از نقطه M خطی موازی با دو خط موازی دیگر رسم می کنیم و از قضیه خطوط موازی و مورب کمک می گیریم.

نکته ۱- فاصله‌ی دو خط موازی همواره ثابت است. ۲- دو خط عمود بر یک خط، با هم موازیند.

چهار ضلعی ها

الف) متوازی الاضلاع: چهار ضلعی است که اضلاع رو به روی آن دو به دو با هم موازیند.

خاصیت های متوازی الاضلاع:



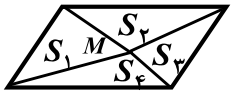
۱- زاویه های روبه رو دو به دو با هم برابرند. $\hat{B} = \hat{D}$ و $\hat{A} = \hat{C}$

۲- اضلاع رو به رو با هم برابرند. $AD = BC$ و $AB = DC$

۳- دو زاویه مجاور هر ضلع مکمل یکدیگرند. $\hat{D} + \hat{A} = 180$ و $\hat{C} + \hat{B} = 180$ و $\hat{B} + \hat{C} = 180$ و $\hat{A} + \hat{D} = 180$

۴- قطرهای همدیگر را نصف می کنند. $BO = DO$ و $AO = OC$

نکته مهم: در هر متوازی الاضلاع (مربع مستطیل و لوزی) مجموع مربعاتی چهار ضلع با مجموع مربع های دو قطر برابر است. یعنی:



نکته مهم: اگر M نقطه دلخواهی داخل متوازی الاضلاع باشد به چهار راس آن وصل کنیم مجموع مساحت های دو مثلث مقابل با مجموع مساحت دو مثلث دیگر برابر است و برابر با نصف مساحت متوازی الاضلاع می باشد.

$$S_1 + S_3 = S_2 + S_4 = \frac{S}{2}$$

مستطیل: متوازی الاضلاعی که همه زاویه هایش با هم برابرند (قائمه اند)

خاصیت های مستطیل:

چون مستطیل نوعی متوازی الاضلاع است پس تمام خاصیت های متوازی الاضلاع را دارد و علاوه بر آن خاصیت زیر را نیز دارد.
۱- در هر مستطیل دو قطر با هم برابرند.

لوزی: متوازی الاضلاعی که چهار ضلع آن با هم برابرند.

خاصیت های لوزی:

چون لوزی نوعی متوازی الاضلاع است پس تمام خاصیت های متوازی الاضلاع را دارد و علاوه بر آن خاصیت های زیر را نیز دارد.
۱- در لوزی قطر ها عمود منصف یکدیگرند.

۲- در لوزی قطر ها نیمساز زوایای مقابلشان هستند.

۳- در لوزی هر قطر محور تقارن آن است.

مربع: متوازی الاضلاعی که ۴ ضلع برابر و ۴ زاویه قائمه دارد.

خاصیت های مربع:

چون مربع نوعی متوازی الاضلاع، مستطیل و لوزی است تمام خاصیت های آنها را نیز دارد.

دوزنقه: چهار ضلعی که فقط دو ضلع آن با هم موازیند. به دو ضلع موازی آن قاعده کوچک و قاعده بزرگ می گوئیم و به دو ضلع دیگر آن ساق می گوئیم.

سه نوع دوزنقه داریم: ۱- دوزنقه مختلف الاضلاع که ساق هایش با هم برابر نیستند.

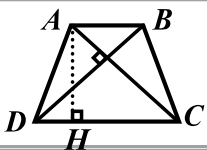
۲- دوزنقه قائم الزاویه که یکی از ساق هایش بر دو قاعده عمود است.

۳- دوزنقه متساوی الساقین که دو ساقش با هم برابرند.

خاصیت های دوزنقه:

۱- در هر دوزنقه دو زاویه مجاور هر ساق (دقت کنید فقط مجاور هر ساق) مکمل یکدیگرند.

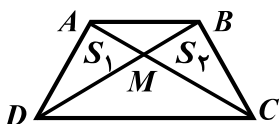
$$\hat{A} + \hat{D} = 180^\circ \quad \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$



نکته: در دوزنقه های متساوی الساقین و قائم الزاویه اگر قطر ها برهم عمود باشند آنگاه:

$$AC \perp BD \Rightarrow AH^2 = AB \times CD$$

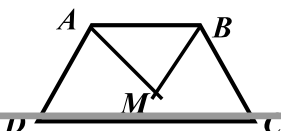
نکته: در هر دوزنقه مساحت دو مثلثی که بین ساقها و دو قطر دوزنقه تشکیل می شود با هم برابر ند.



$$S_{\triangle ADM} = S_{\triangle BMC}$$

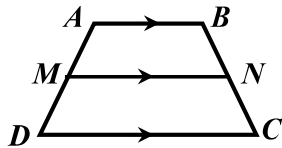
نکته: در هر دوزنقه دلخواه زاویه بین نیمسازهای دو زاویه A و B از رابطه زیر به دست می آید.

$$\frac{A+B}{2}$$



$$\hat{M} = \frac{\hat{D} + \hat{C}}{2}$$

نکته: (قضیه میان خط) اگر وسط دو ساق دوزنقه‌ای را به هم وصل کنیم پاره خط ایجاد شده موازی با دو قاعده دوزنقه

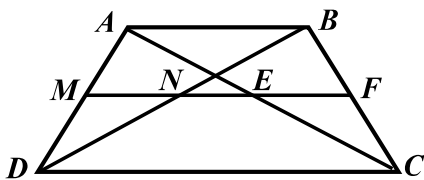


$$MN = \frac{AB + DC}{2}$$

و برابر با نصف مجموع اندازه‌های آن دو است.

مثال:

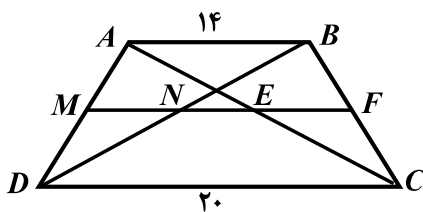
نکته: اگر در یک دوزنقه دو قطر و پاره خطی را که وسط دو ساق را به هم وصل می‌کند رسم کنیم داریم:



$$AB \parallel MF \parallel DC \quad \text{و} \quad MF = \frac{AB + DC}{2}$$

$$AE = EC \quad \text{و} \quad BN = ND$$

$$NE = \frac{DC - AB}{2} \quad \text{و} \quad MN = FE = \frac{1}{2} AB$$



مثال: در دوزنقه مقابل از وسط ساق‌های دوزنقه MF ، اموازی قاعده دوزنقه رسم می‌کنیم اندازه NE چقدر است؟

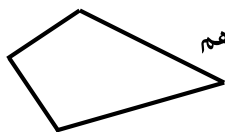
۳/۴

۳/۵

۴/۲

۵/۱

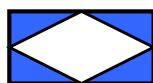
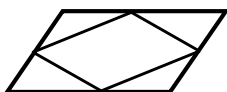
$$NE = \frac{DC - AB}{2} = \frac{20 - 14}{2} = 3$$



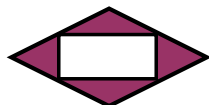
کایت (شبه لوزی): به چهار ضلعی گفته می‌شود که دو ضلع مجاورش با هم و دو ضلع مجاور دیگرش نیز با هم مساوی باشند. در هر کایت قطرهای برهم عمودند و فقط یکی عمود منصف دیگری است.

وصل کردن وسط اضلاع چهار ضلعی‌ها

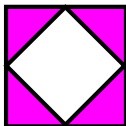
۱- اگر وسط‌های اضلاع یک متوازی‌الاضلاع را به طور متوالی به هم وصل کنیم دوباره یک متوازی‌الاضلاع پدید می‌آید.



۲- اگر وسط‌های اضلاع یک مستطیل را به طور متوالی به هم وصل کنیم یک لوزی پدید می‌آید.



۳- اگر وسط‌های اضلاع یک لوزی را به طور متوالی به هم وصل کنیم یک مستطیل پدید می‌آید.

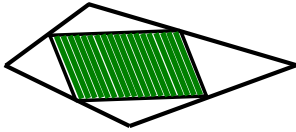


۴- اگر وسط‌های اضلاع یک مربع را به طور متوالی به هم وصل کنیم یک مربع پدید می‌آید.



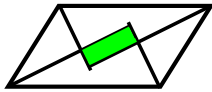
۵- اگر وسط‌های اضلاع یک دوزنقه متساوی الساقین را به هم وصل کنیم

یک **لوزی** پدید می آید.



۶- اگر وسطهای اضلاع یک چهار ضلعی دلخواه را به هم وصل کنیم

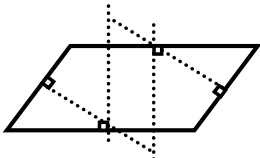
یک **متوازی الاضلاع** می آید.



۷- از برخورد نیمسازهای زاویه های داخلی هر متوازی الاضلاع ، **مستطیل** پدید می آید.



۸- از برخورد نیمسازهای زاویه های هر مستطیل ، **مربع** پدید می آید.



۱۰- از برخورد عمود منصف های هر ضلع متوازی الاضلاع با یکدیگر متوازی الاضلاع پدید می آید.

۱۱- در هر چهار ضلعی مجموع قطرها از نصف محیط آن بزرگتر است.

مثالها.

قضیه همار (نامساوی مثلثی) : در هر مثلث ، هر ضلع از مجموع دو ضلع دیگر کوچکتر و هر ضلع از تفاضل دو ضلع دیگر بزرگتر

است. یا

کوتاه ترین فاصله بین دو نقطه خط راستی است که از آن دو نقطه می گذرد.

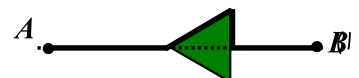
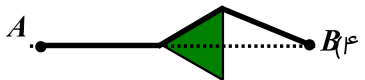
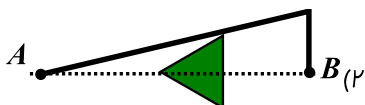
مثال: آیا سه پاره فط به طول ۴ و ۶ و ۷ سانتیمتر می توانند اضلاع یک مثلث باشند.

حل) بله زیرا طبق قضیه همار مجموع هر دو ضلع از ضلع سوم بزرگتر است.

$$۷ + ۶ > ۴ \quad \text{و} \quad ۴ + ۷ > ۶ \quad \text{و} \quad ۶ + ۴ > ۷$$

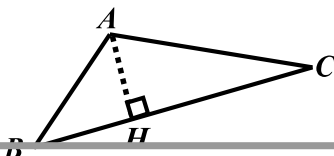
نکته: در هر مثلث ، **بزرگترین ضلع از ثلث محیط بزرگتر و کوچکترین ضلع ، از ثلث محیط کوچکتر است.**

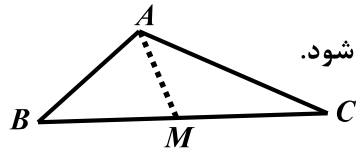
مثال: در کف یک انبار موشی که در نقطه A قرار دارد می فواید با طی کوتاه ترین مسیر به فندقی که در نقطه B قرار دارد برسد و باید مواظب باشد که در تله ای که به شکل مثلث متساوی الاضلاع است نیفتد اگر فط گذرنده از دو نقطه A و B محور تقارن مثلث باشد کوتاه ترین مسیر کدام است؟



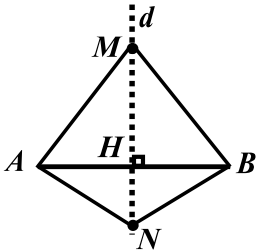
حل) اگر راس بالای مثلث را یک نقطه در نظر بگیریم طبق قضیه همار پاسخ گزینه ۳ فواید بود زیرا کمترین فاصله بین سه نقطه A و راس مثلث و B فواید بود.

ارتفاع: پاره خطی است که از راس بر ضلع مقابل عمود می شود.





میانه: پاره خطی است که از راس به میان ضلع مقابل (وسط) وصل می شود.

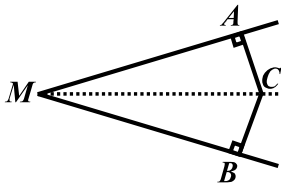


عمود منصف: خطی است که بر پاره خط عمود می شود و آن را نصف می کند.

نکته مهم: کوتاهترین فاصله یک نقطه از دو سر یک پاره خط زمانی است که نقطه بر روی عمود منصف پاره خط قرار دارد

خاصیت عمود منصف: فاصله هر نقطه روی عمود منصف یک پاره خط تا دو سر آن پاره خط به یک اندازه است.

$$MA = MB, NA = NB \Rightarrow \text{خط } d \text{ عمود منصف پاره خط } AB \text{ است.}$$



نیمساز: نیم خطی است که از راس زاویه می گذرد و زاویه را به دو قسمت مساوی تقسیم می کند.

خاصیت نیمساز: هر نقطه روی نیمساز یک زاویه باشد فاصله اش تا دو ضلع زاویه به یک اندازه است.

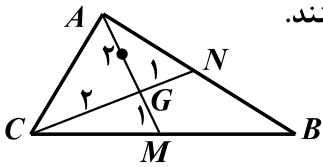
$$MC \Rightarrow \text{نیمساز زاویه } M \text{ است}$$

نکته: سه ارتفاع، سه میانه، سه عمود منصف و سه نیمساز مثلث همدیگر را در یک نقطه قطع می کنند که این نقطه برای هر چهار نوع خط در مثلث متساوی الاضلاع یکی است ولی در بقیه مثلثها این چهار نقطه متفاوتند.

نکته: میانه های مثلث همدیگر را در نقطه ای در داخل مثلث قطع می کنند که به فاصله دو واحد از راس

و یک واحد از ضلعی که آن را قطع می کنند قرار دارند. یعنی همدیگر را به نسبت ۲ به ۱ قطع می کنند.

نکته: نقطه ی تقاطع میانه ها را (نقطه همرسی) نقطه ثقل یا مرکز ثقل مثلث می گویند.



نکته: نقطه برخورد سه نیمساز زاویه های داخلی هر مثلث از سه ضلع مثلث به یک فاصله است.

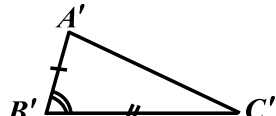
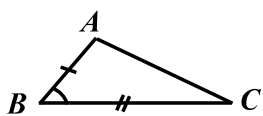
نکته: نقطه برخورد سه نیمساز داخلی هر مثلث مرکز دایره محاطی مثلث می شود. (در بخشهای بعدی تعریف می شود).

نکته: نقطه برخورد سه عمود منصف مثلث از سه راس مثلث به یک فاصله است.

نکته: نقطه برخورد سه عمود منصف مثلث مرکز دایره محیطی مثلث می شود. (در بخشهای بعدی تعریف می شود).

قضیه اول: هر گاه در دو مثلث دو ضلع نظیر به نظیر مساوی باشند ولی زاویه ی بین آنها مساوی نباشد

ضلع سوم در مثلثی بزرگتر است که زاویه ی روبه رو به آن بزرگتر باشد.



$$\left. \begin{array}{l} AB = A'B' \\ BC = B'C' \\ \hat{B}' > \hat{B} \end{array} \right\} \Rightarrow A'C' > AC$$

تشخیص نوع مثلث

الف) تشخیص نوع مثلث با داشتن اندازه سه ضلع آن

فرض کنیم سه ضلع مثلث برابر a, b, c باشند که $a > b > c$ در این صورت داریم.

۱- اگر $a^2 > b^2 + c^2$ باشد آنگاه یک زاویه مثلث حتماً باز است.

۲- اگر $a^2 = b^2 + c^2$ باشد آنگاه یک زاویه مثلث حتماً قائمه است.

۳- اگر $a^2 < b^2 + c^2$ باشد آنگاه هر سه زاویه مثلث تند می باشند

مثال: یک مثلث با اضلاع ۵ و ۷ و ۹ چه نوع مثلثی است؟

حل میزور بزرگترین ضلع مثلث ۸ می شود و مجموع میزور های دو ضلع دیگر $5^2 + 7^2 = 49 + 25 = 74$ می شود که چون $74 > 81$ می شود مثلث دارای یک زاویه باز است.

ب) تشخیص نوع مثلث با داشتن نسبت های سه زاویه آن

۱- اگر هر سه نسبت با هم برابر باشند مثلث متساوی الاضلاع است.

۲- اگر فقط دو تا از نسبتها با هم برابر باشند مثلث متساوی الساقین است.

۳- اگر بزرگ ترین نسبت با مجموع دو نسبت دیگر برابر باشد مثلث قائم الزاویه است.

۴- اگر بزرگ ترین نسبت ،بزرگتر از مجموع دو نسبت دیگر باشد مثلث دارای یک زاویه باز است.

۵- اگر بزرگترین نسبت ،کوچکتر از مجموع دو نسبت دیگر باشد مثلث دارای سه زاویه تند است.

مثال: اندازه های سه زاویه مثلثی با اعداد ۵ و ۴ و ۱ متاسب هستند این مثلث از کدام نوع است؟

۱) متساوی الاضلاع ۲) متساوی الساقین ۳) قائم الزاویه ۴) منفرجه الزاویه

حل) با توجه به نکات بالا چون مجموع دو نسبت کوچک تر برابر است با نسبت بزرگتر پس مثلث قائم الزاویه است.

نقطه برخورد ارتفاع ها

۱- در هر مثلث که دارای زاویه باز باشدنقطه برخورد ارتفاع ها ،خارج مثلث قرار می گیرد.

۲- در هر مثلث که دارای زاویه قائمه باشدنقطه برخورد ارتفاع ها ،روی راس قائم قرار می گیرد.

۳- در هر مثلث که سه زاویه آن تند باشدنقطه برخورد ارتفاع ها ،داخل مثلث قرار می گیرد.

مثال) اگر اضلاع مثلثی ۸ و ۵ و ۴ باشند محل تلاقی سه ارتفاع مثلث کجا قرار دارد؟

۱) داخل مثلث ۲) در راس مقابل به ضلع کوچک تر ۳) خارج مثلث ۴) روی ضلع بزرگ تر

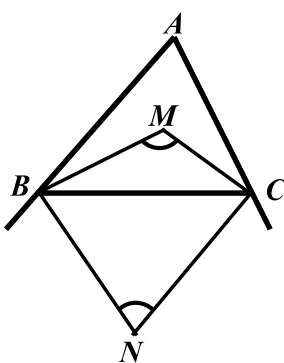
حل) چون $8^2 > 4^2 + 5^2$ در نتیجه این مثلث یک زاویه باز دارد پس طبق نکته بالا نقطه برخورد ارتفاع ها خارج مثلث قرار می گیرد.

زاویه ی بین دو نیمساز داخلی در هر مثلث:

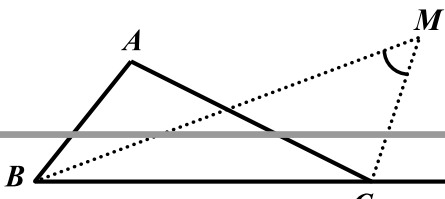
$$\hat{M} = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$$

زاویه ی بین دو نیمساز خارجی در هر مثلث:

$$\hat{N} = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2}$$

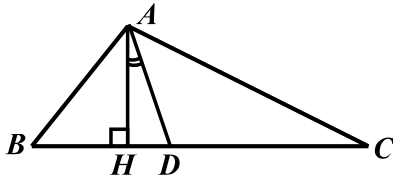


زاویه ی محل برخورد نیمساز زاویه خارجی ونیمساز زاویه داخلی غیر مجاور آن:



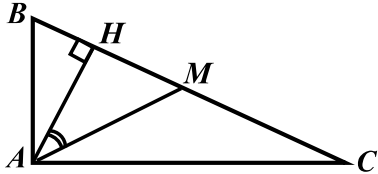
$$\hat{M} = \frac{\hat{A}}{2}$$

زاویه بین **ارتفاع و نیمساز زاویه هر را** مثلث برابر نصف اختلاف دو زاویه دیگر است.



$$\hat{HAD} = \frac{\hat{B} - \hat{C}}{2}$$

زاویه بین **میان و ارتفاع** وارد بر وتر در مثلث قائم الزاویه برابر است با قدر مطلق اختلاف دو زاویه تند (حاده) مثلث.

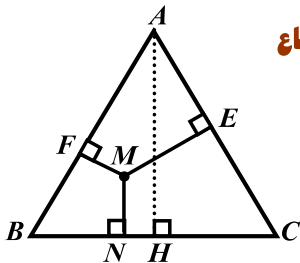


$$\hat{HAM} = \left| \hat{B} - \hat{C} \right|$$

مثال: در مثلث قائم الزاویه ای، زاویه بین ارتفاع و میان وارد بر وتر ۲۶ درجه است کوچک ترین زاویه ی مثلث چند درجه است؟

۲۴(۱) ۲۸(۲) ۳۲(۳) ✓ ۳۴(۴)

مجموع فاصله های هر نقطه ی دلخواه درون یک مثلث متساوی الاضلاع از سه ضلع آن برابر **ارتفاع** مثلث خواهد بود.

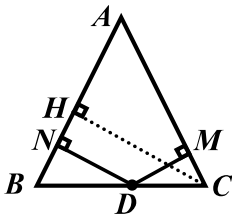


$$AB = AC = BC \Rightarrow ME + MF + MN = AH$$

مثال: در مثلث متساوی الاضلاع ABC به ضلع $8\sqrt{3}$ اگر فاصله های نقطه ی M در داخل مثلث از ضلع های AB و AC به ترتیب ۳ و ۵ باشد فاصله ی آن از ضلع BC کدام است؟

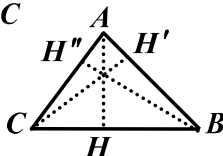
۷(۱) ۶(۲) ۴(۳) ✓ ۳(۴)

نکته: مجموع فاصله های هر نقطه روی قاعده **مثلث متساوی الساقین** تا دو ساق برابر ارتفاع وارد بر ساق مثلث است.



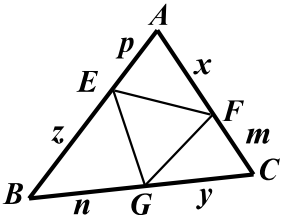
$$DN + DM = CH$$

نکته: مجموع اندازه های **سه ارتفاع** هر مثلث از **محیط مثلث** کوچک تر است.



$$AH + CH' + BH'' < AB + BC + CA$$

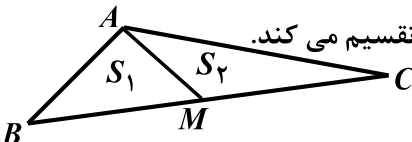
نکته: اگر یکی از اضلاع یک مثلث متساوی الاضلاع را به اندازه خودش امتداد دهیم مثلث حاصل قائم الزاویه است.



نکته: وقتی مثلثی درون مثلث دیگر به اضلاع a, b, c محیط می شود رابطه ی زیر بین مساحت های آنها برقرار است.

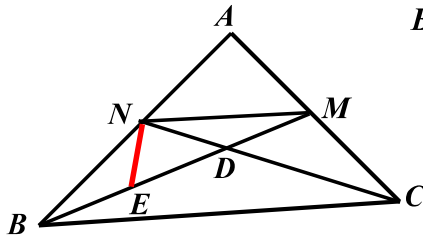
$$\frac{S_{\triangle EFG}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{xyz + mnp}{abc}$$

نکته: هر **میان** مثلث آن را به دو مثلث که مساحت آنها با هم برابر است (**مثلث معادل**) تقسیم می کند.



$$S_{\triangle ABM} = S_{\triangle AMC} \Rightarrow S_1 = S_2$$

نکته: اگر قاعده یک مثلث را به n قسمت مساوی تقسیم کنیم و هر یک از نقاط تقسیم را به راس مقابل قاعده وصل کنیم مثلث اصلی به n **مثلث معادل** تقسیم می شود.

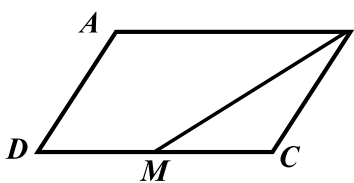


مثال: در شکل زیر BM و CN میانه اضلاع AC و AB می باشد اگر بدانیم $BD = 2DM$ نسبت مساحت مثلث MDN به مساحت مثلث ABC کرام است؟

$$\frac{1}{12} \quad (1) \quad \frac{1}{8} \quad (2) \quad \frac{1}{6} \quad (3) \quad \frac{1}{5} \quad (4)$$

حل) اگر وسط BD را E بنامیم خواهیم داشت. $BE = ED = DM = \frac{1}{3} BM$

$$S_{\triangle MDN} = \frac{1}{3} S_{\triangle MNB} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times S_{\triangle AMB} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} = \frac{1}{27} S_{\triangle ABC}$$



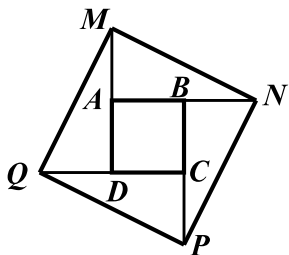
مثال) در متوازی الاضلاع زیر نقطه M وسط ضلع DC است مساحت متوازی الاضلاع چند برابر مساحت مثلث BMC است؟ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ ✓ (۴) ۵/۳

در بین مثلث ها با محیط ثابت، مثلثی دارای بیشترین مساحت است که متساوی الاضلاع باشد.
در بین مثلثهای با مساحت ثابت ، مثلثی دارای کمترین محیط است که متساوی الاضلاع باشد

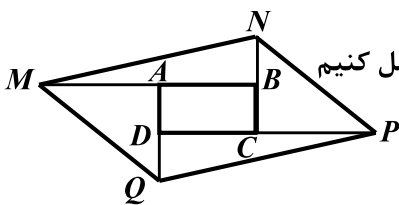
اگر هر ضلع مثلث را از یک طرف به اندازه خودش ادامه دهیم ونقاط حاصل را به هم وصل کنیم مثلثی پدید می آید که مساحت آن ۷ برابر مساحت مثلث اولیه است.

اثبات با استفاده از رسم میانه ها و مثلثهای معادل

$$S_{\triangle MNP} = 7 S_{\triangle ABC}$$

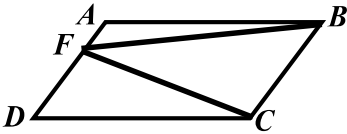
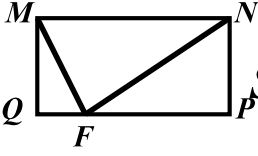


اگر هر ضلع مربع را از یک طرف به اندازه خودش ادامه دهیم ونقاط حاصل را به هم وصل کنیم مربعی پدید می آید که مساحت آن ۵ برابر مساحت مربع اولیه است.
 حل) مساحت هر یک از مثلث های قائم الزاویه داخل شکل با مساحت مربع اولیه برابر است.



اگر هر ضلع یک مستطیل را از یک طرف به اندازه خودش ادامه دهیم ونقاط حاصل را به هم وصل کنیم متوازی الاضلاعی پدید می آید که مساحت آن ۵ برابر مساحت مستطیل اولیه است.

اگر در یک مستطیل یا متوازی الاضلاع از یک نقطه واقع بر یک ضلع به دو راس غیر واقع بر آن ضلع وصل کنیم مساحت مثلث حاصل نصف مساحت مستطیل یا متوازی الاضلاع است.

$$S_{\triangle BCF} = \frac{1}{2} S_{ABCD} \quad S_{\triangle MFN} = \frac{1}{2} S_{MNPQ}$$



حالت های هم نهشتی دو مثلث

حالت های هم نهشتی هر دو مثلث دلخواه:

- ۱- تساوی سه ضلع (ض ض ض)
- ۲- تساوی دو ضلع و زاویه بین (ز ض ز)
- ۳- تساوی دو زاویه و ضلع بین (ض ز ض)

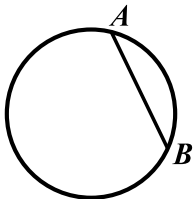
تذکر مهم ۱: دو مثلث در حالت سه زاویه ی مساوی هیچ گاه هم نهشت نفواهند بود. یعنی حالت هم نهشتی (ز ز ز) اصلاً نداریم.

تذکر مهم ۲: هرگاه دو مثلث با یکدیگر هم نهشت شوند ارتفاع ها، نیمساز ها و میانه های نظیر آنها نیز با یکدیگر برابرند.

حالت های هم نهشتی دو مثلث قائم الزاویه:

- ۱- تساوی سه ضلع (ض ض ض)
- ۲- تساوی دو ضلع و زاویه بین (ز ض ز)
- ۳- تساوی دو زاویه و ضلع بین (ض ز ض)
- ۴- وتر و یک زاویه تند (و ز)
- ۵- وتر و یک ضلع (و ض)

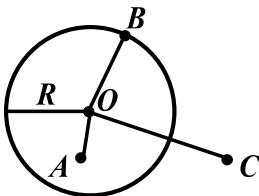
دایره



وتر: پاره خطی است که دوسر یک کمان را به هم وصل می کند.

قطر: بزرگترین وتر دایره است و یا وتری است که از مرکز دایره می گذرد.

کمان: قسمتی از محیط دایره است که بین دو نقطه قرار می گیرد. $\widehat{AB}$



وضع یک نقطه و یک دایره:

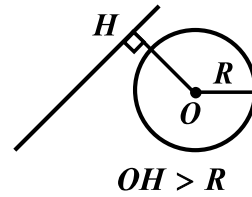
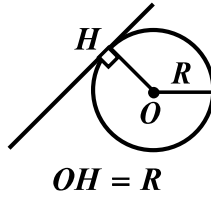
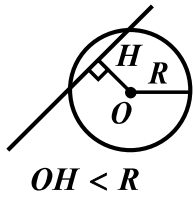
نقطه داخل دایره $AO < R$

نقطه روی دایره $BO = R$

نقطه خارج دایره $CO > R$

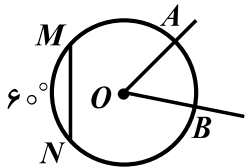
وضع یک خط و یک دایره

- ۱- خط ودایره نقطه مشترک ندارند (متخارج)
- ۲- خط ودایره یک نقطه مشترک دارند. (مماس)
- ۳- خط ودایره دو نقطه مشترک دارند (متقاطع)



تذکر: دانش آموزان عزیز به یاد داشته باشید برای بررسی وضع یک دایره با نقطه یا خط باید حتماً فاصله نقطه و خط تا مرکز با شعاع دایره سنجیده شود نه با قطر آن.

نکته: شعاع دایره بر خط مماس در نقطه تماس عمود است.



زاویه مرکزی: زاویه ای که راس آن روی مرکز دایره است و اضلاع آن دایره را قطع می کند.
اندازه زاویه مرکزی با اندازه کمان رو به رویش برابر است.
 $\widehat{AOB} = \widehat{AB}$

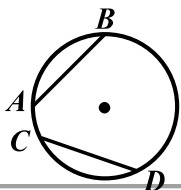
نکته: هر وتری که رو به رو به روی کمان ۶۰ درجه باشد اندازه اش با شعاع دایره برابر است. $\widehat{MN} = 60^\circ \Rightarrow MN = R$ وتر

محاسبه طول یک کمان:

$$\text{محیط دایره} \times \frac{\widehat{A}}{360} = \text{طول کمان} \quad \text{یا} \quad \text{طول کمان} = \frac{\text{اندازه زاویه مرکزی رو به رو به کمان} \times \text{محیط دایره}}{360}$$

مثال: طول یک کمان که رو به رو به زاویه مرکزی ۴۰ درجه در دایره ای به شعاع ۳ سانتیمتر می باشد چقدر است؟

$$\text{طول کمان} = \frac{2 \times 3 \times 3/14 \times 40}{360} = \frac{3/14 \times 2}{3} = \frac{6/28}{3} = \frac{2}{9}$$

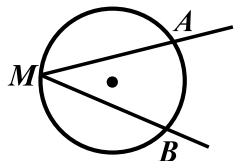


نکته: در هر دایره وترهای رو به رو به کمان های مساوی با هم برابرند و بالعکس.

$$\widehat{AB} = \widehat{CD} \Rightarrow AB = CD \quad \text{و} \quad AB = CD \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{CD}$$

نکته: برای تقسیم دایره به ۶ و ۳ کمان مساوی فقط به کمک پرگار دهانه پرگار را به اندازه شعاع دایره باز می کنیم و متوالیاً کمان می زنیم تا دایره به ۶ کمان مساوی تقسیم شود. برای تقسیم به سه کمان هر دو کمان متوالی را یک کمان در نظر می گیریم.

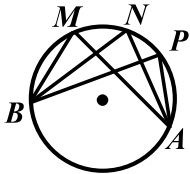
زاویه محاطی: زاویه ای که راس آن روی محیط دایره است و دو ضلعش دایره را قطع می کند.



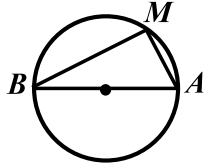
$$\widehat{M} = \frac{\widehat{AB}}{2}$$

اندازه زاویه محاطی با نصف اندازه کمان رو به رویش برابر است.

نکته: در هر دایره زاویه های محاطی رو به رو به یک کمان با هم مساویند.

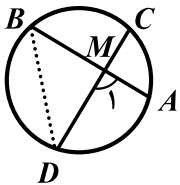


$$\hat{M} = \hat{N} = \hat{P} = \widehat{AB}$$



نکته: در هر دایره زاویه محاطی رو به رو به قطر قائمه (۹۰ درجه) می شود. زاویه ی M رو به رو به قطر است پس ۹۰ درجه می شود.

زاویه ی داخلی دایره: زاویه ای است که از برخورد دو وتر در داخل دایره پدید می آید.

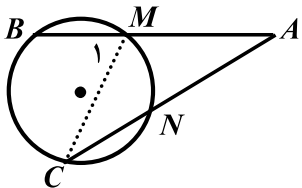


اندازه هر زاویه داخلی برابر با نصف مجموع کمان های مقابل به آن است.

$$\hat{M}_1 = \frac{\widehat{AB} + \widehat{CD}}{2}$$

اثبات: از نقطه ی B به D وصل می کنیم چون زاویه ی $\hat{M}_1$ زاویه خارجی مثلث BMD است پس با دو زاویه ی داخلی غیر مجاورش برابر است.

$$\hat{M}_1 = \hat{B} + \hat{D} = \frac{AB}{2} + \frac{CD}{2} = \frac{AB + CD}{2}$$



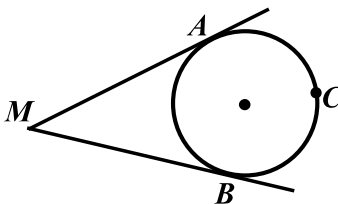
زاویه ی خارجی دایره: زاویه ای است که از برخورد امتداد دو وتر دایره به دست می آید.

$$\hat{A} = \frac{\widehat{BC} - \widehat{MN}}{2}$$

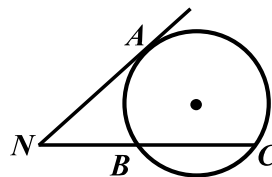
اندازه ی هر زاویه ی خارجی برابر با نصف اختلاف (تفاضل) دو کمان مقابل آن است.

اثبات) از نقطه ی M به C وصل می کنیم چون زاویه ی $\hat{M}_1$ زاویه خارجی مثلث AMC است پس با دو زاویه ی داخلی غیر مجاورش برابر است.

$$\hat{M}_1 = \hat{A} + \hat{C} \Rightarrow \hat{A} = \hat{M}_1 - \hat{C} = \frac{BC}{2} - \frac{MN}{2} = \frac{BC - MN}{2}$$



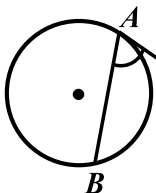
$$\hat{M} = \frac{\widehat{ACB} - \widehat{AB}}{2}$$



$$\hat{N} = \frac{\widehat{AC} - \widehat{AB}}{2}$$

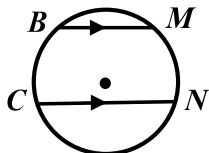
شکل های دیگر زاویه خارجی دایره

زاویه ظلی: زاویه ای که راس آن روی محیط دایره قرار دارد و یکی از اضلاع آن مماس بر دایره و

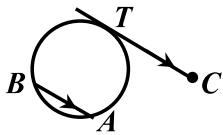


$$\hat{A} = \frac{\widehat{AB}}{2}$$

ضلع دیگرش وتری از دایره است. **نکته:** اندازه هر زاویه ظلی نصف کمان رو به رویش است. (مانند اندازه زاویه محاطی)

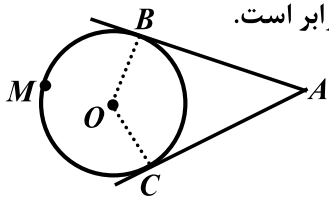


نکته: کمان های بین دو وتر موازی و بالعکس $BM \parallel CN \Rightarrow \widehat{MN} = \widehat{BC}$



نکته: کمان های بین یک خط مماس و وترى که با آن موازى است با هم برابرند.

$$AB \parallel CT \Rightarrow \widehat{AT} = \widehat{BT}$$



نکته ۱: از یک نقطه فقط می توان دو مماس بر دایره رسم کرد که طول این دو مماس همیشه با هم برابر است.

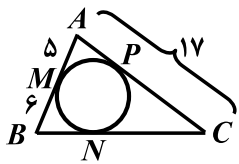
$$AB = AC$$

$$\widehat{A} + \widehat{BC} = 180^\circ$$

نکته ۲: کمان بین دو مماس و زاویه بین دو مماس با هم مکملند.

اثبات: از نقاط B و C به مرکز دایره وصل می کنیم و سپس با توجه با اینکه شعاع دایره بر خط مماس در نقطه تماس عمود است و مجموع زاویه های چهار ضلعی 360° درجه است داریم:

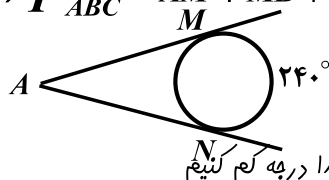
$$\left. \begin{array}{l} \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{O} = 360 \\ \widehat{B} + \widehat{C} = 180 \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{A} + \widehat{O} = 180 \xrightarrow{\widehat{O} = \widehat{BC}} \widehat{A} + \widehat{BC} = 180^\circ$$



مثال: با توجه به شکل مقابل AB و BC و AC بر دایره مماسنرممیت مثلث ABC را به دست آورید.

با توجه به اینکه دومماس رسم شده از هر نقطه با هم برابرند. داریم:

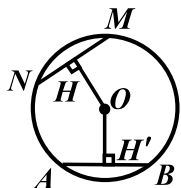
$$\left. \begin{array}{l} AM = AP = 5 \\ BM = BN = 6 \\ CP = CN = 17 - 5 = 12 \end{array} \right\} \Rightarrow P_{ABC}^{\Delta} = AM + MB + BN + NC + CP + PA = 5 + 6 + 6 + 12 + 12 + 5 = 46$$



مثال: زاویه ی A در شکل مقابل چند درجه است؟

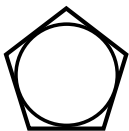
حل) با توجه به نکات بالا کافیسست کمان MN را حساب کنیم و از 180° درجه کم کنیم

$$\widehat{MN} = 360 - 240 = 120 \Rightarrow \widehat{A} = 180 - 120 = 60$$



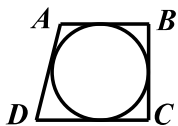
نکته: هر دو وترى که از مرکز دایره به یک فاصله باشند مساویند و بالعکس

$$OH = OH' \Rightarrow AB = MN \quad \text{و} \quad AB = MN \Rightarrow OH = OH'$$



چند ضلعی محیطی: چند ضلعی است که همه ی اضلاع آن بردایره مماس باشد.

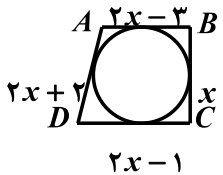
به دایره ای که داخل چند ضلعی محیطی قرار دارد **دایره محاطی** گفته می شود.



نکته: در چهار ضلعی محیطی مجموع اندازه دو ضلع مقابل با مجموع دو ضلع مقابل دیگر برابر است.

$$AB + DC = AD + BC$$

مثال) در چهار ضلعی محیطی مقابل مقدار x را به دست آورید.



$$(2x-3) + (2x-1) = (2x+2) + x \Rightarrow 4x-4 = 3x+2 \Rightarrow 4x-3x = 2+4 \Rightarrow x = 6$$

حل)



نکته: مرکز دایره محاطی هر چند ضلعی محل برخورد نیمسازهای زاویه های داخلی آن است.

نکته: شعاع دایره محاطی هر مثلث برابر است با مساحت مثلث تقسیم بر نصف محیط یعنی $\frac{S}{P}$

مثال: در مثلثی به اضلاع ۱۰، ۲۴ و ۲۶ شعاع دایره محاطی مثلث چقدر است؟

۶(۱) ۸(۲) ۷(۳) ۴(۴)

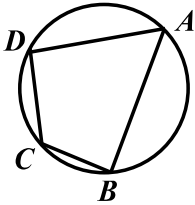
حل: چون اندازه اضلاع مثلث اعداد فیثاغورسی هستند پس مثلث قائم الزویه است و داریم:

$$P = \frac{10 + 24 + 26}{2} = 30$$

$$S = \frac{24 \times 10}{2} = 120 \Rightarrow \text{شعاع دایره محاطی} = \frac{S}{P} = \frac{120}{30} = 4$$

چند ضلعی محاطی: چند ضلعی است که تمام راس های آن روی محیط یک دایره واقع شده باشند.

نکته: به دایره ای که چند ضلعی داخل آن قرار گرفته دایره ی محیطی می گویند.



$$\hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$$

نکته: در هر چهار ضلعی محاطی زاویه های مقابل مکملند.

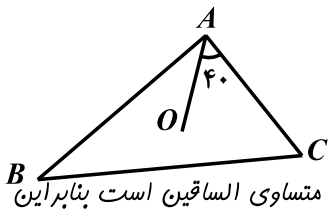
نکته: مرکز دایره ی محیطی هر چند ضلعی محل برخورد عمود منصف های آن است.

نکته: شعاع دایره محیطی هر مثلث برابر است با حاصل ضرب اضلاع مثلث تقسیم بر ۴ برابر مساحت آن یعنی: $\frac{abc}{4S}$

مثال: در مثلث ABC نقطه O مرکز دایره محیطی مثلث است. اگر $\hat{OAC} = 40^\circ$ باشد.

اندازه زاویه $\hat{B}$ چند درجه است؟

۵۰(۱) ۶۵(۲) ۷۰(۳) ۴۵(۴)



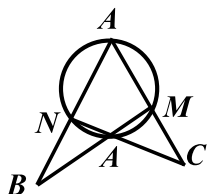
حل: ابتدا O را به C وصل می کنیم چون A و B و C روی دایره محیطی قرار دارند پس مثلث AOC متساوی الساقین است بنابراین

$$\hat{OCA} = 40^\circ \Rightarrow \hat{AOC} = 180 - (40 + 40) = 100$$

مثال: کدام چهار ضلعی هم محاطی و هم محیطی است؟

(۱) لوزی (۲) مربع (۳) مستطیل (۴) متوازی الاضلاع

حل: چون در چهار ضلعی محاطی زاویه های رو به رو مکمل هستند و در چهار ضلعی محیطی مجموع دو ضلع روبه رو با مجموع دو ضلع دیگر برابر است بنابراین لوزی فقط محیطی و مستطیل فقط محاطی است ولی مربع هم محیطی و هم محاطی می شود.

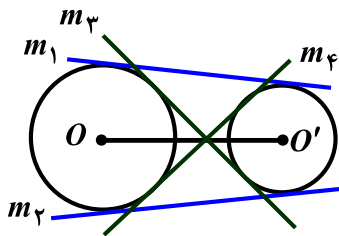


نکته: در شکل مقابل اگر نقطه برخورد دو پاره خط BM و CN روی دایره باشد و

A و M و N روی محیط دایره باشند داریم:

$$2\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

خط المرکزین: پاره خطی است که مرکزهای دو دایره را به هم وصل می کند و به طور معمول آن را با حرف d نمایش می دهند.



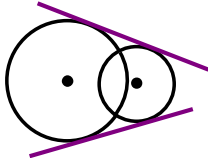
وضع دو دایره نسبت به هم:

۱- دو دایره **متخارج** هستند. $d > R + R'$

در این حالت دو مماس داخلی (m_3, m_4) و دو مماس خارجی (m_1, m_2) وجود دارد.

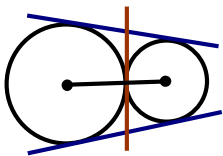
تذکر: برای پیدا کردن اندازه مماس خارجی، دو شعاع دایره ها را که بر نقطه تماس وارد می شوند رسم می کنیم و سپس از نقطه تماس در دایره کوچکتر خطی موازی با خط المرکزین رسم می کنیم تا یک مثلث قائم الزاویه تشکیل شود و بعد از رابطه فیثاغورس کمک می گیریم.

$$\text{اندازه مماس خارجی} = \sqrt{d^2 - (R - R')^2} \quad \text{و} \quad \text{اندازه مماس داخلی} = \sqrt{d^2 - (R + R')^2}$$



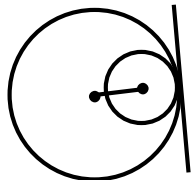
۲- دو دایره **متقاطع** هستند. $R - R' < d < R + R'$

در این حالت دو دایره فقط ۲ مماس مشترک خارجی دارند.



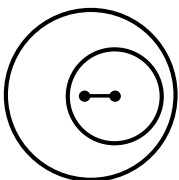
۳- دو دایره **مماس خارجی** اند. $d = R + R'$

در این حالت دو دایره ۲ مماس مشترک خارجی و یک مماس مشترک داخلی دارند.



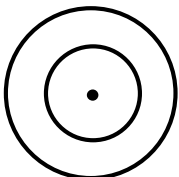
۴- دو دایره **مماس داخلی** اند. $d = R - R'$

در این حالت دو دایره فقط یک مماس مشترک خارجی دارند.



۵- دو دایره **متداخل** اند. $0 < d < R - R'$

در این حالت دو دایره مماس مشترکی ندارند.



۶- دو دایره **هم مرکزند**. $d = 0$

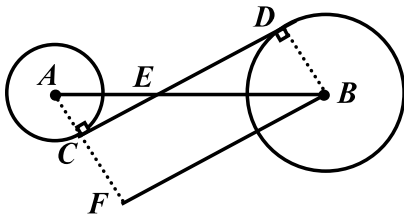
در این حالت دو دایره مماس مشترکی ندارند.

نکته: دو دایره که بیشتر از دو نقطه مشترک داشته باشند برهم منطبقند.

نکته: از دو نقطه بی شمار دایره می گذرد که مرکز این دایره ها عمود منصف پاره خطی است که این دو نقطه را به هم وصل می کند.

نکته: از سه نقطه غیر واقع بر یک خط راست فقط یک دایره می گذرد که مرکز این دایره نقطه‌ی برخورد عمود منصف های اضلاع مثلثی است. که این سه نقطه رئوس آن هستند.

مثال: شعاع دو دایره ۱۵ و ۱۰ سانتیمتر و طول قط المکزین ۳ سانتیمتر است و دایره نسبت به هم چه وضعی دارند؟
 (۱) مماس داخلی (۲) متقارح (۳) مماس خارجی (۴) متقاطع
 حل) چون طول قط المکزین با تفاضل دو شعاع مساوی است پس دو دایره مماس داخلی هستند.



مثال: دایره هایی به مرکز های A و B به شعاع های ۳ و ۵ در شکل زیر مفروضند
 مماس داخلی CD قط المکزین AB را در نقطه E قطع کرده است اگر $AE = 5$
 باشد اندازه CD کدام است؟

(۱) $\sqrt{221}$ (۲) $\sqrt{225}$ (۳) $\frac{44}{3}$ (۴) $\frac{55}{3}$

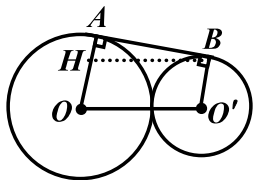
حل) FB را موازی CD رسم می کنیم چهار ضلعی FCB D مستطیل است. $AF = AC + CF = 3 + 8 = 11$

از تشابه دو مثلث $\triangle EBD$ و $\triangle ACE$ داریم: $\frac{AC}{DB} = \frac{AE}{BE} \Rightarrow \frac{3}{8} = \frac{5}{BE} \Rightarrow BE = \frac{40}{3} \Rightarrow AB = 5 + \frac{40}{3} = \frac{55}{3}$

حال از رابطه فیثاغورس در مثلث AFB داریم:

$$AB^2 = AF^2 + FB^2 \Rightarrow \left(\frac{55}{3}\right)^2 = 11^2 + FB^2 \Rightarrow FB = \frac{44}{3} = CD$$

مثال: در شکل رو به رو دو دایره به شعاع های ۶ و ۸ مماس خارج اند و AB مماس مشترک خارجی آنهاست
 محیط ذو زنگه ی OABO' کدام است؟



(۱) $28 + 52\sqrt{3}$ (۲) $28 + 54\sqrt{3}$
 (۳) $28 + 8\sqrt{3}$ (۴) $28 + 60\sqrt{3}$

حل) از نقطه B خطی موازی با خط المکزین رسم می کنیم و سپس در مثلث قائم الزاویه BAH رابطه ی فیثاغورس را می نویسیم تا طول مماس خارجی AB را حساب کنیم (طول AH برابر با افتلاف دو شعاع یعنی ۲ می باشد)

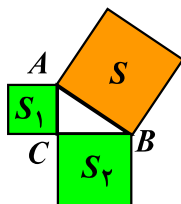
$$BH^2 = AH^2 + AB^2 \Rightarrow 14^2 = 2^2 + AB^2 \Rightarrow AB^2 = 196 - 4 = 192 \Rightarrow AB = 8\sqrt{3}$$

$$P = AB + BO' + O'O + OA = 8\sqrt{3} + 6 + 14 + 8 = 28 + 8\sqrt{3}$$

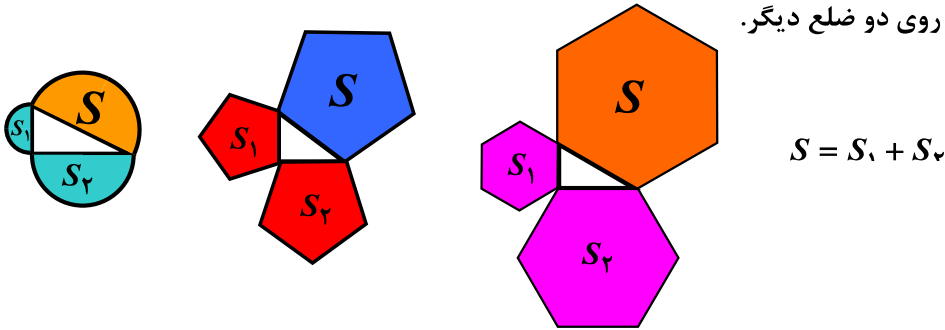
رابطه ی فیثاغورس

در هر مثلث قائم الزاویه مربع وتر برابر است با مجموع مربع های دو ضلع دیگر

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 \Rightarrow S = S_1 + S_2$$

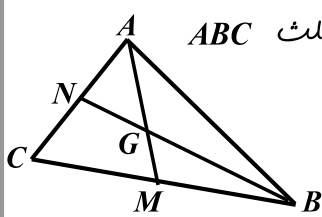


تذکر مهم: هر چند ضلعی منتظم یا نیمدایره روی اضلاع یک مثلث قائم الزاویه بسازیم همیشه مساحت شکل روی وتر برابر است با مجموع مساحت های دو شکل روی دو ضلع دیگر.



اعداد فیثاغورسی: به سه تایی های $(۳, ۴, ۵)$ و $(۵, ۱۲, ۱۳)$ و... ومضارب آنها که در رابطه ی فیثاغورس صدق می کنند اعداد فیثاغورسی می گویند.

نکته: اگر a عدد طبیعی بزرگتر از ۱ باشد آنگاه $a^2 + 1$ و $a^2 - 1$ و $2a$ همواره اعداد فیثاغورسی هستند.



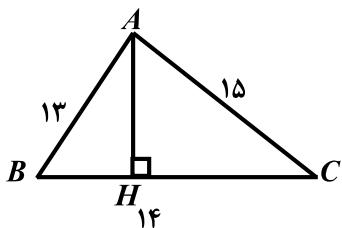
مثال: در شکل طول میانه های $AM = ۷/۵$ و $BN = ۱۲$ می باشد اگر $AC = ۶$ باشد مساحت مثلث ABC چقدر است؟ (۱) $۲۲/۵$ (۲) ۲۴ (۳) ۱۵ (۴) ۳۶

$$AG = \frac{2}{3} AM \Rightarrow AG = \frac{2}{3} \times 7/5 = 14/15$$

$$NG = \frac{1}{3} BN \Rightarrow NG = \frac{1}{3} \times 12 = 4 \quad \text{و} \quad AN = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \times 6 = 3$$

چون اضلاع مثلث ANG دارای اضلاع $۳, ۴, ۵$ است پس قائم الزاویه می باشد در نتیجه ارتفاع BN نیز می شود بنابراین

$$S_{\triangle ABC} = \frac{AC \times BN}{2} = \frac{6 \times 12}{2} = 36 \quad \text{داریم:}$$



مثال: در مثلثی به اضلاع $۱۵, ۱۴, ۱۳$ مطابق شکل ارتفاع AH را رسم می کنیم طول BH کدام است؟

(۱) ۵ (۲) $۴/۵$ (۳) ۴۰ (۴) $۹/۵$

حل: در مثلثهای قائم الزاویه AHB و AHC رابطه ی فیثاغورس را می نویسیم

$$\left. \begin{aligned} AH^2 &= AB^2 - BH^2 \Rightarrow AH^2 = 13^2 - BH^2 \\ AH^2 &= AC^2 - CH^2 \Rightarrow AH^2 = 15^2 - (14 - BH)^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 13^2 - BH^2 = 15^2 - (14 - BH)^2$$

$$\Rightarrow (14 - BH)^2 - BH^2 = 15^2 - 13^2 = 225 - 169 = 56 \Rightarrow \dots BH = 5$$

نکته: در هر مثلث قائم الزاویه ضلع رو به روی زاویه ۳۰ درجه نصف وتر است و برعکس.

نکته: در هر مثلث قائم الزاویه ضلع رو به روی زاویه ۴۵ درجه $\frac{\sqrt{2}}{2}$ وتر است و برعکس.

نکته: در هر مثلث قائم الزاویه ضلع رو به روی زاویه ۶۰ درجه $\frac{\sqrt{3}}{2}$ وتر است و برعکس.

نکته: در هر مثلث قائم الزاویه که زاویه ۱۵ درجه یا ۷۵ درجه داشته باشد ارتفاع وارد بر وتر، ربع وتر است.

نکته: در هر مثلث قائم الزاویه میانه وارد بر وتر نصف وتر است و برعکس.

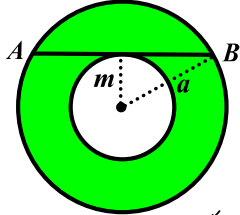
مثال: در مثلث ABC ضلع BC برابر ۱۰ سانتیمتر و میانه AM برابر ۵ است. این مثلث:

(۱) در رأس A تند است. (۲) در رأس A قائمه است.

(۳) در رأس A منفرجه است. (۴) هر سه حالت می تواند باشد.

حل: چون اندازه میانه نصف ضلع متناظرش شده است پس مثلث قائم الزاویه می باشد.

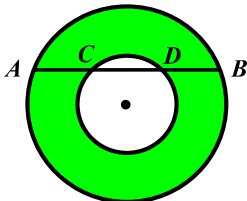
مساحت ناحیه بین دو دایره (تاج دایره)



الف) حالتی که وتر AB بر دایره مماس باشد. برابر است با: $S = \frac{\pi}{4}(AB)^2$

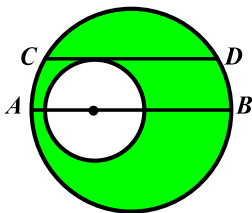
اثبات) طبق رابطه فیثاغورس داریم: $a^2 = m^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2$

$$S = \pi a^2 - \pi m^2 = \pi \left(m^2 + \frac{AB^2}{4} - m^2 \right) = \frac{\pi}{4}(AB)^2$$



ب) حالتی که وتر AB دایره کوچک تر را قطع کند برابر است با:

$$S = \frac{\pi}{4}(AB^2 - CD^2)$$



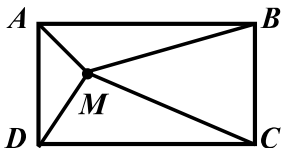
مثال: در شکل مقابل $AB \parallel CD$ و مماس بر دایره کوچک است. اگر $AB = 8cm$ مساحت

قسمت هاشور فورده مقدار است؟

(۱) 8π (۲) 4π (۳) 16π (۴) 32π

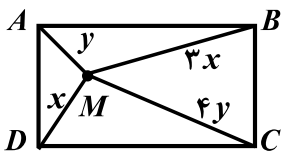
حل) با جابجایی دایره کوچک و انتقال آن به مرکز دایره بزرگ داریم:

$$S = \frac{\pi}{4}(AB)^2 = \frac{\pi}{4} \times 8^2 = 16\pi$$



نکته: اگر M نقطه‌ای دلخواه داخل یا خارج مستطیل باشد آنگاه رابطه‌ی زیر برقرار است.

$$MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$$



مثال) در شکل مقابل $ABCD$ مستطیل است و M نقطه‌ای دلخواه داخل آن است حاصل $\frac{y}{x}$ کدام

$$\sqrt{\frac{3}{5}} \quad (۴)$$

$$\sqrt{\frac{14}{19}} \quad (۳)$$

$$\sqrt{\frac{4}{5}} \quad (۲)$$

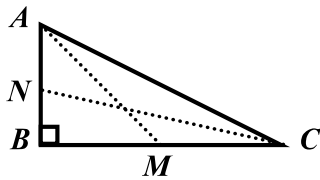
$$\sqrt{\frac{10}{17}} \quad (۱)$$

$$MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2 \Rightarrow y^2 + 16y^2 = 9x^2 + x^2 \Rightarrow 17y^2 = 10x^2 \Rightarrow \frac{y^2}{x^2} = \frac{10}{17} \Rightarrow \frac{y}{x} = \sqrt{\frac{10}{17}} \quad \text{حل}$$

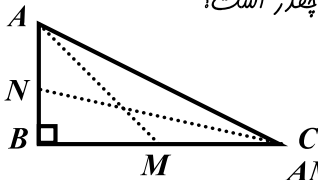
نکته: در هر مثلث قائم الزاویه مجموع مربع های دو میانه ی وارد بر دو ضلع قائمه مثلث

$$AM^2 + CN^2 = \frac{5}{4} AC^2$$

با $\frac{5}{4}$ مربع وتر برابر است.



مثال: در مثلث قائم الزاویه رو به رو میانه $AM = 10\text{cm}$ و میانه $CN = \sqrt{20}\text{cm}$ اندازه وتر AC چقدر است؟



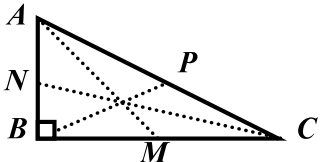
$$AM^2 + CN^2 = \frac{5}{4} AC^2 \Rightarrow 100 + 20 = \frac{5}{4} AC^2 \Rightarrow AC^2 = 120 \times \frac{4}{5} = 96 \Rightarrow AC = \sqrt{96}$$

(۱) $\sqrt{200}$ (۲) $\sqrt{100}$ (۳) $\sqrt{96}$ (۴) $\sqrt{48}$

(حل)

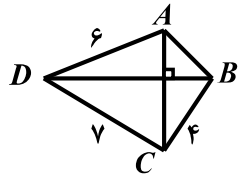
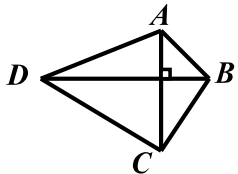
نکته: در هر مثلث قائم الزاویه مجموع مربع های سه میانه ی مثلث با $\frac{3}{4}$ مربع وتر برابر است.

$$AM^2 + CN^2 + BP^2 = \frac{3}{4} AC^2$$



نکته: در هر چهار ضلعی که قطرهای برهم عمود باشند مجموع مربع های اضلاع مقابل با مجموع مربع های دو ضلع دیگر برابر است.

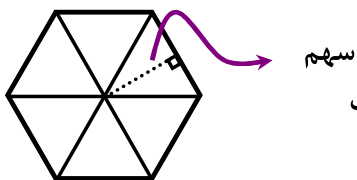
$$AB^2 + DC^2 = AD^2 + BC^2$$



مثال: با توجه به شکل مقابل اندازه ضلع AB برابر است با:

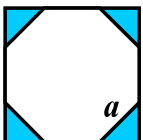
$$\sqrt{6} \quad (۴) \quad \sqrt{5} \quad (۳) \quad ۲ \quad (۲) \quad \sqrt{3} \quad (۱)$$

سهم چند ضلعی منتظم: پاره خطی که از مرکز چند ضلعی بر ضلع آن عمود می شود.



مساحت چند ضلعی منتظم: کافیسست مرکز n ضلعی را به رئوس آن وصل کنیم به این ترتیب n مثلث مساوی پدید می آید در نتیجه:

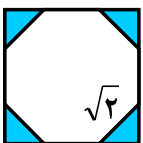
$$\text{نصف محیط} \times \text{سهم} = \text{نصف ضلع} \times \text{سهم} \times n = \text{مساحت یک مثلث} \times n = \text{مساحت } n \text{ ضلعی منتظم}$$



مساحت ۸ ضلعی منتظم به ضلع a :

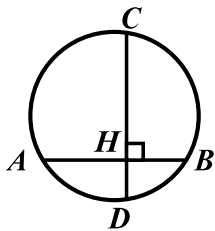
راه اول: ۸ ضلعی را داخل یک مربع قرار داده سپس مساحت مربع را منهای مساحت ۴ مثلث دورش می کنیم.

راه دوم: از فرمول $S = 2a^2(1 + \sqrt{2})$ استفاده کنیم.



مثال: طول ضلع یک ۸ ضلعی منتظم $\sqrt{2}$ است مساحت آن کدراست؟

$$۶ + \sqrt{2} \quad (۱) \quad ۴ + ۲\sqrt{2} \quad (۲) \quad ۶ + ۲\sqrt{2} \quad (۳) \quad ۴ + ۴\sqrt{2} \quad (۴)$$

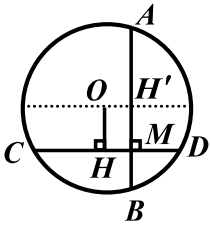


نکته: هرگاه دو وتر دایره برهم عمود باشند (R شعاع دایره است).

$$AH^2 + BH^2 + CH^2 + DH^2 = 4R^2 \quad (\text{الف})$$

(ب) مجموع هر دو کمان روبه رو 180° درجه می شود.

$$\widehat{AD} + \widehat{BC} = \widehat{AC} + \widehat{BD} = 180^\circ$$



مثال: وترهای AB و CD در شکل زیر برهم عمودند و O مرکز دایره است. اگر $MB = 3$ و $MD = 4$ و $CM = 9$ باشد طول پاره خط OH و شعاع دایره چقدر است؟

$$MC \times MD = AM \times BM \Rightarrow 4 \times 9 = AM \times 3 \Rightarrow AM = \frac{4 \times 9}{3} = 12$$

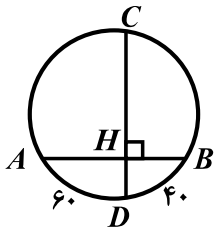
$AM + MB = 12 + 3 = 15$ = طول وتر AB پس چون قطر دایره وتر AB را نصف می کنی پس $BH' = 7.5$ در نتیجه

$$OH = MH' = BH' - BM = 7.5 - 3 = 4.5$$

برای پیدا کردن شعاع از رابطه ای که در نکته بالا گفته شده استفاده می کنیم.

$$AM^2 + BM^2 + CM^2 + DM^2 = 4R^2 \Rightarrow 12^2 + 3^2 + 9^2 + 4^2 = 4R^2 \Rightarrow 144 + 9 + 81 + 16 = 4R^2$$

$$\Rightarrow 250 = 4R^2 \Rightarrow R^2 = \frac{250}{4} = 62.5 \Rightarrow R = \sqrt{62.5}$$



مثال: در شکل مقابل دو وتر AB و CD برهم عمودند اگر دو کمان AD و BC به ترتیب 60° و 40° درجه باشند

تفاضل دو کمان AC و BC چند درجه است؟

۲۰ (۴)

۲۵ (۳)

۴۰ (۲)

۳۰ (۱)

حل (با توجه به نکته $\widehat{AD} + \widehat{BC} = \widehat{AC} + \widehat{BD} = 180^\circ$ کمان $BC = 120^\circ$ و کمان $AC = 140^\circ$ پس

تفاضل دو کمان برابر 120° درجه خواهد شد.

فرمول هرون: مساحت مثلثی که اندازه سه ضلع آن (a, b, c) معلوم باشد.

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \text{مثلث}$$

p نصف محیط دایره است.

مثال: مساحت مثلثی که سه ضلع آن ۳ و ۵ و ۷ باشند را پیدا کنید.

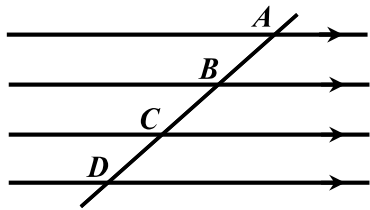
$$\text{نصف محیط} = (5 + 6 + 7) \div 2 = 9$$

(حل)

$$\Rightarrow S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{9(9-5)(9-6)(9-7)} = \sqrt{9 \times 4 \times 3 \times 2} = 6\sqrt{6}$$

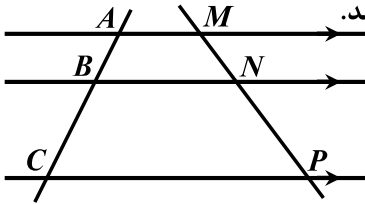
نکته: اگر اندازه سه میانه مثلثی را داشته باشیم می توانیم سه میانه را سه ضلع مثلث فرض کنیم و با فرمولی شبیه فرمول هرون مساحت

$$S = \frac{4}{3} \sqrt{P(P-m_a)(P-m_b)(P-m_c)} \quad \text{و} \quad P = \frac{m_a + m_b + m_c}{2} \quad \text{مثلث را حساب کنیم.}$$

خطوط موازی و قضیه تالس

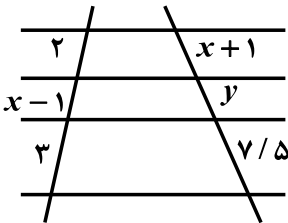
نکته: هرگاه خطی توسط چند خط موازی با فاصله های برابر قطع شود، قسمت های ایجاد شده بین هر دو خط متوالی با هم برابرند.

$$AB = BC = CD$$



نکته: هرگاه چند خط موازی خطوطی را قطع کنند روی آنها پاره خط های متناسب ایجاد می کنند.

$$\frac{AB}{BC} = \frac{MN}{NP} \quad \text{یا} \quad \frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NP}$$



مثال: در شکل مقابل مقدار y چند است؟

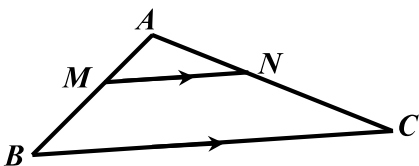
$$\frac{2}{3} = \frac{x+1}{7/5} \Rightarrow 15 = 3x + 3 \Rightarrow x = \frac{12}{3} = 4$$

(حل)

$$\frac{4-1}{3} = \frac{y}{4} \Rightarrow y = 1$$

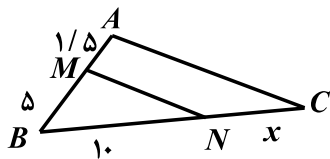
قضیه تالس: هرگاه در یک مثلث خطی موازی با یکی از اضلاع آن رسم شود و دو ضلع دیگر را قطع کند

روی آن دو ضلع پاره خط متناسب ایجاد می کند.



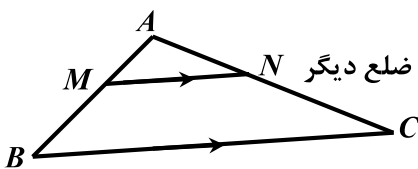
$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \quad \text{رابطه جزء به جزء}$$

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} \quad \text{رابطه جزء به کل}$$



مثال: در شکل مقابل $MN \parallel AC$ طول پاره خط NC چقدر است؟

$$\frac{BM}{MA} = \frac{BN}{NC} \Rightarrow \frac{5}{1/5} = \frac{10}{x} \Rightarrow x = \frac{1/5 \times 10}{5} = 3$$



نتیجه قضیه تالس: هرگاه در یک مثلث خطی موازی با یکی از اضلاع آن رسم شود و دو ضلع دیگر

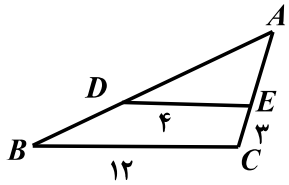
را قطع کند با آن دو ضلع مثلثی می سازد که اضلاعش با اضلاع مثلث اصلی متناسبند.

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

تذکره ۱: همانطور که در بالا ملاحظه می کنید در نتیجه تالس حتما باید اضلاع یکی از مثلث ها در صورت و اضلاع مثلث دیگر در

مخرج نوشته شوند.

تذکره ۲: در حل سوالها زمانی از نتیجه تالس استفاده می کنیم که لازم باشد **دو خط موازی** را در حل بنویسیم.



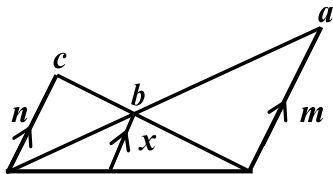
مثال: در شکل مقابل $DE \parallel BC$ است طول پاره خط AE کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) ۱ (۳) ۹ (۴) $\frac{3}{8}$

حل) چون از دو خط موازی DE, BC بای در حل استفاده کنیم پس از نتیجه تالس استفاده می شود.

$$\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{AE}{AE+3} = \frac{4}{12} \Rightarrow 12AE = 4AE + 12 \Rightarrow 8AE = 12 \Rightarrow AE = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

عکس قضیه تالس: هرگاه خطی روی یکی از اضلاع مثلثی پاره خط های متناسب ایجاد کند(رابطه های جزء به جزء و جزء به کل در آن صدق کند.) آنگاه آن خط با ضلع سوم مثلث موازی است.



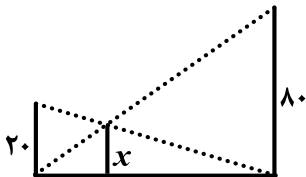
نکته: در شکل مقابل اگر سه خط ll و b و c موازی باشند رابطه ی زیر برقرار است.

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$$

مثال: دو میله ی قائم ۲۰ و ۸۰ سانتیمتری به حاصله ی ۱۰۰ سانتیمتری یکدیگر قرار دارند بلندی نقطه ی

مشترک خطوط واصل بین نوک هر میله با پای میله دیگر چقدر است؟

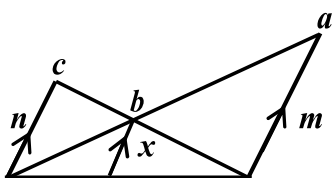
- (۱) ۱۲ (۲) ۴۰ (۳) ۱۶ (۴) ۱۵



$$\frac{1}{x} = \frac{1}{20} + \frac{1}{80} = \frac{4+1}{80} = \frac{5}{80} = \frac{1}{16} \Rightarrow x = 16$$

مثال: در شکل مقابل اگر سه خط ll و b و c موازی باشند حاصل $\frac{x}{m} + \frac{x}{n}$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{4}$



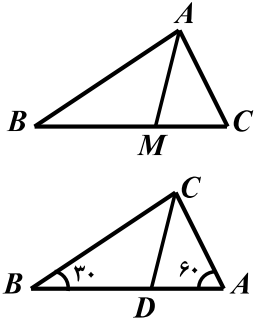
$$\frac{1}{x} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \Rightarrow x \times \frac{1}{x} = x \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right) \Rightarrow 1 = \frac{x}{m} + \frac{x}{n} \quad \text{حل}$$

نکته: در هر مثلث نیمساز هر زاویه، ضلع مقابل زاویه را به نسبت دو ضلع دیگر تقسیم می کند.

$$\left(AM \text{ نیمساز زاویه } A \text{ است.} \right) \quad \frac{AB}{BM} = \frac{AC}{CM}$$

اثبات) از نقطه C خطی موازی با نیمساز رسم می کنیم تا امتداد AB را قطع کند

و سپس رابطه ی تالس را می نویسیم.



مثال: در شکل مقابل CD نیمساز زاویه C است با توجه به اندازه های داده شده مطلوب است نسبت $\frac{AD}{AC}$

$$(1) \sqrt{3} - 1 \quad (2) \frac{2}{3} \quad (3) \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (4) \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$$

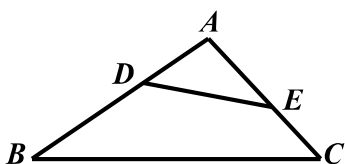
حل) $\hat{B} = 30^\circ, \hat{A} = 60^\circ \Rightarrow \hat{C} = 90^\circ$ و چون ضلع مقابل زاویه 30° در مثلث قائم الزاویه نصف وتر و ضلع رو به رو به زاویه 60° در به

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ وتر است داریم؛}$$

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{DB} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}AB}{\frac{\sqrt{3}}{2}AB} = \frac{AD}{DB} \Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow DB = \sqrt{3}AD \Rightarrow AB = AD + DB = AD + \sqrt{3}AD \Rightarrow AB = (1 + \sqrt{3})AD$$

میکنیم

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AD}{\frac{1}{2}AB} = \frac{2AD}{AB} = \frac{2AD}{(1 + \sqrt{3})AD} = \frac{2}{1 + \sqrt{3}} \Rightarrow \frac{2}{1 + \sqrt{3}} \times \frac{1 - \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} = \frac{2(1 - \sqrt{3})}{1 - 3} = \sqrt{3} - 1$$



نکته: اگر در مثلث ABC داشته باشیم: $AD = \frac{1}{m}AB$ و $AE = \frac{1}{n}AC$

آنگاه مساحت مثلث ADE برابر $\frac{1}{mn}$ مساحت مثلث ABC خواهد بود یعنی:

$$S_{ADE}^{\Delta} = \frac{1}{mn} \times S_{ABC}^{\Delta}$$

تشابه

چند ضلعی های متشابه: دو چند ضلعی را متشابه گویند هرگاه ضلع هایشان نظیر به نظیر با هم متناسب و زاویه هایشان نظیر به نظیر با هم برابر باشند.

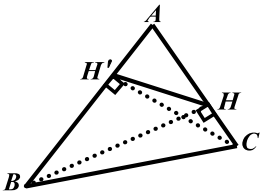
نسبت تشابه: به نسبت دو ضلع متناظر نسبت تشابه می گوییم. یا نسبت تشابه عددی است که نشان می دهد دو شکل متشابه چند برابر یکدیگرند.

شکل های متشابه:

- ۱- همه ی مربع ها با هم متشابهند.
- ۲- هر دو n ضلعی منتظم به شرط برابر بودن تعداد اضلاعشان با هم متشابهند.
- ۳- همه مثلث های متساوی الاضلاع با هم متشابهند.
- ۴- همه مثلث های قائم الزاویه متساوی الساقین با هم متشابهند.
- ۵- هر دو لوزی که یک زاویه برابر داشته باشند با هم متشابهند.
- ۶- هر دو چند ضلعی هم نهشت با هم متشابهند. و نسبت تشابه آنها ۱ می باشد.
- ۷- هر چند ضلعی با خودش متشابه است.
- ۸- هر دو دایره با هم متشابه هستند و نسبت تشابه آنها نسبت شعاع هایشان است.
- ۹- هر دو مستطیل که نسبت طول های آنها با نسبت عرض هایشان برابر باشد متشابهند.
- ۱۰- هر دو مستطیل که زاویه بین قطر هایشان برابر باشد با یکدیگر متشابهند

حالت های تشابه دو مثلث :

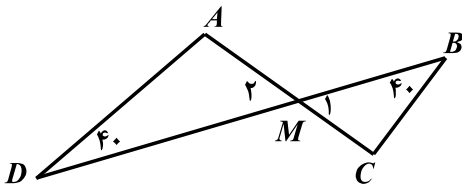
- ۱- برابر بودن دو زاویه متناظر
 - ۲- متناسب بودن دو ضلع و برابر بودن زاویه ی بین آن دو ضلع
 - ۳- متناسب بودن سه ضلع
- تذکر مهم:** در دو مثلث متشابه، **اضلاع متناسب روبه روی زاویه های مساوی** قرار دارند.



نکته: اگر خطی موازی یک مثلث رسم شود و دو ضلع دیگر را قطع کند مثلثی می سازد که با مثلث اصلی متشابه است.

نکته: مثلثی که از وصل کردن پای دو ارتفاع مثلث با رأس سوم به دست می آید با مثلث اصلی متشابه است.

مثال: در شکل مقابل نشان دهید دو مثلث با هم متشابهند



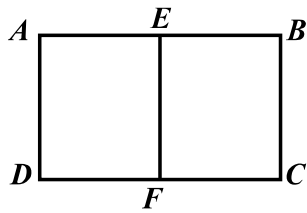
$$\left. \begin{array}{l} \hat{D} = \hat{B} = 40^\circ \\ \hat{M}_1 = \hat{M}_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ADM \approx \triangle BMC$$

و تناسب اضلاع متناظر را بنویسید.

$$\text{چون } \hat{M}_1 = \hat{M}_2 \text{ پس اضلاع روبه روی آنها یعنی } AD \text{ و } BC \text{ با هم متناسبند یعنی: } \frac{AD}{BC}$$

$$\text{چون } \hat{D} = \hat{B} \text{ پس اضلاع روبه روی آنها یعنی } AM \text{ و } MC \text{ با هم متناسبند یعنی: } \frac{AM}{MC}$$

در نتیجه تناسب اضلاع متناظر به صورت مقابل می شود.

$$\frac{AD}{BC} = \frac{AM}{MC} = \frac{DM}{BM}$$


مثال: در شکل مقابل دو مستطیل $ABCD$ و $AEFD$ با هم متشابهند نقطه ی E وسط ضلع AB است. نسبت طول به عرض هر مستطیل برابر است با:

- (۱) ۲ (۲) $\sqrt{2}$ ✓ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) ۴

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AD}{AE} \Rightarrow \frac{2AE}{AD} = \frac{AD}{AE} \Rightarrow 2AE^2 = AD^2 \Rightarrow AD = \sqrt{2}AE \Rightarrow \frac{AD}{AE} = \sqrt{2}$$

مثال: عکسی مستطیل شکل به ابعاد ۴ و ۶ سانتیمتر را بزرگ کرده ایم اگر به عرض عکس ۶ سانتیمتر اضافه کرده باشیم به طول آن چند سانتیمتر اضافه شده است؟

(۱) ۱۲ (۲) ۹ ✓ (۳) ۱۵ (۴) ۶

$$\frac{4}{6} = \frac{4+6}{x} \Rightarrow x = \frac{6 \times 10}{4} = 15 \Rightarrow 15 - 6 = 9$$

به طول اضافه شده است.

نکته مهم:

۱- در دو شکل متشابه نسبت محیط ها ، قطر ها ، ارتفاع ها ، میانه ها و نیمسازها با نسبت تشابه دو شکل برابرند.

۲- در دو شکل متشابه **نسبت مساحت ها با مجذور (مربع) نسبت تشابه** دو شکل برابر است.

مثال: طول اضلاع یک مثلث ۱۱ و ۵ و ۷ سانتیمتر و طول کوچک ترین ضلع مثلثی متشابه با اولی ۲۲/۵ سانتیمتر است. محیط مثلث دوام قدر است؟

- (۱) ۱۰۲ (۲) ۱۰۲/۵ (۳) ۱۰۳ (۴) ۱۰۳/۵ ✓

طبق نکته بالا نسبت دو ضلع متناظر در دو مثلث با نسبت محیط های دو مثلث برابر است.

$$\frac{5}{22/5} = \frac{23}{x} \Rightarrow x = \frac{22/5 \times 23}{5} = 103/5$$

مثال: نسبت مساحت های دو پنج ضلعی منتظم برابر با $\frac{4}{9}$ است اگر اندازه ی یکی از آنها ۶ باشد اندازه ی ضلع متناظر در شکل دیگر برابر است با:

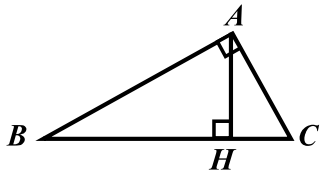
- (۱) ۴ یا ۸ (۲) ۴ یا ۹ ✓ (۳) ۹ یا ۸ (۴) ۵ یا ۱۳

چون نسبت مساحت ها با مجذور نسبت تشابه برابر است داریم:

$$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3} \quad \text{نسبت تشابه}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{x}{6} \Rightarrow x = \frac{2 \times 6}{3} = 4 \quad \text{و} \quad \frac{2}{3} = \frac{6}{x} \Rightarrow x = \frac{3 \times 6}{2} = 9$$

نکته: در هر مثلث قائم الزاویه با رسم ارتفاع وارد بر وتر داریم:



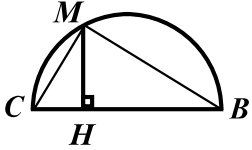
$$AH^2 = BH \times CH$$

مربع ارتفاع وارد بر وتر برابر است با حاصل ضرب دو قطعه ای که روی وتر به وجود می آورد

$$AB^2 = BH \times BC$$

$$AC^2 = CH \times BC$$

$$AB \times AC = AH \times BC$$

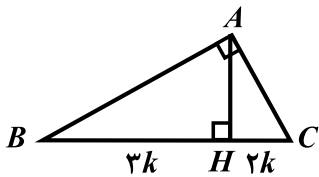


مثال: در نیم دایره مقابل $MH = 6$ و $HB = 9$ می باشد شعاع نیم دایره کدام است؟

۴/۵ (۱) ۵/۵ (۲) ۶/۵ (۳) ۷/۵ (۴)

حل: M را به B و C وصل می کنیم چون $\angle CMB$ مماسی رو به رو به قطر می باشد 90° درجه می شود داریم:

$$MH^2 = CH \times HB \Rightarrow 36 = 9CH \Rightarrow CH = 4 \quad \text{و} \quad BC = 9 + 4 = 13 \Rightarrow \text{شعاع دایره} = 13 \div 2 = 6.5$$



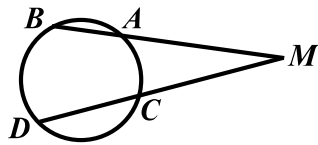
مثال: در مثلث قائم الزاویه ای طول وتر برابر $15\sqrt{6}$ واحد است اگر ارتفاع وارد بر وتر آن را به نسبت 3 و 2

تقسیم کند اندازه ارتفاع وارد بر وتر کدام است؟

۱۲ (۱) ۱۶ (۲) ۲۰ (۳) ۱۸ (۴)

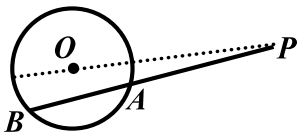
$$2k + 3k = 15\sqrt{6} \Rightarrow 5k = 15\sqrt{6} \Rightarrow k = 3\sqrt{6}$$

$$AH^2 = BH \times CH = 3k \times 2k = 6k^2 = 6 \times (3\sqrt{6})^2 = 6 \times 54 = 324 \Rightarrow AH = 18$$



نکته: اگر از یک نقطه بیرون دایره دو قاطع بر دایره رسم کنیم داریم:

$$MA \times MB = MC \times MD$$

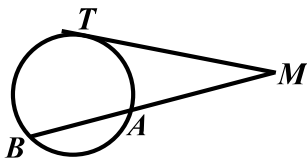


مثال: در شکل مقابل $PA = 5, AB = 3, R = 4 \text{ cm}$ حاصله ی نقطه P تا مرکز دایره چقدر است؟

۲ $\sqrt{31}$ (۱) ۲ $\sqrt{14}$ (۲) ۴ $\sqrt{7}$ (۳) ۳ $\sqrt{7}$ (۴)

حل: ابتدا P را به مرکز دایره وصل کرده و امتداد می دهیم تا دایره را در نقطه D قطع کند

و سپس از نکته بالا استفاده می کنیم.

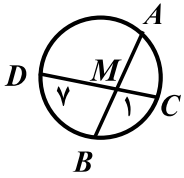
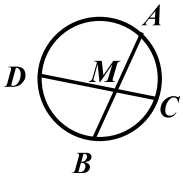


نکته: اگر MT مماس بر دایره باشد. آنگاه رابطه ی زیر را داریم:

$$MT^2 = MA \times MB$$

نکته: اگر دو وتر یک دایره را در داخل دایره در نقطه ای مانند M قطع کنند داریم:

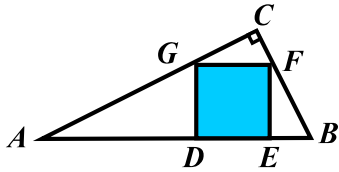
$$MA \times MB = MC \times MD$$



مثال: در شکل مقابل نقطه M وسط AB است اندازه AB مقدار است؟

(۱) $\sqrt{7}$ (۲) ۸ (۳) ۴ (۴) $2\sqrt{7}$

$$MA \times MB = MC \times MD \Rightarrow MA \times MA = 1 \times 7 \Rightarrow MA^2 = 7 \Rightarrow MA = \sqrt{7} \Rightarrow AB = 2\sqrt{7}$$



نکته: اگر مربعی در یک مثلث قائم الزاویه محاط شده باشد طوری که یک ضلع مربع نیز

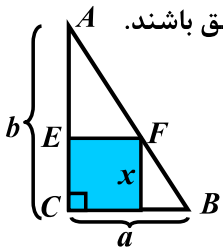
روی وتر منطبق باشد رابطه های زیر برقرار است.

$$DG \times FE = AD \times EB \quad \text{یا} \quad DE^2 = AD \times EB$$

اثبات) ثابت کنید دو مثلث AGD و BEF با هم متشابهند سپس تناسب اضلاع متناظر را بنویسید و طرفین وسطین کنید.

نکته: اگر مربعی در یک مثلث قائم الزاویه محاط شده باشد طوری که اضلاع مربع روی دو ضلع قائم آن منطبق باشند.

رابطه ی زیر برقرار است.



یعنی معکوس ضلع مربع برابر است با مجموع معکوس های دو ضلع قائم مثلث

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

اثبات) ثابت کنید دو مثلث AEF و ABC متشابهند و سپس تناسب اضلاع را بنویسید.